Espaces Préhilbertiens Réels

Extrait du programme officiel :

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :
- *généraliser cette notion et exploiter, principalement à travers l'étude des projections orthogonales, l'intuition acquise dans des situations géométriques en dimension 2 ou 3 pour traiter des problèmes posés dans un contexte plus abstrait ;*
- *approfondir l'étude de la géométrie euclidienne du plan, notamment à travers l'étude des isométries vectorielles.*

Le cours doit être illustré par de nombreuses figures. Dans toute la suite, E est un espace vectoriel réel.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit scalaire	
Produit scalaire.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$.
Espace préhilbertien, espace euclidien. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire $(f\|g) = \int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.	
b) Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	Exemples : sommes finies, intégrales.
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
Formule de polarisation : $2\langle x, y\rangle = \\|x+y\\|^2 - \\|x\\|^2 - \\|y\\|^2$.	
c) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.	Notation $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
Famille orthogonale, orthonormale (ou orthonormée).	
Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.	
Théorème de Pythagore.	
Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.	
d) Bases orthonormales	
Existence de bases orthonormales dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormale incomplète.	
Coordonnées dans une base orthonormale, expressions du produit scalaire et de la norme.	⇆ PC et SI : mécanique et électricité.
Produit mixte dans un espace euclidien orienté.	Notation $[x_1,\dots,x_n]$. Interprétation géométrique en termes de volume orienté, effet d'une application linéaire.
e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.	En dimension finie, dimension de l'orthogonal.
Projection orthogonale. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.	
Distance d'un vecteur à un sous-espace. Le projeté orthogonal de x sur V est l'unique élément de V qui minimise la distance de x à V.	Notation $d(x,V)$.

Table des matières

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés E, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

I PRODUIT SCALAIRE ET NORME EUCLIDIENNE

1 Définition d'un produit scalaire

Définition : Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On appelle **produit scalaire sur** E toute *forme bilinéaire symétrique définie-positive*.
C'est-à-dire toute application $\varphi \colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

(i) **Bilinéarité** :
$$\begin{cases} \textbf{Linéarité à gauche :} \\ \text{Pour tout } y \in E, \text{ l'application } x \mapsto \varphi(x,y) \text{ est linéaire :} \\ \forall\,(x_1,x_2,y) \in E^3,\ \ \forall\,\lambda \in \mathbb{R},\ \ \varphi(x_1+\lambda x_2, y) = \varphi(x_1,y) + \lambda\varphi(x_2,y). \\ \textbf{Linéarité à droite :} \\ \text{Pour tout } x \in E, \text{ l'application } y \mapsto \varphi(x,y) \text{ est linéaire :} \\ \forall\,(x,y_1,y_2) \in E^3,\ \ \forall\,\lambda \in \mathbb{R},\ \ \varphi(x, y_1+\lambda y_2) = \varphi(x,y_1) + \lambda\varphi(x,y_2). \end{cases}$$

(ii) **Symétrie** : $\forall\,(x,y) \in E^2,\ \ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

(iii) **Définie-positivité** :
$$\begin{cases} \textbf{Positivité :} \\ \forall\,x \in E,\ \ \varphi(x,x) \geqslant 0\,; \\ \textbf{Caractère défini :} \\ \forall\,x \in E,\ \ \varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0. \end{cases}$$

Remarques

R 1 – Dans la pratique on commence par montrer la symétrie, et alors la linéarité à droite découle de la linéarité à gauche et vice versa : il suffit de ne montrer que l'une ou l'autre.

R 2 – La définie-positivité se résume par $\forall\,x \neq 0,\ \ \varphi(x,x) > 0$

Définition : Espace préhilbertien réel, espace euclidien

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et si φ un produit scalaire sur E, on dit que (E,φ) est un **espace préhilbertien réel**.

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel *de dimension finie*, et si φ un produit scalaire sur E, on dit que (E,φ) est un **espace euclidien**.

Remarques

R 1 – Un espace euclidien est donc un espace préhilbertien réel de dimension finie.

R 2 – On note en général $(x|y)$ ou $\langle x|y\rangle$ ou $\langle x,y\rangle$ ou $x\cdot y$ à la place de $\varphi(x,y)$.

R 3 – $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} \forall\,x,\ \ (x|\cdot) & \\ \forall\,y,\ \ (\cdot|y) & \text{linéaires}\,; \\ (x,y) \mapsto (x|y) & \text{symétrique}\,; \\ \forall\,x \in E,\ \ (x|x) \geqslant 0 & \\ (x|x) = 0 \Longrightarrow x = 0 & \end{cases}$$

2 Exemples

a Sur $\mathbb{R}^n$

Définition - Propriété : Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Pour des vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, avec $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on définit $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathbb{R}^n$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathbb{R}^n$.

Remarques

R 1 – **Important** : Si X et Y désignent les matrices colonnes des composantes de x et de y dans la base canonique, on remarque que $(x|y) = X^\intercal \times Y$.

R 2 – Dans $\mathbb{R}^2$, $(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$, dans $\mathbb{R}^3$, $(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

Démonstration

(i) $(\cdot|\cdot)$ est *symétrique* par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$.

(ii) *Linéarité à gauche* : $\forall\, x, x', y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(x + \lambda x'|y) &= \sum_{i=1}^{n} (x + \lambda x')_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda x'_i) y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i \\ &= (x|y) + \lambda (x'|y).\end{aligned}$$

La *linéarité à droite* en découle par symétrie.

(iii) *Définie-positivité*

- $\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad (x|x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant 0$
- $(x|x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow \forall\, i, \quad x_i = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}$

□

b Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Définition - Propriété : Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Pour des vecteurs A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $(A|B) = \mathrm{tr}(A^\intercal \times B)$.
$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque

Il s'agit en fait de l'écriture matricielle du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n^2}$.

Démonstration

$$\operatorname{tr}(A^\top \times B) = \sum_{i=1}^{n} (A^\top \times B)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j} b_{i,j}.$$

□

c Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

Définition - Propriété

Pour des fonctions f et g de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ où $a<b$, on définit

$$(f|g) = \int_a^b fg$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ un espace préhilbertien réel : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

Démonstration

(i) $(\cdot|\cdot)$ est *symétrique* par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$.

(ii) *Linéarité à gauche* : $\forall\, f,\tilde{f},g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})\,,\ \ \forall\,\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(f+\lambda\tilde{f}|g) &= \int_a^b (f+\lambda\tilde{f})g \\ &= \int_a^b (fg+\lambda\tilde{f}g) \\ &= \int_a^b fg + \lambda\int_a^b \tilde{f}g \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= (f|g)+\lambda(\tilde{f}|g).\end{aligned}$$

La *linéarité à droite* en découle par symétrie.

