Programme de colle – MP 1

1. Révisions

Révision du programme de MPSI : dérivabilité des fonctions numériques. Voir programme officiel page suivante.

2. Limites et continuité

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Étude locale d'une application, continuité	
Limite en un point adhérent à une partie A. Caractérisation séquentielle.	Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.
Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée. Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.	
Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.	Les étudiants doivent savoir que deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	
Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.	Exemple : l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie de E.
Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$ tel que : $$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant C\|x\|.$$	Notation $\mathscr{L}_c(E, F)$. La notion de norme subordonnée est hors programme.
i) Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.	
Continuité des applications polynomiales, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.	Exemple : déterminant.

Étude sur quelques exemples de la limite et de la continuité d'une fonction réelle de deux variables réelles : celles des applications partielles sont nécessaire mais non suffisantes. Changement de variable (par composition) par exemple en polaire.

3. Fonctions vectorielles

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie E.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Dérivabilité en un point	
Dérivabilité en un point.	Formes équivalentes : taux d'accroissement, développement limité à l'ordre 1. Interprétation cinématique. ⇆ PC : vitesse instantanée. Traduction par les coordonnées dans une base de E.
Dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction en un point.	
b) Opérations sur les fonctions dérivables	
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivabilité et dérivée de $L \circ f$, où L est linéaire. Dérivabilité et dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire.	
Cas du produit scalaire.	⇆ PC : dérivée de la densité volumique de l'énergie électromagnétique.
Dérivabilité et dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle.	
Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$.	⇆ PC et SI : vecteur accélération.

Semaine prochaine : Fonctions vectorielles (fin = intégration, formules de Taylor), arcs paramétrés.

QUESTIONS DE COURS :

Faire écrire la définition avec des quantificateurs de la limite d'une fonction vectorielle en un point ou lorsque $\|x\| \to +\infty$ ou une limite infinie pour une fonction à valeur réelle.

(i) Caractérisation séquentielle de la continuité : f est continue en a si et seulement si pour tout suite (a_n) telle que $a_n \to a$, $(f(a_n))_n$ converge.

(ii) Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue, fonctions continues coïncidant sur une partie dense.

(iii) Si A est une partie non vide de E, $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne donc uniformément continue sur E.

(iv) Théorème de Heine pour une variable réelle.

(v) Caractérisations de la continuité d'une application linéaire.

(vi) Si l'espace de départ est de dimension finie, continuité des applications linéaires et bilinéaires.

(vii) Dérivation de $u \circ f$ si u est linéaire, de $B(f, g)$ si B est bilinéaire.

(viii) **CCINP 36** : Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

   (a) Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

   P1. f est continue sur E.

   P2. f est continue en 0_E.

   P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$.

   (b) Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Démontrer que φ est linéaire et continue.

(ix) **CCINP 35** : E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

(a) Soient f une application de E dans F et a un point de E.
On considère les propositions suivantes :

P1. f est continue en a.

P2. Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.

(b) Soit A une partie dense dans E, et soient f et g deux applications continues de E dans F.
Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

4. Programme de MPSI

Contenus	Capacités & commentaires
a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé.	Développement limité à l'ordre 1. Interprétation géométrique. ⇆ SI : identification d'un modèle de comportement au voisinage d'un point de fonctionnement. ⇆ SI : représentation graphique de la fonction sinus cardinal au voisinage de 0. ⇆ I : méthode de Newton.
La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite. Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.	
Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une réciproque.
b) Extremum local et point critique	
Extremum local.	
Condition nécessaire en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle.	Utilisation pour établir l'existence de zéros d'une fonction.
Égalité des accroissements finis.	Interprétations géométrique et cinématique.
Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\lvert f'\rvert$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.	La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.	
Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.	Interprétation géométrique. Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et f' est continue en a.
d) Fonctions de classe C^k	
Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$.	
Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.
Théorème de classe $\mathscr{C}^k$ par prolongement : si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$ et si $f^{(i)}(x)$ possède une limite finie lorsque x tend vers a pour tout $i \in \{0,\dots,k\}$, alors f admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.	

Contenus	Capacités & commentaires
e) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Le résultat, admis à ce stade, sera justifié dans le chapitre « Intégration ».