Sous-espaces affines

Extrait du programme officiel :

Le but de cette partie est double :
- *montrer comment l'algèbre linéaire permet d'étendre les notions de géométrie affine étudiées au collège et au lycée et d'utiliser l'intuition géométrique dans un cadre élargi.*
- *modéliser un problème affine par une équation $u(x) = a$ où u est une application linéaire, et unifier plusieurs situations de ce type déjà rencontrées.*

Cette partie du cours doit être illustrée par de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Présentation informelle de la structure affine d'un espace vectoriel : points et vecteurs.	L'écriture $B = A+\overrightarrow{u}$ est équivalente à la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.
Translation.	
Sous-espace affine d'un espace vectoriel, direction. Hyperplan affine.	Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Intersection de sous-espaces affines.	
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = a$ d'inconnue x est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par $\operatorname{Ker} u$.	Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2 et la recherche de polynômes interpolateurs. La notion d'application affine est hors programme.
Repère affine, coordonnées.	
Hyperplans affines d'un espace euclidien	
Vecteur normal à un hyperplan affine d'un espace euclidien. Si l'espace est orienté, orientation d'un hyperplan par un vecteur normal.	Lignes de niveau de $M \mapsto \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}$.
Équations d'un hyperplan affine dans un repère orthonormal.	Cas particuliers de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Distance à un hyperplan affine défini par un point A et un vecteur normal unitaire $\vec{n}$: $\lvert\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\rvert$.	Cas particuliers de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

TABLE DES MATIÈRES

I Structure affine : points et vecteurs

1 Généralités

On sait en géométrie classique, plane ou spatiale, qu 'un élément de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^3$ peut indifféremment représenter un vecteur ou un point.
On peut généraliser cela à tout espace vectoriel.

Les trois principes fondamentaux sont les suivants :
- Tout couple de points (A, B) permet de former un unique vecteur noté $\overrightarrow{AB}$,
- Un point A étant fixé, tout vecteur $\vec{v}$ s'écrit $\overrightarrow{AB}$ pour un certain point B unique,
- Pour tous points A, B, C, on a la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Plus formellement, si on note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points et $\vec{E}$ l'ensemble des vecteurs, les deux premiers points se traduisent par :
- On a une application $\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{E}^2 & \longrightarrow & \vec{E} \\ (A,B) & \longmapsto & \overrightarrow{AB} \end{array}\right.$,
- Un point A étant fixé, l'application $\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \longrightarrow & \vec{E} \\ B & \longmapsto & \overrightarrow{AB} \end{array}\right.$ est bijective.

$\vec{E}$ est la **direction** de $\mathscr{E}$, la **dimension** de $\mathscr{E}$ est celle de sa direction $\vec{E}$.

On se permet alors d'ajouter un vecteur à un point : si $A \in \mathscr{E}$ et $\vec{v} \in \vec{E}$, on a un unique B tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et on pose alors

$$A + \vec{v} = A + \overrightarrow{AB} = B$$

(penser à une translation, ou aux coordonnées/affixes !)

2 Deux visions d'un même espace vectoriel

On peut appliquer cela à n'importe espace vectoriel E.

Les éléments de E pourront désigner, suivant le contexte, soit des points (notés en majuscule $A, B, C\dots$), soit des vecteurs (notés en minuscule $u, v, w\dots$).

On pose $\boxed{\overrightarrow{AB} = B - A.}$ (Penser aux corrdonnées/affixes à nouveau !)
Cela permet de retrouver $\boxed{A + \overrightarrow{AB} = B.}$

Les opérations suivantes ont un sens géométrique :
- ajouter deux vecteurs (mais pas deux points) : on obtient un vecteur,
- ajouter un point à un vecteur (et non l'inverse) : on obtient un point,
- retrancher deux points : on obtient un vecteur.

Le vecteur nul permet de passer de point à vecteur : $\overrightarrow{0_E A} = A - 0_E = A$

Cela traduit exactement notre manière de dessiner des espaces vectoriels dans le plan ou l'espace !

II Translations d'un espace vectoriel

Définition : Translation

Soit E un espace vectoriel et $u \in E$ un vecteur fixé. On appelle **translation de vecteur** u l'application

$$t_u : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x+u \end{array} \right.$$

On note $\mathscr{T}(E)$ l'ensemble des translations de E.

Remarques

R 1 – Avec le point de vue vectoriel, c'est juste l'addition de deux vecteurs.
Avec le point de vue affine, $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{B} = \mathrm{A} + u$ on retrouve la notion géométrique de translation.

