Programme de colle – MP 1

1. Révisions

Révision du programme de MPSI : limite et continuité des fonctions numériques. Voir programme officiel page suivante.

2. Topologie

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Topologie d'un espace normé	
Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection d'une famille finie. Voisinage d'un point.	Une boule ouverte est un ouvert.
Fermé d'un espace normé. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie. Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	Une boule fermée, une sphère, sont fermées.
Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A. Voisinage relatif.	Caractérisation séquentielle des fermés de A.

3. Limites et continuité (début)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Étude locale d'une application, continuité	
Limite en un point adhérent à une partie A. Caractérisation séquentielle.	Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.
Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée. Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.	
Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues. Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	Les étudiants doivent savoir que deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Le jour férié de la semaine derrière fait que je serai un peu en retard sur la progression sur la continuité qui sera traitée en début de semaine. Pour les colles de début de semaine, des exercices plus élaborés concernant cette notion pourront être posés la semaine prochaine.

Semaine prochaine : Continuité (fin), dérivabilité, arcs paramétrés.

QUESTIONS DE COURS :

Faire écrire la définition avec des quantificateurs de la limite d'une fonction vectorielle en un point ou lorsque $\|x\| \to +\infty$ ou une limite infinie pour une fonction à valeur réelle.

(i) Toutes les définitions concernant la topologie.

(ii) Stabilité par réunion et intersection de voisinages, ouverts, fermés, avec contre-exemples.

(iii) L'adhérence est le plus petit fermé contenant la partie.

(iv) L'intérieur est le plus grand ouvert contenu dans la partie.

(v) Caractérisations séquentielles des fermés et fermés relatifs.

(vi) Caractérisations séquentielles de l'adhérence et de la limite.

(vii) **CCINP 37** : On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.
- (a) i. Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
  - ii. Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
  - iii. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
- (b) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

(viii) **CCINP 38** : On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
On pose $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max_{0\leq i\leq n} |a_i|$ où $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.
- (a) i. Démontrer que N_∞ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
  Dans la suite de l'exercice, on admet que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
  - ii. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.
  - iii. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
- (b) On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.
  Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

(ix) **CCINP 34** : Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.
- (a) Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
- (b) Démontrer que : $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $x_n \to x$.
- (c) Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
- (d) Démontrer que si A est convexe alors $\overline{A}$ est convexe.

4. Programme de MPSI

Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures. Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et, sauf dans les paragraphes A-e) et B-f), sont à valeurs réelles.

Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré sur a si a est réel, avec un intervalle $[A,+\infty[$ si $a=+\infty$, avec un intervalle $]-\infty,A]$ si $a=-\infty$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Limite d'une fonction en un point	
Étant donné un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. Si f possède une limite finie en a, f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Extension de la notion de limite en a lorsque f est définie sur $I\setminus\{a\}$. Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie). Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite $+\infty$), de majoration (limite $-\infty$). Théorème de la limite monotone.	
b) Continuité	
Continuité, prolongement par continuité en un point. Continuité à gauche, à droite. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Continuité sur un intervalle.	
c) Image d'un intervalle par une fonction continue	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Cas d'une fonction strictement monotone. ⇆ I : application de l'algorithme de dichotomie à la recherche d'un zéro d'une fonction continue.
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.	
d) Image d'un segment par une fonction continue	
Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.	La démonstration n'est pas exigible.
e) Continuité et injectivité	
Toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone. La réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle est continue.	La démonstration n'est pas exigible.
f) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide de parties réelle et imaginaire.

Contenus	Capacités & Commentaires