(iii) *Définie-positivité*

- $\forall\, f\in\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})\,,\ (f|f) = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ (par positivité de l'intégrale et comme $a<b$)
- $$\begin{aligned}(f|f)=0 &\iff \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0 \\ &\iff f^2\equiv 0 \text{ (car } f^2 \text{ est une fonction continue et positive)} \\ &\iff f\equiv 0\end{aligned}$$

□

3 Norme euclidienne[1]

a Définition

Définition : Norme euclidienne

Soit $(E, |\,)$ un espace préhilbertien réel.
Pour tout vecteur x de E, on pose $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.
L'application $\|\cdot\|$ est appelée **norme euclidienne** sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

Remarque

La positivité du produit scalaire rend cette définition licite.

Exemples

E1 – Sur $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. En particulier, sur $\mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$.

E2 – Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^\intercal \times A)}$.

E3 – Sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}$.

b Identités remarquables et polarisation

Propriété : Identités remarquables

Soit E un espace préhilbertien réel et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire.
Pour tous vecteurs x et y de E,

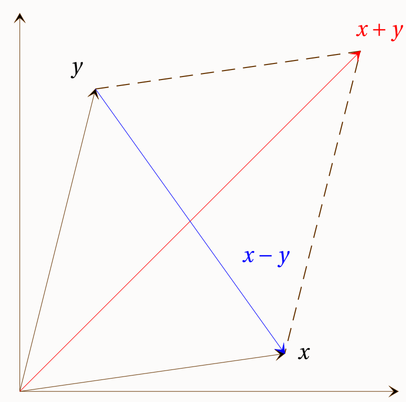
(i) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$

(ii) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2$

(iii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ *(Identité du parallélogramme)*

1. 
Euclide d'Alexandrie (vers -325 - Alexandrie vers -265) est un mathématicien grec. Peu de choses sont connues sur la vie d'Euclide. Il est l'auteur des *Éléments*, traités de géométrie considérés comme l'un des textes fondateurs des mathématiques modernes. Les résultats y sont démontrés avec une rigueur remarquable. Euclide donne des postulats à la base de la géométrie dite euclidienne de nos jours dont le 5ème particulièrement célèbre : par un point passe une et une seule parralèle à une droite fixée. On a longtemps pensé que ce postulat était en fait une conséquence des autres axiomes, jusqu'à ce qu'on construise, au XIXème siècle, une géométrie ne vérifiant pas ce postulat.

Remarque : Illustration géométrique de cette dernière identité



Propriété : Identités de polarisation

Soit $(E, |\ )$ un espace préhilbertien réel et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire.
Pour tous vecteurs x et y de E,

(i) $(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ *(ii)* $(x|y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$

c Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème : Inégalité de Cauchy[1]-Schwarz[2]

Soit $(E, |\ )$ un espace préhilbertien réel.
Alors

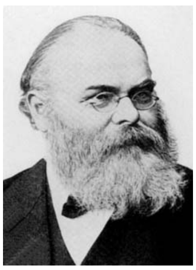
$$\forall\, x, y \in E,\quad (x|y)^2 \leqslant (x|x)(y|y),$$

ou encore,

$$\forall\, x, y \in E,\quad \left|(x|y)\right| \leqslant \|x\|\,\|y\|,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés (i.e. $y = 0$ ou $\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\quad x = \lambda y$)

1.  **Augustin-Louis Cauchy** (Baron) (Paris, 1789 - Sceaux (Hauts-de-Seine), 1857) est le mathématicien français le plus prolifique (presque 800 articles publiés). Il enseigne à l'École Polytechnique, le premier cours d'analyse rigoureux ne se basant plus simplement sur l'intuition (limites, continuité, etc.). Ses travaux sur les permutations furent précurseurs de la théorie des groupes. Ses autres contributions comprennent des recherches sur la convergence et la divergence des séries infinies, les équations différentielles, les déterminants, les probabilités, l'analyse complexe et la physique mathématique.

2.  **Hermann Amandus Schwarz** (Hermsdorf, en Silésie (aujourd'hui la ville de Jerzmanowa, en Pologne), 1843 - Berlin, 1921) est un mathématicien allemand, élève de Weierstrass. Ses travaux sont marqués par une forte interaction entre l'analyse et la géométrie. Il a travaillé sur des sujets allant de la théorie des fonctions à la géométrie différentielle en passant par le calcul des variations (surface minimales, problème isopérimétrique). On connaît bien l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème de Schwarz sur les dérivées partielles.

Remarque

L'inégalité est encore valable pour une forme bilinéaire symétrique seulement positive, mais le cas d'égalité n'est plus valable. C'est le cas par exemple de la covariance.

Démonstration

Soit λ un nombre réel. On pose $P(\lambda) = \left(x+\lambda y | x+\lambda y\right)$: on a que $P(\lambda) \geqslant 0$ par positivité.
Or

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (x|x) + \lambda(x|y) + \lambda(y|x) + \lambda^2(y|y) \\ &= (x|x) + 2\lambda(x|y) + \lambda^2(y|y) \end{aligned}$$

C'est un polynôme de degré au plus 2 à coefficients réels.

Cas 1 : Si $(y|y) = 0$, alors on doit avoir, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x|x)+2\lambda(x|y) \geqslant 0$, ce qui n'est possible que si $(x|y) = 0$ et l'inégalité est vraie.

Cas 2 : Sinon, le polynôme en λ est de degré 2 de signe constant donc son discriminant réduit est négatif

$$\Delta' = (x|y)^2 - (x|x)(y|y) \leqslant 0$$

et on obtient l'inégalité recherchée.

Cas d'égalité :

Si $y = 0$, il y a égalité.

Si $y \neq 0$, il y a égalité si et seulement si $P(\lambda)$ admet une racine (double) si et seulement si $\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \left(x+\lambda y | x+\lambda y\right) = 0$, ce qui équivaut à $\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \ x+\lambda y = 0$ et donc x et y sont liés. □

Exemples

E1 – Sur $\mathbb{R}^n$, $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} x_i^2 \sum\limits_{k=1}^{n} y_i^2$.

E2 – Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$.

d Inégalité triangulaire

Propriété : Inégalité de Minkowski[1]

Soit $(E,|\,)$ un espace préhilbertien réel, de norme euclidienne associée $\|\cdot\|$. Alors

$$\forall\, x, y \in E,\quad \left\|x+y\right\| \leqslant \|x\| + \left\|y\right\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont positivement liés (i.e. $y = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \,/\, x = \lambda y$)

1. 

