Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Extrait du programme officiel :
Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle (ou automorphisme orthogonal) : définition par la linéarité et la conservation des normes, caractérisation par la conservation du produit scalaire, caractérisation par l'image d'une base orthonormale.	
Symétrie orthogonale, réflexion.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$.
Matrices orthogonales	
Matrice orthogonale : définition ${}^tAA = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.	
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Lien entre les notions de base orthonormale, isométrie et matrice orthogonale.	
Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie. Matrice orthogonale positive, négative ; isométrie positive, négative.	
Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}(E)$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Isométries vectorielles en dimension 2	
Description des matrices orthogonales et orthogonales positives de taille 2.	Lien entre les éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et les nombres complexes de module 1.
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduira à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs. ⇆ SI : mécanique.
Classification des isométries d'un plan euclidien orienté.	

Table des matières

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés E, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels euclidiens.

I Isométries vectorielles d'un espace euclidien

1 Définition

Définition : Isométrie vectorielle

Soit $(E, | \,)$ un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
On appelle **isométrie vectorielle** (ou **automorphisme orthogonal**) de E tout endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ qui conserve la norme euclidienne, c'est-à-dire :

$$\forall\, x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

On note $\mathscr{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Propriété

Soit E un espace euclidien. Les isométries vectorielles de E sont des automorphismes. Autrement dit, $\mathscr{O}(E) \subset \mathscr{GL}(E)$.

Démonstration

Si $u \in \mathscr{O}(E)$ et $x \in \operatorname{Ker} u$, alors $\|x\| = \|u(x)\| = 0$, donc $x = 0_E$. u est ainsi un endomorphisme de E injectif avec E de dimension finie, donc bijectif. □

Remarques

R 1 – En particulier, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\mathrm{d}(u(x), u(y)) = \mathrm{d}(x, y)$: u conserve les distances.

R 2 – Pour être tout-à-fait précis, il faudrait noter $\mathscr{O}(E, | \,)$ cet ensemble, car les isométries ne sont pas les mêmes suivant le produit scalaire que l'on choisit.

R 3 – $\mathscr{O}(E) \neq \varnothing$, car on a toujours $\mathrm{id}_E \in \mathscr{O}(E)$.

R 4 – Une symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal, alors qu'une projection orthogonale non triviale ne l'est pas (si $F \neq E$ et $x \in F^\perp \setminus \{0\}$, $\|p_F(x)\| = 0 \neq \|x\|$ (p_F n'est pas injectif).) Attention donc au vocabulaire !

2 Caractérisations

Propriété

Soient $(E,|\,)$ un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est une isométrie vectorielle,

(ii) u conserve le produit scalaire : $\forall\, x, y \in E,\ \ (u(x)|u(y)) = (x|y)$,

(iii) u transforme TOUTE b.o.n. en une b.o.n.

(iv) u transforme UNE b.o.n. en une b.o.n.

Démonstration

On a déjà facilement $(ii) \Longrightarrow (i)$ et $(iii) \Longrightarrow (iv)$.

- $(i) \Longrightarrow (ii)$: Si u est une isométrie vectorielle, alors pour tout vecteurs x et y de E,
$$\begin{aligned}(u(x)|u(y)) &= \frac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \text{ (car } u \text{ conserve la norme)}\\ &= (x|y)\end{aligned}$$

- $(ii) \Longrightarrow (iii)$: On suppose que u conserve le produit scalaire.
Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E.
Alors $\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ (u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$, donc $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ est une famille orthonormale de E, et est constituée de n vecteurs (non nuls, car normés) en dimension n : c'est une base orthonormale de E.

- $(iv) \Longrightarrow (i)$: On suppose que u transforme une b.o.n. $(e_1,\dots,e_n)$ en une b.o.n. de E. Soit $x \in E$, alors $x = \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)e_i$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)^2$.
L'orthonormalité de la famille $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ nous donne de plus
$$\begin{aligned}\|u(x)\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^{n}(e_i|x)u(e_i)\right\|^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)^2\,\|u(ei)\|^2 \text{ (d'après le théorème de Pythagore)}\\ &= \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)^2 = \|x\|^2.\end{aligned}$$
u est donc bien une isométrie vectorielle. □

Remarques

R 1 – Un exercice classique consiste à montrer qu'une application qui conserve la norme et telle que $u(0_E) = 0_E$ est automatiquement linéaire (voir TD).

