Programme de colle – MP 1

1. Suites

Exercices sur l'étude asymptotique des suites.
Étude des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 avec le point du vue de la réduction.

2. Series numériques et vectorielles

Reprise du programme précédent. Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie	
Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Lien suite-série. Série absolument convergente. Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.	Divergence grossière. La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ ont même nature. Cas des séries matricielles. Le critère de Cauchy est hors programme.
b) Compléments sur les séries numériques	
Règle de d'Alembert.	Introduite principalement en vue de l'étude des séries entières.
Critère des séries alternées. Signe et encadrement des restes.	L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme. La transformation d'Abel est hors programme. L'étude de la sommation par tranches dans le cas semi-convergent est hors programme.
Comparaison série-intégrale : Si f est une fonction continue par morceaux et décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$ converge.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas où f est monotone. Interprétation géométrique.

Auquel s'ajoute :

Contenus	Capacités & commentaires
Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.	La suite de référence est positive à partir d'un certain rang. Cas des séries convergentes, des séries divergentes.

Ainsi que :

- Produit de Cauchy de deux séries complexes absolument convergentes, sans soulever de subtilité sur la sommabilité pour le moment.
- Dans une algèbre de dimension finie munie d'une norme sous-multiplicative, séries exponentielles et géométriques. L'étude plus poussée des exponentielles de matrices et d'endomorphismes sera faite plus tard.

Semaine prochaine : Topologie, limite, continuité.

Questions de cours :

(i) Formule de Stirling : il existe $K>0$ tel que $n! \sim K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

(ii) Détermination de K à l'aide des intégrales de Wallis.

(iii) Sommation des relations de comparaison dans le cas de divergence.

(iv) Sommation des relations de comparaison dans le cas de convergence.

(v) Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

(vi) Convergence des séries exponentielles et géométriques dans une algèbre de dimension finie munie d'une norme sous-multiplicative. Exemple de série semi-convergentes dont le produit de Cauchy diverge.

(vii) **CCINP 5** :

(a) On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. **Cas $\alpha \leqslant 0$** : En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

ii. **Cas $\alpha > 0$** : Étudier la nature de la série.
Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

(b) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

(viii) **CCINP 6** : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

(a) Démontrer que si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.
Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

(b) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

(ix) **CCINP 7** :

(a) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.
Montrer que :
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

(b) Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + i)\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.
Remarque : i est ici le nombre complexe de carré égal à -1

(x) **CCINP 8** : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

(a) i. Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.
Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

ii. Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

(b) i. Étudier la convergence ~~simple sur~~ pour $x \in \mathbb{R}$ fixé de la série ~~de fonctions~~ $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

ii. (5/2) Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

(xi) **CCINP 46** : On considère la série : $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

(a) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

(b) En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

(c) $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?