Hermann Minkowski (Russie, aujourd'hui Lituanie, 1864 - Allemagne, 1909) est un mathématicien et physicien théoricien allemand. Il développe une nouvelle vision de l'espace et du temps comme un espace non euclidien de dimension 4, posant ainsi les fondements de la future théorie de la relativité. Il crée également une nouvelle branche des mathématiques : la géométrie des nombres, qui prouve des résultats d'arithmétique avec des outils géométriques. Il meurt agé de 44 ans seulement d'une crise d'appendicite.

Corollaire

Soit $(E, |\,)$ un espace préhilbertien réel, de norme euclidienne associée $\|\cdot\|$. Alors

$$\forall\, x, y \in E, \quad \Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Démonstration

Soient x et y des vecteurs de E.
Il est plus pratique de travailler avec le carré des normes :

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (x+y|x+y) \\
&= (x|x) + 2(x|y) + (y|y) \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y) \\
&\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| \quad \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leqslant (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

Cas d'égalité : Il y a égalité ssi $(x|y) = |(x|y)| = \|x\|\,\|y\|$
Donc si et seulement si soit $y = 0$, soit il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$ (cas d'égalité de Cauchy-Schwarz) et $(x|y) = |(x|y)|$, ce qui devient, si $x = \lambda y$, $\lambda(x|x) = |\lambda|\,(x|x)$ donc $\lambda = |\lambda|$ et $\lambda \geqslant 0$.

Pour l'autre inégalité, on écrit que $\|(x+y) - y\| \leqslant \|x+y\| + \|-y\|$ donc $\|x+y\| \geqslant \|x\| - \|y\|$, puis on échange les rôles de x et y.. □

e Norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Définition : Norme

On appelle **norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel** E, toute application $N \colon E \to \mathbb{R}_+$ telle que

(i) $\forall\, x \in E, \quad N(x) \geqslant 0$

(ii) $\forall\, x \in E, \quad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

(iii) $\forall\, x \in E, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$ (Homogénéité)

(iv) $\forall\, x, y \in E, \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ (Inégalité triangulaire)

Exemple

C'est le cas de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ et du module sur $\mathbb{C}$.

Propriété

La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur E.

Démonstration

Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\|x\| = \sqrt{(x|x)} \geqslant 0$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
- $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x|x)} = |\lambda|\,\|x\|$
- Inégalité triangulaire : c'est l'inégalité de Minkowski démontrée ci-dessus.

□

Remarque

Il existe d'autre normes qui ne sont pas issues de produit scalaire. Par exemple, dans $\mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i| \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty=\sup_{i\in[\![1,n]\!]}|x_i|$$

ou sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$,

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty=\sup_{t\in[a,b]}|f(t)|.$$

La norme euclidienne est en général notée $\|\cdot\|_2$.

Définition : Vecteur normé

Un vecteur x d'un espace préhilbertien E est dit **normé**, ou **unitaire** si $\|x\|=1$.

Remarque

Si x est un vecteur non nul, alors $\dfrac{x}{\|x\|}$ est unitaire, de même sens et de même direction.

Définition : Distance euclidienne et écart angulaire

Étant donné des vecteurs x et y d'un espace préhilbertien réel E, on définit :

- la **distance euclidienne** $\mathrm{d}(x,y)$ par $\mathrm{d}(x,y)=\|x-y\|$,
- si x et y sont non nuls, l'**écart angulaire** θ est le réel défini par

$$\theta\in[0,\pi] \ \text{ et } \ \cos\theta=\frac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Remarques

R 1 – La bonne définition provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

R 2 – Autrement dit, $(x|y)=\|x\|\,\|y\|\cos\theta$.

Définition : Distance à une partie non vide

Si A est une partie non vide de E préhilbertien réel, et $x\in E$, on définit la distance de x à A par

$$\mathrm{d}(x,A)=\inf_{y\in A}\big(\mathrm{d}(x,y)\big)=\inf_{y\in A}\|x-y\|.$$

Remarque

La borne inférieure existe toujours car $\mathscr{E}_x=\left\{\|x-y\| \ ; \ y\in A\right\}$ est non vide (car A l'est) et minoré (par 0).

II ORTHOGONALITÉ

1 Vecteurs orthogonaux

Définition : Vecteurs orthogonaux

Soit $(E, |\,)$ un espace préhilbertien réel, x et y des vecteurs de E.
x et y sont dit **orthogonaux** si et seulement si $(x|y) = 0$. On écrit parfois $x \perp y$.

Remarques

R 1 – 0_E est orthogonal à tout vecteur.

R 2 – La notion d'orthogonalité ne prend de sens qu'en dimension au moins 2.

Théorème : Théorème de Pythagore

Soit $(E, |\,)$ un espace préhilbertien réel, x et y des vecteurs de E.

$$(x|y) = 0 \Leftrightarrow x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Démonstration

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$ □

Remarque

Cela permet bien de retrouver le théorème de Pythagore tel qu'on le connaît.

2 Famille orthonormale

Définition : Familles orthogonale et orthonormale

Soit E un espace préhilbertien réel, $(v_1, \dots, v_p) \in E^p$.
$(v_1, \dots, v_p)$ est une **famille orthogonale** de E si et seulement si

$$\forall\, i, j \in [\![1, p]\!], \text{ avec } i \neq j, \ \ (v_i|v_j) = 0 \quad (\text{ie } v_i \perp v_j).$$

$(v_1, \dots, v_p)$ est une **famille orthonormale** de E si et seulement si

$$\forall\, i, j \in [\![1, p]\!], \ \ (v_i|v_j) = \delta_{i,j}$$

Exemple

Soit, sur $\mathbb{R}^n$, les vecteurs $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ de la base canonique.
Alors si $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, $(e_i|e_j) = 0$.
Si $i = j$, $(e_i|e_i) = 1$.
On dira que $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une **base orthonormale** de $\mathbb{R}^n$.

Propriété

Toute famille orthogonale *de vecteurs* non nuls *(en particulier toute famille orthonormale) d'un espace préhilbertien réel est libre.*

Remarque

C'est un moyen pratique et usuel pour montrer qu'une famille est libre !

Démonstration

Soit $(v_1,\dots,v_p)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien E.
But : $(v_1,\dots,v_p)$ est libre.
Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$.