R 2 – Si u est une orthogonal, alors $\forall\, x, y \in E,\ \ (u(x)|y) = \left(x\,\middle|\,u^{-1}(y)\right)$.

Propriété

Soient E un espace euclidien, $u \in \mathscr{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.

$$u\left(F^{\perp}\right) = (u(F))^{\perp}.$$

Démonstration

Si $x \in u(F^{\perp})$, il existe $y \in F^{\perp}$ tel que $x = u(y)$.
Alors, pour tout $z \in F$, $(x|u(z)) = (u(y)|u(z)) = (y|z) = 0$ car $y \in F^{\perp}$.
Donc $u(F^{\perp}) \subset u(F)^{\perp}$, et on obtient l'égalité en regardant les dimension et en utilisant la bijectivité de u :

$$\dim u(F^{\perp}) = \dim F^{\perp} = \dim E - \dim F = \dim E - \dim u(F) = \dim u(F)^{\perp}. \quad \square$$

3 Structure

Propriété

L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries (automorphismes orthogonaux) de E est un groupe pour la loi $\circ$, appelé ***groupe orthogonal de*** *E.*

Démonstration

Comme $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E)$, on va en fait montrer que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$.

- Comme on l'a déjà vu, $id_E \in \mathcal{O}(E)$.
- Soit u et v deux isométries vectorielles. Montrons que $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.
  $u \circ v^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ et si $x \in E$, $\|u \circ v^{-1}(x)\| = \|v^{-1}(x)\|$ car u est une isométrie vectorielle.
  Mais comme v est aussi une isométrie, $\|x\| = \|v(v^{-1}(x))\| = \|v^{-1}(x)\|$.
  Finalement, pour tout $x \in E$, $\|u \circ v^{-1}(x)\| = \|x\|$, et $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$. $\square$

II MATRICES ORTHOGONALES

1 Définition

Définition : Matrice orthogonale

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est dite ***orthogonale*** si et seulement si $A^{\top} A = I_n$.
On note $\mathcal{O}(n)$ ou $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2 Caractérisations

Propriété

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $A \in \mathcal{O}(n)$

(ii) *A est inversible et $A^{-1} = A^{\top}$*

(iii) $AA^{\top} = I_n$

(iv) $A^{\top} \in \mathcal{O}(n)$

(v) *Les colonnes de A forment une famille orthonormale pour le produit scalaire usuel*

(vi) *Les lignes de A forment une famille orthonormale pour le produit scalaire usuel*

Démonstration

- $(i) \iff (ii) \iff (iii) \iff (iv)$: Facile.
- $(i) \iff (v)$: pour tout (i,j), $\left(A^\mathsf{T} A\right)_{i,j} = C_i^\mathsf{T} C_j = (C_i|C_j)$ donne immédiatement l'équivalence.
- $(iv) \iff (vi)$ s'obtient en transposant. □

Remarque

⚠ La matrice est ortho**GON**ale si et seulement si ses colonnes sont ortho**NOR**males.

Exemple

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/6 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$$

$(C_1|C_2) = \sqrt{2}/2\sqrt{3}/3 - \sqrt{2}/2\sqrt{3}/3 = 0$.
$(C_2|C_3) = -\sqrt{3}/3\sqrt{6}/6 + \sqrt{3}/3\sqrt{6}/3 - \sqrt{3}/3\sqrt{6}/6 = 0$.
$(C_1|C_3) = -\sqrt{2}/2\sqrt{6}/6 + \sqrt{2}/2\sqrt{6}/6 = 0$.
$\|C_1\|^2 = \left(\sqrt{2}/2\right)^2 + \left(\sqrt{2}/2\right)^2 = 1/2 + 1/2 = 1$.
$\|C_2\|^2 = \left(\sqrt{3}/3\right)^2 + \left(\sqrt{3}/3\right)^2 + \left(\sqrt{3}/3\right)^2 = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$.
$\|C_3\|^2 = \left(\sqrt{6}/6\right)^2 + \left(\sqrt{6}/3\right)^2 + \left(\sqrt{6}/6\right)^2 = 1/6 + 4/6 + 1/6 = 1$.
Donc $M \in \mathcal{O}(3)$.