R 2 – Une translation n'est presque jamais linéaire !

R 3 – Si $u, v \in E$,

$$\begin{cases} t_u \circ t_v = t_{u+v} = t_v \circ t_u \\ t_u \text{ bijectif et } t_u^{-1} = t_{-u} \end{cases}$$

R 4 – $(\mathscr{T}(E), \circ)$ a une structure de groupe (sous-groupe de $(\mathfrak{S}(E), \circ)$.)

III SOUS-ESPACE AFFINE D'UN ESPACE VECTORIEL

Définition : Sous-espace affine, direction, dimension

On appelle **sous-espace affine** de E toute partie $\mathscr{F}$ de E tel qu'il existe $x_0 \in E$ et F sous-espace vectoriel de E tels que $\mathscr{F} = x_0 + F = \{x_0 + y,\ y \in F\}$. $\mathscr{F}$ est l'image de F par la translation de vecteur x_0.

Avec les notations affines : $\mathscr{F} = \mathrm{A} + \vec{F} = \{A + \vec{v}, \vec{v} \in \vec{F}\}$ où A est un point de E et $\vec{F}$ un sous-espace vectoriel de E.

$\vec{F}$ s'appelle la **direction** de $\mathscr{F}$. Par définition, la **dimension** de $\mathscr{F}$ est celle de $\vec{F}$. Les vecteurs de $\vec{F}$ sont appelés vecteurs directeurs de $\mathscr{F}$.

Remarques

R 1 – Avec des notations vectorielles, $x \in \mathscr{F}$ si et seulement si $x - x_0 \in F$.
Avec des notations affines, $\mathrm{B} \in \mathscr{F}$ si et seulement si $\mathrm{B} - \mathrm{A} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \in \vec{F}$.

R 2 – Un sous-espace affine n'est jamais vide !

Propriété

La direction $\vec{F} = \left\{\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathrm{B} - \mathrm{A} \middle| \mathrm{B} \in \mathscr{F}\right\} = \left\{\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \mathrm{C} - \mathrm{B} \middle| \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathscr{F}\right\}$ *du sous-espace affine* $\mathscr{F}$ *est unique.*
En revanche, on peut remplacer A *par n'importe quel point de* $\mathscr{F}$.

Remarque

Avec les notations vectorielles, $F = \{x - x_0 | x \in \mathscr{F}\} = \left\{x - x' \middle| x, x' \in \mathscr{F}\right\}$ et on peut remplacer x_0 par n'importe quel autre élément de $\mathscr{F}$.

Démonstration

(i) Avec les notations affines :
- Si $\vec{v} \in \vec{F}$, alors $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ avec $\mathrm{B} = \mathrm{A} \in \mathscr{F}$ et $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \vec{v} \in \mathscr{F}$.
- Si $\mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathscr{F}$, alors on a $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{F}$ tels que $\mathrm{B} = \mathrm{A} + \vec{v}$ et $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \vec{w}$, alors

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{v} - \vec{w} \in \mathscr{F}.$$

(ii) Avec les notations vectorielles, on montre que si $x_0' \in \mathscr{F}$, $\mathscr{F} = x_0 + F = x_0' + F$.
- Si $x \in \mathscr{F}$, $x - x_0' = (x - x_0) - (x_0' - x_0) \in F$ car F est un espace vectoriel.
- La réciproque est vraie par symétrie.

□

Exemples

E1 – Points.

E2 – Hyperplans affines.
- Droite de $\mathbb{R}^2$: $\mathscr{D} : 2x + 3y = 5$
- Plan de $\mathbb{R}^3$: $\mathscr{P} : 2x + 3y + z = 6$

E3 – Droites de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Propriété

L'intersection de deux sous-espaces affines $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ de direction F et G est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

Démonstration

Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \varnothing$, soit $\mathrm{A} \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$. Alors $\mathscr{F} = A + \vec{F}$ et $\mathscr{G} = A + \vec{G}$

$$\mathrm{M} \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G} \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \in \vec{F} \cap \vec{G}$$

Comme $\vec{F} \cap \vec{G}$ est un espace vectoriel, on en déduit que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un sous-espace affine de direction $\vec{F} \cap \vec{G}$.

□

Définition : Parallélisme

Un sous-espaces affine $\mathscr{F}$ est dit **parallèle** à une autre sous-espace affine $\mathscr{G}$ lorsque $\vec{F} \subset \vec{G}$.