Alors, si $i \in [\![1,p]\!]$, $(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p | v_i) = \begin{cases} (0_E|v_i) = 0_{\mathbb{R}} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (v_j|v_i) = \lambda_i \|v_i\|^2 \end{cases}$. Or $v_i \neq 0_E$, donc $\lambda_i = 0$. □

Corollaire

Si E est un espace euclidien de dimension n, il n'existe pas de famille orthogonale de plus de n vecteurs non nuls.

Théorème : Théorème de Pythagore

Soit, dans un espace préhilbertien réel E, une famille orthogonale $(v_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$. On a

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2$$

Attention : la réciproque n'est vraie que pour $p = 2$.

Démonstration

Par récurrence sur p.
Contre-exemple : la famille $\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{-1}\}$ n'est pas orthogonale (et pour cause, il y 3 vecteurs non nuls en dimension 2 !) et vérifie pourtant la propriété de Pythagore. □

3 Ensembles orthogonaux

Définition : Parties orthogonales

Soient $(E, |\ )$ un espace préhilbertien réel et A, B des parties non vides de E.
On dit que A est ***orthogonale*** à B si et seulement si $\forall\,(a,b) \in A\times B,\quad (a|b) = 0$. On note $A \perp B$.

Exemples

E1 – Tout ensemble non vide est orthogonal à $\{0_E\}$.

E2 – Soient $A = \mathbb{R}(1,1,0)$ et $B = \mathbb{R}(1,-1,0) + \mathbb{R}(0,0,1)$. Alors A est orthogonale à B.
En effet, $\forall\, a,b,c \in \mathbb{R},\quad (a,a,0)|(b,-b,c) = ab - ab = 0$.

Propriété

Si $A, B \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ sont orthogonales, alors $A \cap B = \varnothing$ ou $A \cap B = \{0_E\}$.

Démonstration

Si $A \cap B \neq \varnothing$, soit $x \in A \cap B$. Alors $(x|x) = 0$, donc $x = 0$. □

Remarque

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E orthogonaux, alors $F \cap G = \{0_E\}$: leur somme est directe.

Exemple

Parties de $\mathbb{R}^3$ orthogonales d'intersection vide : $A = \mathbb{R}(0,0,1)$ et $B = (0,1,0) + \mathbb{R}(1,0,0)$.

4 Orthogonal d'une partie

Définition : Orthogonal d'une partie

Soient $(E, |\,)$ un espace préhilbertien réel, et A une partie non vide de E. On définit l'**orthogonal de** A comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de A :

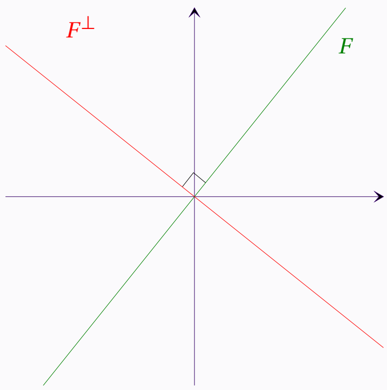
$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall\, y \in A,\quad (x|y) = 0\}$$

$$x \in A^\perp \iff x \in E \text{ et } \forall\, y \in A,\quad (x|y) = 0$$

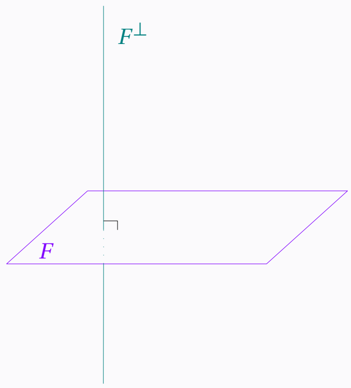
(Il est parfois noté $A°$). Il s'agit de la plus grande partie de E (pour l'inclusion) orthogonale à A.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$:



Dans $\mathbb{R}^3$:



Propriété

Soient $(E, |\,)$ préhilbertien réel, et A, B des parties non vides de E.
Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.

Démonstration

Facile. □

Propriété

Soient $(E, |\,)$ préhilbertien réel, et A une partie non vide de E.
$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
De plus, $A^\perp = (\operatorname{Vect} A)^\perp$.

Démonstration

- $0_E \in A^\perp$,
- $\forall\, x, x' \in A^\perp,\ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \ \lambda x + x' \in A^\perp$, car $\forall\, y \in A,\ \ (\lambda x + x' | y) = \lambda(x|y) + (x'|y) = 0$.

Donc $A^\perp$ est un sev de A.

Comme de plus $A \subset \operatorname{Vect} A$, $(\operatorname{Vect} A)^\perp \subset A^\perp$ et être orthogonal à tout élément de A implique être orthogonal à toute combinaison linéaire d'éléments de A par bilinéarité du produit scalaire, donc $A^\perp \subset (\operatorname{Vect} A)^\perp$. □

Corollaire

Soit F un sous-espace de E préhilbertien réel.
Si $F = \operatorname{Vect} A$ (A engendre F) et si x est un vecteur de E,

$$x \in F^\perp \iff \forall\, a \in A,\ \ (x|a) = 0$$

Démonstration

$F^\perp = A^\perp$. □

Remarque

En particulier, connaissant une base de F, il suffit d'être orthogonal aux vecteurs de la base pour être orthogonal à F.

Propriété

Soit E un espace préhilbertien réel. $E^\perp = \{0\}$ *et* $\{0\}^\perp = E$.

Démonstration

$0 \in E^\perp$, et si $x \in E^\perp$, $(x|x) = 0$ donc $\|x\| = 0$ et $x = 0$. $\square$

Remarque

Le seul vecteur orthogonal à tous les autres est le vecteur nul. Cela peut être très utile !

III Espaces ou sous-espaces euclidiens

Remarque : Rappel

Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

1 Base orthonormale

Théorème

Tout espace euclidien non réduit à 0_E admet une base orthonormale (abrégé en b.o.n.).

On a même un algorithme permettant de transformer une base en base orthonormale. Découvrons-le sur un exemple avant de le formaliser :

Exemple

Dans R^3 muni de sa structure euclidienne canonique, on considère $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (1,0,1)$, $e_3 = (1,1,0)$. Il est facile de voir que (e_1, e_2, e_3) est une base de R^3 (en calculant le déterminant dans la base canonique, par exemple).

On va d'abord transformer la famille en une famille orthogonale, puis orthonormale qui sera donc bien une base.

On pose $\varepsilon_1 = e_1 = (0,1,1)$.