3 Lien avec les isométries

Propriété

Soit E un espace euclidien. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $u \in \mathcal{O}(E)$

(ii) Dans TOUTE b.o.n., la matrice de u est orthogonale

(iii) Il existe UNE b.o.n. dans laquelle la matrice de u est orthogonale

Démonstration

Rappelons que si A est la matrice de u dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, alors pour tout (i,j), $a_{i,j} = (e_i|u(e_j))$.

- $(i) \Longrightarrow (ii)$: Si $u \in \mathcal{O}(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormale de E, $u(\mathcal{B})$ est encore une base orthonormale et pour tout (i,j),
$$\left(A^\mathsf{T}\right)_{i,j} = a_{j,i} = (e_j|u(e_i)) = (u^{-1}(e_j)|e_i) = \left(A^{-1}\right)_{i,j}$$
Donc $A^{-1} = A^\mathsf{T}$: A est orthogonale.
Autre justification possible : A est la matrice de passage de la b.o.n. $\mathcal{B}$ à la b.o.n. $u(\mathcal{B})$.
- $(ii) \Longrightarrow (iii)$: évident.
- $(iii) \Longrightarrow (i)$: S'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice A de u est orthogonale, alors
$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|^2 = X^\mathsf{T} A^\mathsf{T} A X = X^\mathsf{T} X = \|x\|^2$$
donc u est une isométrie. □

Remarque

- Si A est la matrice dans une b.o.n. de $u \in \mathcal{O}(E)$, alors la matrice de u^{-1} dans cette même base est $A^{-1} = A^\mathsf{T}$.
- Être représenté par une matrice orthogonale en base *orthogonale* seulement ne suffit pas : dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit

scalaire usuel et de sa base canonique (e_1, e_2), l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1, 2e_2)$ n'est pas orthogonal (il ne conserve pas la norme !) bien que A soit une matrice orthogonale.

4 Structure

Propriété

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathcal{O}(n), \times)$ est un groupe appelé ***groupe orthogonal d'ordre*** *n. C'est même un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration

On montre facilement que $I_n \in \mathcal{O}(n)$, et si $M, N \in \mathcal{O}(n)$, $MN^{-1} = MN^\top \in \mathcal{O}(n)$ (car $(MN^\top)^\top MN^\top = (N^\top)^\top M^\top MN^\top = N(M^\top M)N^\top = NI_nN^\top = NN^\top = I_n$). □

Remarque

On a un isomorphisme de groupes, si $\mathcal{B}$ est une b.o.n. de l'espace euclidien E de dimension n

$$\begin{array}{|ccc} (\mathcal{O}(E), \circ) & \longrightarrow & (\mathcal{O}(n), \times) \\ u & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$$

5 Matrices de passage orthogonales et changement de base orthonormale

Propriété

Soient, dans un espace euclidien E, $\mathcal{B}$ une b.o.n., $\mathcal{B}'$ une base de E et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
$\mathcal{B}'$ est une b.o.n. de E si et seulement si P est orthogonale.

Démonstration

Soit u l'endomorphisme de E représenté par la matrice P dans la base $\mathcal{B}$.
Alors $u(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$: si $\mathcal{B}'$ est un b.o.n., on a déjà vu que $P^{-1} = P^\top$, et on le retrouve en remarquant que u transforme une b.o.n. en b.o.n. donc est orthogonal donc P est une matrice orthogonale, et réciproquement, si P est orthogonale, u l'est et l'image $\mathcal{B}'$ de la b.o.n. $\mathcal{B}$ par u est une b.o.n. □

Remarque

Rappel : Changement de b.o.n. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux b.o.n. de E euclidien, $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = P^\top \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) P$$

6 Isométries positives et négatives

Propriété

Les applications et les matrices orthogonales sont de déterminant ± 1*.* ***La réciproque est fausse.***

Démonstration

$\det(A^\intercal A) = 1$.