Remarque

Une droite peut être parallèle à un plan, mais pas l'inverse !

IV Solutions des problèmes linéaires

Définition : Problème linéaire

Un **problème linéaire** est un problème conduisant à une équation du type $u(x) = b$ où $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $b \in F$ un vecteur fixé, l'inconnue x étant un vecteur de E.

Propriété

L'ensemble des solution de cette équation est

- *soit vide (si $b \notin \operatorname{Im} u$)*
- *soit un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker} u$, donc de la forme*

$$x_0 + \operatorname{Ker} u$$

où x_0 est une solution particulière et $\operatorname{Ker} u$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $u(x) = 0_F$.

Démonstration

S'il y a une solution x_0, alors

$$u(x) = b = u(x_0) \iff u(x - x_0) = 0_F \iff x - x_0 \in \operatorname{Ker} u \iff x \in x_0 + \operatorname{Ker} u.$$

□

Exemples

E 1 – Équations différentielles linéaires

E 2 – Suites arithmético-géométriques.

E 3 – Systèmes linéaires.

E 4 – Interpolation de Lagrange $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{array} \right.$

Connaissant une solution P_0, l'ensemble des solutions est $P_0 + \operatorname{Ker} u$.

V Repères affines, coordonnées

On suppose ici que l'espace vectoriel E est de dimension finie.

Définition : Repère cartésien

On appelle **repère cartésien** d'un sous-espace affine $\mathscr{F}$, tout couple $(\Omega, \mathscr{B})$ où Ω est un point de $\mathscr{F}$ appelé **origine** et $\mathscr{B}$ une base de sa direction $\vec{F}$.

Propriété

Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de dimension p muni d'un repère $\mathscr{R} = (\Omega, \mathscr{B})$, avec $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$.
Pour tout point M de $\mathscr{F}$, il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ tel que

$$\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}} = x_1 \vec{e}_1 + \cdots + x_p \vec{e}_p$$

ie

$$\mathrm{M} = \Omega + x_1 \vec{e}_1 + \cdots + x_p \vec{e}_p$$

*Il s'agit des **coordonnées** de M dans le repère $\mathscr{R}$.*

Remarque

On a alors que $\mathscr{F} = \left\{ \Omega + x_1 \vec{e}_1 + \cdots + x_p \vec{e}_p \;\middle|\; (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \right\}$. On parle de **paramétrage** de $\mathscr{F}$.

Exemples

E1 – Pour une droite un seul vecteur directeur non nul $\vec{v}$:

$$\mathscr{D} = \mathrm{M}_0 + \mathrm{Vect}\,\vec{v} = \mathrm{M}_0 + \mathbb{K}\vec{v}$$

- En dimension 2 (exemple : $\mathbb{R}^2$ muni de son repère canonique), $\vec{v}(\alpha,\beta)$ et $\mathrm{M}_0(x_0,y_0)$. Paramétrage de $\mathscr{D}$:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{K}$. Résoudre en t pour avoir une équation de $\mathscr{D}$.

- En dimension 3 (exemple : $\mathbb{R}^3$ muni de son repère canonique), $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\mathrm{M}_0(x_0,y_0,z_0)$. Paramétrage de $\mathscr{D}$:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$. Résoudre en t pour avoir un système de deux équations de $\mathscr{D}$.

E2 – Pour un plan deux vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{v}, \vec{w}$:

$$\mathscr{D} = \mathrm{M}_0 + \mathrm{Vect}(\vec{v},\vec{w}) = \mathrm{M}_0 + \mathbb{K}\vec{v} + \mathbb{K}\vec{w}$$

En dimension 3 (exemple : $\mathbb{R}^3$ muni de son repère canonique), $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$, $\vec{w}(\alpha',\beta',\gamma')$ et $\mathrm{M}_0(x_0,y_0,z_0)$. Paramétrage de $\mathscr{P}$:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha + s\alpha' \\ y = y_0 + t\beta + s\beta' \\ z = z_0 + t\gamma + s\gamma' \end{cases}$$

avec $s, t \in \mathbb{K}$. Résoudre en s et t pour avoir une équation de $\mathscr{P}$.