Puis on cherche $\varepsilon_2 = e_2 + \lambda\varepsilon_1$ avec λ tel que $(\varepsilon_1|\varepsilon_2) = 0$ ie $(\varepsilon_1|\mathrm{e}_2) + \lambda(\varepsilon_1|\varepsilon_1) = 1 + 2\lambda = 0$ donc $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\varepsilon_2 = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

En cherchant $\varepsilon_3 = e_3 + \mu\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2$ tel que $(\varepsilon_1|\varepsilon_3) = 0$ et $(\varepsilon_2|\varepsilon_3) = 0$, on trouve $\mu = -\frac{1}{2}$ et $\nu = -\frac{1}{3}$. Soit $\varepsilon_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

On a obtenu trois vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux en dimension 3 : il s'agit d'une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. Reste à normaliser pour obtenir une b.o.n. $\varepsilon_1' = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\varepsilon_2' = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ et $\varepsilon_3' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Définition : Orthonormalisation de Schmidt

Étant donné $(E, |)$ un espace euclidien, et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E :

1. On pose $\varepsilon_1 = e_1$.
2. Par récurrence, pour $j \geqslant 2$, on cherche des réels λ_k tels que le vecteur $\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$ soit orthogonal à tous les ε_i pour $i \in [\![1, j-1]\!]$:
$$\forall\, i < j, \quad (\varepsilon_i|\varepsilon_j) = 0.$$
3. On normalise les vecteurs : $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \ldots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$.

Remarque

Il est aussi possible de normaliser les vecteurs au fur et à mesure.

Propriété

On obtient ainsi que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que pour tout j, $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j)$ et la composante sur e_j de ε_j vaut 1.

On a alors $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \ldots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$ est une b.o.n de E.

Démonstration

- $1^{\text{ère}}$ **étape : Orthogonalisation**.
  - ⋆ **On pose** $\boxed{\varepsilon_1 = e_1.}$ (Et alors $\varepsilon_1 \neq 0_E$.)
  - ⋆ **On cherche** $\varepsilon_2 \in$ **Vect**$(\varepsilon_1, \mathrm{e}_2)$ **tel que** $(\varepsilon_1|\varepsilon_2) = 0$.
    On cherche donc un réel λ tel que $\varepsilon_2 = e_2 + \lambda\varepsilon_1$ et $(\varepsilon_1|\varepsilon_2) = 0$.
    Donc $\lambda\|\varepsilon_1\|^2 + (\varepsilon_1|e_2) = 0$, puis $\lambda = -\dfrac{(\varepsilon_1|e_2)}{\|\varepsilon_1\|^2}$.
    Finalement, $\boxed{\varepsilon_2 = e_2 - \dfrac{(\varepsilon_1|e_2)}{\|\varepsilon_1\|^2}\varepsilon_1.}$
    De plus, $\varepsilon_2 \neq 0$ car (e_1, e_2) est une famille libre, et $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \mathrm{Vect}(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2)$. (L'inclusion $\subset$ est immédiate, l'inclusion $\supset$ vient du fait qu'on puisse exprimer facilement e_2 comme combinaison linéaire de ε_1 et ε_2 : $e_2 = \varepsilon_2 + \frac{(\varepsilon_1|e_2)}{\|\varepsilon_1\|^2}\varepsilon_1$.)
  - ⋆ Supposons, par récurrence, que l'on ait construit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}$ tels que
    - $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1})$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls,
    - pour tout entier $i \in [\![2, j-1]\!]$, $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i) = \mathrm{Vect}(\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_i)$
    - pour tout entier $i \in [\![2, j-1]\!]$, la composante de ε_i sur e_i est 1.

    On cherche des réels λ_k tels que le vecteur $\varepsilon_j = e_j + \sum\limits_{k=1}^{j-1} \lambda_k\varepsilon_k$ soit orthogonal à tous les ε_i pour $i \in [\![1, j-1]\!]$: $(\varepsilon_i|\varepsilon_j) = 0$.
    Donc, si $i \in [\![1, j-1]\!]$, $(\varepsilon_i|e_j) + \sum\limits_{k=1}^{j-1} \lambda_k(\varepsilon_i|\varepsilon_k) = 0$.
    D'où $(\varepsilon_i|e_j) + \lambda_i\left\|\varepsilon_i\right\|^2 = 0$, puis $\lambda_i = -\dfrac{(\varepsilon_i|e_j)}{\left\|\varepsilon_i\right\|^2}$.
    La récurrence est alors établie avec $\boxed{\varepsilon_j = e_j - \sum\limits_{k=1}^{j-1} \dfrac{(\varepsilon_k|e_j)}{\left\|\varepsilon_k\right\|^2}\varepsilon_k.}$
    En effet :
    - $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j)}$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls,
    - $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j) = \mathrm{Vect}(\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_j)$.
      En effet, $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_{j-1})$, donc l'inclusion $\subset$ est immédiate et l'inclusion $\supset$ vient du fait que l'on puisse exprimer facilement e_j comme combinaison linéaire des ε_i, pour $i \in [\![1, j]\!]$: $e_j = \varepsilon_j + \sum\limits_{k=1}^{j-1} \dfrac{(\varepsilon_k|e_j)}{\left\|\varepsilon_k\right\|^2}\varepsilon_k$.
    - La composante de ε_j sur e_j est 1.

  On obtient n vecteurs non nuls orthogonaux en dimension n : $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une **base orthogonale** *de E.*
- $2^{\text{ème}}$ **étape : Normalisation**.
  On obtient alors très facilement un b.o.n. de E :

$$\boxed{\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right).}$$

□

Remarques

R 1 – Matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ à la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & (0) & \ddots & * \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

R 2 – Il se peut dans certaines situations qu'une base orthogonale nous suffise. (L'expression est plus simple, mais pas forcément les calculs).

R 3 – Il n'y a pas unicité de la base orthogonale.
Pour $\mathbb{R}^2$: $\Big\{(1,0),(0,1)\Big\}$; $\Big\{(1,1),(1,-1)\Big\}$; $\Big\{(1,2),(-2,1)\Big\}$.

Corollaire

Tout sous-espace vectoriel non nul d'un espace euclidien admet une base orthonormale.

Démonstration

C'est en effet encore un espace euclidien, muni du produit scalaire restreint à ce sous-espace. □

Corollaire

Tout famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une b.o.n. de cet espace.

Démonstration

Il suffit d'appliquer l'orthonormalisation de Schmidt à cette famille libre complétée en une base : les vecteurs de la famille orthonormale seront inchangés. □

2 Coordonnées, produit scalaire et norme en base orthonormale

Propriété

Soit $(E, |\ )$ un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une **base orthonormale** *de E : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. Alors*

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \ x_i = (e_i|x) \qquad (x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Remarque : Important

Si X et Y désignent respectivement les vecteurs colonnes des composantes de x et y dans la base $\mathscr{B}$, alors $(x|y) = X^\top \times Y$ et $\|x\| = \sqrt{X^\top \times X}$.