Contre exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. □

Définition : Groupe spécial orthogonal

On appelle **groupe spécial orthogonal d'ordre** $n \in \mathbb{N}^*$, noté $\mathscr{SO}(n)$ ou $\mathscr{SO}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant positif $(+1)$, dites **matrices orthogonales positives**. Il est parfois noté $\mathscr{O}^+(n)$.

Les matrices orthogonales de déterminant négatif sont appelées **matrices orthogonales négatives.** Les ensemble est $\mathscr{O}^-(n)$.

Définition : Rotations

Si E espace euclidien, on appelle **groupe spécial orthogonal de** E, noté $\mathscr{SO}(E)$ le groupe des isométries de E de déterminant positif $(+1)$, appelées **isométries positives** ou **rotations de** E. Il est parfois noté $\mathscr{O}^+(E)$. On parle aussi d'**isométries directes.**

Les isométries de déterminant négatif sont appelées **isométries négatives** ou **indirectes**.

Démonstration

(groupe) noyau du déterminant. □

Remarque

Attention, il ne suffit pas d'être de déterminant 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice de rotation.

Propriété

Soit E euclidien orienté, $u \in \mathscr{L}(E)$. Sont équivalentes :

(i) *u isométrie directe (rotation) de E.*

(ii) *u transforme toute bond en bond.*

(iii) *u transforme une bond en bond.*

Démonstration

$(i) \Rightarrow (ii)$: u transforme une bond $\mathscr{B}$ en bon car orthogonal. Puis $\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) > 0$.
$(iii) \Rightarrow (i)$: u orthogonale et $\det u = \det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) > 0$. □

Propriété

Toute réflexion d'un espace euclidien orienté est une isométrie indirecte.

III Isométries vectorielles du plan

1 Matrices orthogonales

Propriété : Description de $\mathcal{O}(2)$

$\mathcal{O}(2) = \mathcal{SO}(2) \sqcup \mathcal{O}^-(2)$ *avec*

$$\mathcal{SO}(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

et

$$\mathcal{O}^-(2) = \left\{ S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarque

L'écriture est de plus unique si on suppose en outre $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Démonstration

Les matrices R_θ et S_θ appartiennent bien à ces ensembles.

Réciproquement, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est orthogonale alors $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$. On peut donc trouver θ, ϕ tels que $a = \cos\theta$, $c = \sin\theta$, $b = \sin\phi$ et $d = \cos\phi$.

Mais comme $ab + cd = 0$, $\sin(\theta+\phi) = 0$ donc $\phi \equiv -\theta\ [\pi]$. Il vient deux cas possibles :

- Soit $\phi \equiv -\theta\ [2\pi]$ et $A = R_\theta$,
- Soit $\phi \equiv \pi - \theta\ [2\pi]$ et $A = S_\theta$. □

Propriété : Écriture complexe d'une isométrie vectorielle

$\mathbb{C}$ étant vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de base canonique $(1, \mathrm{i})$,

- *L'écriture complexe d'une isométrie directe, de matrice dans la base canonique R_θ est $z' = \mathrm{e}^{i\theta} z$,*
- *L'écriture complexe d'une isométrie indirecte, de matrice dans la base canonique S_θ est $z' = \mathrm{e}^{i\theta}\overline{z}$.*

Démonstration

- $z' = (\cos\theta x - \sin\theta y) + \mathrm{i}(\sin\theta x + \cos\theta y) = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(x + \mathrm{i}y)$.
- $z' = (\cos\theta x + \sin\theta y) + \mathrm{i}(\sin\theta x - \cos\theta y) = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(x - \mathrm{i}y)$. □