VI Hyperplans affines d'un espace euclidien

Propriété

Tout hyperplan affine de E a, dans un repère $(\Omega,\mathscr{B})$, une équation du type

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

Démonstration

Sa direction $\vec{H}$ a une équation du type $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ dans $\mathscr{B}$.
Si $\mathrm{M}_0 \in \mathscr{H}$, avec des notations évidentes,

$$\mathrm{M} \in \mathscr{H} \iff \overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}} \in \vec{H} \iff a_1\left(x_1 - x_1^{(0)}\right) + \cdots + a_n\left(x_n - x_n^{(0)}\right) = 0 \iff a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = c$$

avec $c = a_1x_1^{(0)} + \cdots + a_nx_n^{(0)}$. $\square$

Remarque

Comme tout sous-espace vectoriel de dimension finie p en dimension n est l'intersection de $n-p$ hyperplans vectoriels indépendants, tout sous-espace affine de dimension finie p en dimension n peut s'écrire sous forme d'un système de $n-p$ équations linéaires indépendantes.

La direction s'obtient en annulant tous les seconds membres (équation homogène).

Définition : Vecteur normal

Soit $\mathscr{H} = \mathrm{A} + \vec{H}$ un hyperplan affine d'un espace euclidien E.
On appelle **vecteur normal** à $\mathscr{H}$, tout vecteur $\vec{n}$ de $\vec{H}^{\perp} \setminus \{0_E\}$.

Propriétés

(i) *Tous les vecteurs normaux de $\mathscr{H}$ sont colinéaires.*

(ii) *Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{H}$,*

$$\mathrm{M} \in \mathscr{H} \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \perp \vec{n}$$

Démonstration

$\vec{H} = (\operatorname{Vect} \vec{n})^{\perp}$. □

Corollaire

Soit $\mathscr{B}(e_1, \ldots, e_n)$ une ***base orthonormale*** *de E, $\mathscr{R} = (\mathrm{O}, \mathscr{B})$ un repère orthonormal.*
$\vec{n}(a_1, \ldots, a_n)$ est un vecteur normal de $\mathscr{H}$ si et seulement si $\mathscr{H}$ a une équation de la forme $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ dans $\mathscr{R}$.

Exemples

E 1 – Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, si $ax+by = c$ est une équation de $\mathscr{H}$ dans un repère orthonormal, alors $\vec{n}(a, b)$ est un vecteur normal à $\mathscr{H}$.

E 2 – Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, si $ax + by + cz = d$ est une équation de $\mathscr{H}$ dans un repère orthonormal, alors $\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal à $\mathscr{H}$.

Propriété : Distance à un hyperplan affine

Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan affine de E euclidien, A un point de $\mathscr{H}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathscr{H}$.

$$\mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathscr{H}) = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}.$$

Si $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ est une équation de $\mathscr{H}$ en repère orthonormal et si $\mathrm{M}(x_1, \ldots, x_n)$, alors

$$\mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathscr{H}) = \frac{|a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$

Démonstration

$\mathscr{H} = A + \vec{H}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathscr{H}) &= \inf_{\mathrm{N} \in \mathscr{H}} \left\|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\right\| = \inf_{\mathrm{N} \in \mathscr{H}} \left\|\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AN}}\right\| = \inf_{\vec{v} \in \vec{H}} \left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}} - \vec{v}\right\| = \mathrm{d}\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \vec{H}\right) \\ &= \left\|p_{\vec{H}^{\perp}}\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)\right\| = \left\|\frac{\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}\right\| = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}.\end{aligned}$$

Avec $\vec{n}(a_1, \ldots, a_n)$,

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = a_1\left(x_1 - x_1^{(0)}\right) + \cdots + a_n\left(x_n - x_n^{(0)}\right) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - b. \quad \square$$

Exemple

Déterminer les équations des bissectrices, dans un repère orthonormal du plan, de $\mathscr{D} : 3x+4y=7$ et $\mathscr{D}' : 5x-12y=-7$.

Propriété

Soient A *un point et* $\vec{n}$ *un vecteur non nul d'un espace euclidien.*

Les lignes de niveau de $\mathrm{M} \mapsto \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n}$, *c'est-à-dire les ensembles* $\mathscr{H}_k = \left\{ \mathrm{M} \mid \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = k \right\}$ *sont les hyperplans affines de vecteur normal* $\vec{n}$.

Démonstration

Dans un RON, $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = a_1 \left(x_1 - x_1^{(0)} \right) + \cdots + a_n \left(x_n - x_n^{(0)} \right) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n - b$.

Ou alors, si B est tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{n} = k$ (solution particulière, par exemple $B = A + \frac{k}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$), $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = k \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{BM}} \cdot \vec{n} = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{M} \in \mathrm{B} + \vec{n}^{\perp}$. $\square$