Démonstration

- Si $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}(e_i|x) &= \left(e_i \middle| \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j (e_i|e_j)\\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{i,j}\\ &= x_i\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(x|y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \middle| \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(e_i \middle| \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (e_i|e_j)\\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \delta_{i,j}\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\end{aligned}$$

- $\|x\|^2 = (x|x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, d'après ce qui précède. □

Propriétés

Soit E euclidien, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ des bases orthonormales.

(i) Si $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $P^{-1} = P^{\top}$.

(ii) Si $u \in \mathscr{L}(E)$, la formule de changement de base s'écrit

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = P^{\top}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\ P$$

(iii) $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' = \pm 1$: 1 si elles ont même orientation, -1 sinon.

Remarque

La réciproque est fausse, il ne suffit pas que ce déterminant vale ± 1 pour que les bases soient orthonormales.

Démonstration

(i) $P_{i,j} = \left(e_i \middle| e'_j\right)$ (coordonnée de e'_j selon e_i.)
$\left(P^{-1}\right)_{i,j} = \left(e'_i \middle| e_j\right) = \left(e_j \middle| e'_i\right) = P_{j,i} = \left(P^{\top}\right)_{i,j}$.

(ii) Immédiat.

(iii) $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' = \det P$ or $PP^{\top} = I_n$ donc $(\det P)^2 = 1$. □

Remarque

Faciles, les changements de bases orthonormales!!!

3 Produit mixte

Propriétés

*Soit E euclidien orienté et $\mathscr{B}$ est une base orthonormale **directe**.*
$\det_{\mathscr{B}}$ ne dépend pas de $\mathscr{B}$.

Démonstration

$\det_{\mathscr{B}} = \det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' \det_{\mathscr{B}'} = \det_{\mathscr{B}'}$. □

Définition : Produit mixte

On appelle **produit mixte** sur E euclidien orienté de dimension n le déterminant de n vecteurs dans n'importe quelle base orthonormale directe.
On le note $[v_1,\dots,v_n]$, pour $v_1,\dots,v_n \in E$.

Propriétés

Soit E euclidien orienté.

(i) $(v_1,\dots,v_n) \mapsto [v_1,\dots,v_n]$ *est une forme n-linéaire alternée sur E.*

(ii) Si $(e_1,\dots,e_n)$ *est une bond,* $[e_1,\dots,e_n]=1$ *et si* $(e_1,\dots,e_n)$ *est une boni,* $[e_1,\dots,e_n]=-1$ *(réciproque fausse).*

(iii) $[v_1,\dots,v_n]=0$ *si et seulement si* $(v_1,\dots,v_n)$ *est liée.*

(iv) Si $u\in\mathscr{L}(E)$, $[u(v_1),\dots,u(v_n)]=\det u\times[v_1,\dots,v_n]$.

Remarque

L'application $\left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ a & \longmapsto & (a|\cdot) \end{array}\right.$ est linéaire et facilement injective, en dimension finie, donc c'est un isomorphisme.

Comme, si E est de dimension 3 et $x,y\in E$, $[x,y,\cdot]\in E^*$, il existe une unique vecteur $a\in E$ tel que pour tout $z\in E$, $[x,y,z]=(a|z)$. Ce vecteur a est appelé produit vectoriel de x et y, noté $x\wedge y$.
On a alors $[x,y,z]=(x\wedge y|z)$ d'où l'appellation produit mixte.

Propriété

Soit E euclidien orienté.

(i) Si $\dim E=2$, $[\vec{u},\vec{v}]$ *représente le volume orienté du parallélogramme construit sur* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

(ii) Si $\dim E=3$, $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ *représente le volume orienté du parallélépipède construit sur* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$.

Démonstration

C'est évident si $\vec{u},\vec{v}$ (respectivement $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$) sont liés. Sinon :

(i) Si $\dim E=2$, soit (e_1,e_2) base orthonormale obtenu par orthonormalisation de Schmidt de $(\vec{u},\vec{v})$. Alors $\vec{u}=ce_1$ et $\vec{v}=de_1+he_2$, où h hauteur et c côté, donc $[\vec{u},\vec{v}]=ch[e_1,e_2]=\pm ch$ aire orientée du parallélogramme.

(ii) Si $\dim E=3$, soit (e_1,e_2,e_3) base orthonormale obtenu par orthonormalisation de Schmidt de $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. Alors $\vec{u}=ce_1$, $\vec{v}=de_1+he_2$ et $\vec{w}=xe_1+ye_2+He_3$, où H hauteur et ch aire de la base. $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=chH[e_1,e_2,e3]=\pm chH$ volume orienté du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

□

4 Propriétés de $F^\perp$

Théorème

Si F est un sev de **dimension finie** *de E préhilbertien réel, alors*

$$E=F\oplus F^\perp=F\overset{\perp}{\oplus}F^\perp$$

Le sev $F^\perp$ est alors appelé **supplémentaire orthogonal** *de F, il est unique.*

Démonstration

- Si $F=\{0_E\}$, on a vu que $F^\perp=E$ et alors le résultat est immédiat.
- De même, si $F=E$, on a vu que $F^\perp=\{0_E\}$ et alors le résultat est immédiat.
- Sinon, on a déjà que $F\cap F^\perp=\{0_E\}$.

  De plus, si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthonormée de F, et $y=\sum_{i=1}^{p}(e_i|x)e_i\in F$, $x=y+(x-y)$ avec $x-y\in F^\perp$ car pour tout i, $(x-y|e_i)=0$.
  D'où le résultat.

  Unicité : Si $E=F\overset{\perp}{\oplus}G$, alors F et G sont orthogonaux, donc, si E est de dimension finie, $G\subset F^\perp$ et $\dim G=\dim E-\dim F=\dim F^\perp$, donc $G=F^\perp$.
  Si E n'est pas de dimension finie ? si $x\in F^\perp$, $x=x_F+x_G$ et $x_F=x-x_G\in F\cap F^\perp=\{0_E\}$ donc $x=x_G\in G$ et $G=F^\perp$. □

Corollaire

*Soit E un espace **euclidien**, F et G des sous-espaces vectoriels de E.*

(i) $\dim F^\perp=\dim E-\dim F$

(ii) $\left(F^\perp\right)^\perp=F$

(iii) $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$

(iv) $(F\cap G)^\perp=F^\perp+G^\perp$

Remarque

Pour $F\subset\left(F^\perp\right)^\perp$ et $(F\cap G)^\perp\supset F^\perp+G^\perp$, on verra que les inclusions sont des égalités si on ajoute une hypothèse de dimension finie sur E.