Corollaire

Soit $\theta, \phi \in \mathbb{R}$

(i) $R_\theta = R_\phi \iff \theta \equiv \phi \ [2\pi]$.
(ii) $R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$.
(iii) $\mathscr{SO}(2)$ *est un groupe abélien.*
(iv) $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.
(v) $\forall k \in \mathbb{Z},\ \ R_\theta^k = R_{k\theta}$
(vi) $S_\theta^2 = I_2$
(vii) $S_\theta \circ S_\phi = R_{\theta-\phi}$
(viii) $S_\theta \circ R_\phi = S_{\theta-\phi}$
(ix) $R_\theta \circ S_\phi = S_{\theta+\phi}$

2 Rotations du plan orienté

Propriété

Soit E euclidien orienté de dimension 2. $r \in \mathscr{SO}(E)$.

Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormale directe, la matrice de r soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On dit que r est la ***rotation vectorielle d'angle de mesure θ.***

Démonstration

Si R_θ et R_ϕ sont des matrices de r en base orthonormale, alors on a $P \in \mathscr{SO}(2)$ tel que $R_\theta = PR_\phi P^{-1}$. Comme $\mathscr{SO}(2)$ est commutatif, $R_\theta = R_\phi$. □

Propriété

Soit $\vec{x}, \vec{y}$ deux vecteurs non nuls de E. Il existe une unique rotation vectorielle transformant $\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ *et* $\dfrac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$.

Démonstration

Il suffit de passer par les complexes dans une bond. □

Définition : Angle orienté

On appelle **angle orienté** des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ non nuls de E euclidien orienté de dimension 2, l'angle de cette rotation, noté $\widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$. Cela revient à se donner un nombre réel modulo 2π.

Propriété

Soient $\vec{x}, \vec{y}, , \vec{z}$ des vecteurs non nuls de E euclidien orienté de dimension 2 (Attention, les opération sont définies modulo 2π).

(i) $\widehat{(\vec{x}, \vec{x})} \equiv 0 \ [2\pi]$.
(ii) $\widehat{(\vec{x}, -\vec{x})} \equiv \pi \ [2\pi]$.
(iii) ***Relation de Chasles*** *:* $\widehat{(\vec{x}, \vec{y})} = \widehat{(\vec{x}, \vec{z})} + \widehat{(\vec{z}, \vec{y})}$
(iv) $\widehat{(\vec{y}, \vec{x})} = -\widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$.
(v) $\widehat{(-\vec{x}, \vec{y})} = \widehat{(\vec{x}, \vec{y})} + \pi$.
(vi) $\widehat{(-\vec{x}, -\vec{y})} = \widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$.
(vii) $(\vec{x}|\vec{y}) = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos\widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$.
(viii) $[\vec{x}, \vec{y}] = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin\widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$.

Propriété

Les isométries directes conservent les angles orientés tandis que les isométries indirectes les changent en leur opposé.

Démonstration

Avec les complexes ou avec le produit scalaire et le produit mixte. □

3 Classifications des isométries du plan

Propriété : Isométries du plan

Soit E euclidien orienté de dimension 2.

- *Les isométries directes sont les rotations vectorielles d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$, de matrice dans tout base orthonormale directe*
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
et d'écriture complexe dans une telle base $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$.
- *Les isométries indirectes sont les réflexions. Dans une base orthonormale directe, la matrice d'une telle application est*
$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$
où θ dépend de la base, son écriture complexe est $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\overline{z}$ et son axe est dirigé par le vecteur d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$ dans cette base.

Démonstration

- $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$ s'interprète comme une rotation vectorielle.
- $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\overline{z}$ est une involution donc une symétrie vectorielle.
$$z' = z \iff \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} z \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$$
et
$$z' = -z \iff \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta/2+\pi/2)} = \left(\mathbb{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\right)^\perp$$
Donc il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à la droite (donc réflexion) dirigée par $(\cos\theta/2, \sin\theta/2)$. □

Remarque

Une rotation est la composée de deux réflexions d'axes distincts.