On peut donner comme contre-exemples, dans $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales. On peut alors montrer que $F^\perp=\{0\}$ (on montre que si pour toute fonction polynomiale P, $\int_{-1}^{1}P(t)f(t)\,\mathrm{d}t=0$, alors $f\equiv 0$, à l'aide, par exemple, du théorème de Weierstrass de densité des fonctions polynômes dans les fonctions numériques continues sur un segment), donc $\left(F^\perp\right)^\perp=E$ et
$$F\subsetneq\left(F^\perp\right)^\perp=E.$$
Si, de plus, $G=\{t\mapsto P(t)\sin(t)\ ;\ P\in F\}$, alors $G^\perp=\{0\}$ et $F\cap G=\{0\}$ d'où
$$E=(F\cap G)^\perp\supsetneq F^\perp+G^\perp=\{0\}.$$

Démonstration

(i) : Vu dans la précédente démonstration.
(ii) : Une inclusion connue et dimensions.
(iii) et (iv) : $F^\perp\overset{\perp}{\oplus}F=E$: unicité du supplémentaire orthogonal de $F^\perp$.
$F^\perp\cap G^\perp\subset(F+G)^\perp$ est direct.
Donc $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$. (Vrai même s'ils ne sont pas de dimension finie.)
Puis $(F\cap G)^\perp=\left(F^{\perp\perp}\cap G^{\perp\perp}\right)^\perp=\left((F^\perp+G^\perp)^\perp\right)^\perp=F^\perp+G^\perp$. □

5 Projections et involutions orthogonales

a Projections orthogonales

Définition : Projection orthogonale

Soit E un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace de E **de dimension finie**.
On appelle **projecteur orthogonal sur** F la projection p_F sur F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque

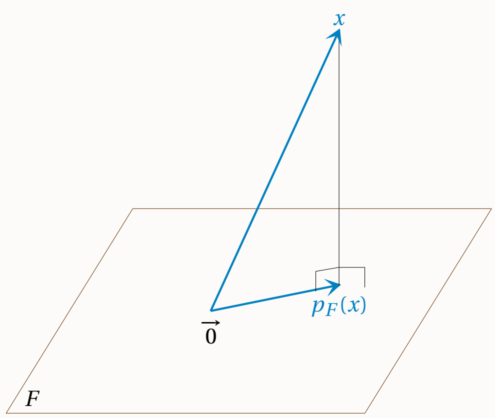
Cette définition est justifiée par le fait que $E = F \oplus F^{\perp}$.

Propriétés

- $p_F \in \mathscr{L}(E)$ *et* $p_F = p_F^2$
- $F = \operatorname{Im} p_F = \operatorname{Ker}(p_F - id_E)$
- $F^{\perp} = \operatorname{Ker} p_F$
- $\operatorname{Im} p_F \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} p_F = E$
- $\forall x \in E,$

$$p_F(x) \in F \text{ et } x - p_F(x) \in F^{\perp}.$$

Remarque : Illustration



Propriété

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E préhilbertien réel, $(e_1,\dots,e_p)$ une **base orthonormale** *de F. Alors*

$$\forall x\in E,\quad p_F(x)=\sum_{i=1}^{p}(e_i|x)e_i$$

Démonstration

D'après la démonstration du supplémentaire orthogonal. □

Remarque

On peut voir le procédé d'orthogonalisation de Schmidt en terme de projection : nous cherchions un vecteur $\varepsilon_j=e_j+\sum_{k=1}^{j-1}\lambda_k\varepsilon_k$ i.e.

$$e_j=\varepsilon_j-\sum_{k=1}^{j-1}\lambda_k\varepsilon_k. \tag{1}$$

Donc, si l'on note $F=\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1})$, (1) est la décomposition de e_j dans $F^\perp\oplus F$. Donc $\varepsilon_j=p_{F^\perp}(e_j)$ et $-\sum_{k=1}^{j-1}\lambda_k\varepsilon_k=p_F(e_j)$.

De plus, ici $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1})$ est une base orthogonale de F, donc $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|},\dots,\frac{\varepsilon_{j-1}}{\|\varepsilon_{j-1}\|}\right)$ en est une b.o.n. et $p_F(e_j)=\sum_{k=1}^{j-1}\left(\frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|}\middle|e_j\right)\frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|}=\sum_{k=1}^{j-1}\frac{(\varepsilon_k|e_j)}{\|\varepsilon_k\|^2}\varepsilon_k$, d'où l'expression des λ_k que l'on avait trouvé.

À savoir retrouver plutôt que de connaître par cœur :

Cas particulier

- Projection orthogonale sur une droite : *$D=\mathbb{R}a$, où $a\neq 0_E$. Alors $\left(\frac{1}{\|a\|}a\right)$ est une base orthonormée de D et*

$$p_D:\ x\mapsto\left(\tfrac{1}{\|a\|}a\middle|x\right)\left(\tfrac{1}{\|a\|}a\right)=\frac{(a|x)}{\|a\|^2}a.$$

(Attention à ne pas oublier le $\|a\|^2$...)
- Projection orthogonale sur un hyperplan : *$H=(\mathbb{R}a)^\perp$, où $a\neq 0_E$.*

$$p_H:\ x\mapsto x-\frac{(a|x)}{\|a\|^2}a.$$

Démonstration

Pour la projection sur un hyperplan, si on nomme D la droite $\mathbb{R}a=H^\perp$, on a que $E=H\overset{\perp}{\oplus}D$ et

$$id_E=p_H+p_D=p_H+\frac{(a|\cdot)}{\|a\|^2}a.\quad\square$$

(Ajouter des dessins !)

Remarque : Interprétation géométrique du produit scalaire

si A, B, C sont des points,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\pm\mathrm{AH}\times\mathrm{AC}$$

où H est le projeté orthogonal de A sur (AC) ie $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ projeté orthogonal de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sur $\mathbb{R}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Exemple

Soit $E=\mathbb{R}^3$, P le plan d'équation cartésienne $x-z=0$.
On note $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Quelle est la matrice dans $\mathscr{B}$ de p_P ?

Vecteur orthogonal à P : $(1,0,-1)$. Donc pour tout $x\in\mathbb{R}^3$,

$$p_P\big((x,y,z)\big)=(x,y,z)-\frac{(1,0,-1)\cdot(x,y,z)}{2}(1,0,-1)=\left(\frac{1}{2}(x+z),y,\frac{1}{2}(x+z)\right)$$

Donc $p_P(e1)=\frac{1}{2}(e_1+e_3)$, $p_P(e2)=e_2$ et $p_P(e3)=\frac{1}{2}(e_1+e_3)$, et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_P)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Remarque

Si $\mathscr{B}$ (qui peut être choisie orthonormale) est une base adaptée à la décomposition $E=F\overset{\perp}{\oplus}F^\perp$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_F)=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&(0)&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&(0)&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}$$

où les p premiers vecteurs de $\mathscr{B}$ forment une base de $F=\mathrm{Im}(p_F)$ et nous donnent les p premières colonnes avec des 1 sur la diagonale, et les $n-p$ autres forment une base de $F^\perp=\mathrm{Ker}\,p_F$ et nous donnent les $n-p$ dernières colonnes nulles.

Propriété : Inégalité de Bessel

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, p_F la projection orthogonale sur F. Alors

$$\forall\, x\in E,\quad \|p_F(x)\|\leqslant\|x\|$$

Démonstration

C'est le théorème de Pythagore : $p_F(x)\perp(x-p_F(x))$ donc

$$\|x\|^2=\|p_F(x)\|^2+\|x-p_F(x)\|^2\geqslant\|p_F(x)\|^2.$$

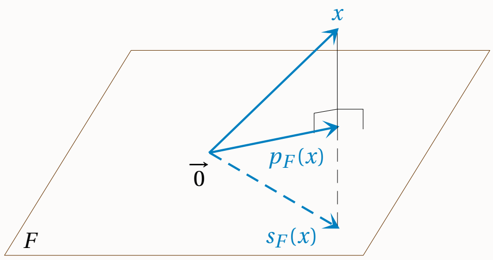
□

b Symétries orthogonales

Définition : Symétrie orthogonale

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
On appelle **symétrie orthogonales par rapport à** F, notée s_F, la symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^\perp$.
Si F est un hyperplan, on parle de **réflexion**.
Si F est une droite vectorielle, on parle de **retournement**.

Remarque : Illustration



Propriétés

(i) $\operatorname{Ker}(s_F - id_E) = F$

(ii) $\operatorname{Ker}(s_F + id_E) = F^\perp$

(iii) $s_F \circ s_F = id_E$

(iv) *Si l'on note de plus p_F la projection orthogonale sur F, alors*

$$s_F = 2p_F - id_E.$$

(v) $s_F = p_F - p_{F^\perp}$

Exemple

Symétrie orthogonale par rapport au plan P de l'exemple précédent. Comme $s_P = 2p_P - id_{\mathbb{R}^3}$, on obtient l'expression générale

$$s_P\big((x,y,z)\big) = \big(z,y,x\big)$$

Et alors $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(s_P) = 2\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(p_P) - I_3$, donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(s_P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque

Si $\mathscr{B}$ (qui peut être choisie orthonormale) est une base adaptée à la décomposition $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

où les p premiers vecteurs de $\mathscr{B}$ forment une base de $F = \operatorname{Ker}(s_F - id)$ et nous donnent les p premières colonnes avec des 1 sur la diagonale, et les $n-p$ autres forment une base de $F^\perp = \operatorname{Ker}(s_F + id)$ et nous donnent les $n-p$ dernières colonnes avec des -1 sur la diagonale.

À savoir retrouver :

Propriété : Expression d'une réflexion

Soient H est un hyperplan d'un espace euclidien E et a un vecteur non nul de $H^\perp$.

$$\forall x \in E, \quad s_H(x) = x - 2\frac{(x|a)}{\|a\|^2}a.$$

Démonstration

$s_H(x) = 2p_H(x) - x = 2(x - p_{H^\perp}) - x = x - 2p_{H^\perp}$ □

6 Distance à un sous-espace

On a vu que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E, alors, pour tout $x \in E$, $\mathrm{d}(x,F) = \inf_{y\in F} \mathrm{d}(x,y) = \inf_{y\in F} \|x$

Propriété

Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E, et $x \in E$.
Alors la distance de x à F est atteinte en le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F , et seulement en ce vecteur :

$$\mathrm{d}(x,F) = \mathrm{d}(x, p_F(x)) = \|x - p_F(x)\|$$

et si $\mathrm{d}(x,F) = \|x - y\|$ avec $y \in F$, alors $y = p_F(x)$.

De plus, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une b.o.n. de F,

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{p} (e_k|x)^2.$$

Si, enfin, $F^\perp$ est aussi de dimension finie et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une b.o.n. de $F^\perp$,

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \|p_{F^\perp}(x)\|^2 = \sum_{k=p+1}^{n} (e_k|x)^2.$$

Démonstration

Par théorème de Pythagore, si $y \in F$,

$$\|x - p_F(x) + p_F(x) - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2.$$

Donc $\|p_F(x) - y\| \leqslant \|x - y\|$ avec égalité si et seulement si $\|p_F(x) - y\| = 0$ c'est-à-dire $y = p_F(x)$.
De plus,

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \sum_{k=p+1}^{n} (e_k|x - p_F(x))^2 = \sum_{k=p+1}^{n} (e_k|x)^2$$

car $(e_k|p_F(x)) = 0$ pour $k \geqslant p+1$. Et

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{p} (e_k|x)^2$$

par théorème de Pythagore. □

Remarques

R 1 – Pratique : plutôt que de calculer une bon de F (orthonormalisation de Schmidt), il peut être plus économique d'écrire que $p_F(x)$ est le seul vecteur de $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$. Connaissant une base quelconque de F, on décompose y dans cette base et on traduit l'orthogonalité de $x - y$ à chaque vecteur de la base : autant d'équation que d'inconnues. On résout et on trouve $y = p_F(x)$.

R 2 – Si F n'est pas de dimension finie, cette distance n'est pas nécessairement atteinte. Ainsi, par exemple, si $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique et si F est le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales, alors $\mathrm{d}(\exp, F)$ n'est pas atteinte car on peut montrer que $\mathrm{d}\left(\exp, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc cette distance est nulle. Ainsi, dire qu'elle serait atteinte serait dire que $\exp \in F$ ce qui est faux (trop de dérivées non nulles ?).
On peut d'ailleurs montrer plus généralement, que si $\mathrm{d}(x,F)$ est atteinte pour un $y \in F$, alors $x - y \in F^\perp$ et on peut montrer que si F est le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales, $F^\perp = \{0\}$.