Variables aléatoires

Extrait du programme officiel :

L'utilisation de variables aléatoires pour modéliser des situations aléatoires simples fait partie des capacités attendues des étudiants.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Variables aléatoires	
Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E. Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.	Si X est une variable aléatoire et si A est une partie de E, notation $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ pour l'événement $X^{-1}(A)$. Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$, $P(X \leqslant x)$.
Loi P_X de la variable aléatoire X.	L'application P_X est définie par la donnée des $P(X = x)$ pour x dans $X(\Omega)$.
Image d'une variable aléatoire par une fonction, loi associée.	
b) Lois usuelles	
	La reconnaissance de situations modélisées par les lois classiques de ce paragraphe est une capacité attendue des étudiants.
Loi uniforme.	
Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Notation $\mathscr{B}(p)$. Interprétation : succès d'une expérience. Lien entre variable aléatoire de Bernoulli et indicatrice d'un événement.
Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Notation $\mathscr{B}(n, p)$. Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes, ou tirages avec remise dans un modèle d'urnes.
c) Couples de variables aléatoires	
Couple de variables aléatoires.	
Loi conjointe, lois marginales d'un couple de variables aléatoires.	La loi conjointe de X et Y est la loi de (X, Y), les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et de Y. Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.
Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.	
Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	
d) Variables aléatoires indépendantes	
Couple de variables aléatoires indépendantes.	
Si X et Y sont indépendantes : $$P\big((X, Y) \in A \times B\big) = P(X \in A)\ P(Y \in B).$$	
Variables aléatoires mutuellement indépendantes.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors quel que soit $(A_1, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathscr{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.	
Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$.	
Si X et Y sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.	
e) Espérance	
Espérance d'une variable aléatoire réelle.	Interprétation en terme de moyenne pondérée. Une variable aléatoire centrée est une variable aléatoire d'espérance nulle.

Contenus	Capacités & Commentaires
Relation : $\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega)$.	
Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance.	
Espérance d'une variable aléatoire constante, de Bernoulli, binomiale.	
Formule de transfert : Si X est une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) f(x)$.	L'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X.
Inégalité de Markov.	
Si X et Y sont indépendantes : $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.	La réciproque est fausse en général.

f) Variance, écart type et covariance

Contenus	Capacités & Commentaires
Moments.	Le moment d'ordre k de X est $\mathrm{E}(X^k)$.
Variance, écart type.	La variance et l'écart type sont des indicateurs de dispersion. Une variable aléatoire réduite est une variable aléatoire de variance 1.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX + b) = a^2 \mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable aléatoire de Bernoulli, d'une variable aléatoire binomiale.	
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	
Covariance de deux variables aléatoires.	
Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes.	
Variance d'une somme, cas de variables deux à deux indépendantes.	Application à la variance d'une variable aléatoire binomiale.

TABLE DES MATIÈRES

I VARIABLES ALÉATOIRES

1 Définition, notations

Exemple

On lance n fois une pièce équilibrée. Le nombre de pile obtenus dépend de la suite des lancers.
On modélise l'expérience par $\Omega = \{0,1\}^n$ (0 pour face et 1 pour pile).

Le nombre recherché s'écrit $X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ où $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$.

Si $k \in \mathbb{N}$, il est intéressant de considérer l'événement $X^{-1}(\{k\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$ correspondant à l'ensemble des lancers donnant k fois pile.

La probabilité de cet événement vaut $\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$.

Définition : Variable aléatoire

Soit Ω un ensemble fini et E un ensemble quelconque. On appelle **variable aléatoire** sur Ω à valeur dans E toute application

$$X : \Omega \longrightarrow E$$

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on parle de **variable aléatoire réelle**.

Si $A \subset E$, l'événement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$ est noté $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$.

Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω, on notera $\mathbb{P}(X \in A)$ la probabilité de $X^{-1}(A)$.

En particulier, on note $\mathbb{P}(X = x)$ la probabilité de $X^{-1}(\{x\})$ et si X est une variable aléatoire réelle, $\mathbb{P}(X \leqslant x)$ la probabilité de $X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \mid X(\omega) \leqslant x\}$.

Comme pour toute fonction, on note $\operatorname{Im} X = X(\Omega) = \{X(\omega)\ ;\ \omega \in \Omega\}$.

Remarques

R 1 – Une variable aléatoire n'est pas une variable et n'est pas aléatoire.

R 2 – Si X est une variable aléatoire, $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est fini car Ω l'est.

R 3 – Dans la pratique, on ne détermine pas toujours Ω explicitement. Savoir qu'il existe et avoir une probabilité adaptée à l'expérience aléatoire suffit. En particulier, notre théorie s'applique dès que l'on a une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs (ie $X(\Omega)$ est fini).

R 4 – Un variable aléatoire constante (ie telle que $|X(\Omega)| = 1$) est dite **certaine** ou **dégénérée**.

Exemple

Si F événement de l'univers Ω, alors

$$\mathbb{1}_F : \left|\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in F \\ 0 & \text{si } \omega \notin F \end{cases} \end{array}\right.$$

est une variable aléatoire.
$\mathbb{P}(\mathbb{1}_F = 1) = \mathbb{P}(F)$ et $\mathbb{P}(\mathbb{1}_F = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{F}\right)$.

Propriété

Soit X variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E, $A \subset E$.

$$(X \in A) = \bigsqcup_{x \in A} (X = x).$$

*En particulier, avec $A = X(\Omega)$, $\big((X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements appelé **système complet d'événements associé à X**.*

Démonstration

$\omega \in (X \in A) \iff X(\omega) \in A \iff \exists x \in A,\ \ X(\omega) = x.$ □

2 Loi d'une variable aléatoire

Définition : Loi d'une variable aléatoire

Soit X variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On appelle **loi de** X l'application

$$\mathbb{P}_X : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array}\right.$$

Propriété

La loi $\mathbb{P}_X$ de la variable aléatoire X est une probabilité sur $X(\Omega)$.
Ainsi, $(X(\Omega), \mathbb{P}_X)$ est un espace probabilisé.

Remarque

Sans connaître explicitement Ω, le seul fait que $X(\Omega)$ soit fini permet d'utiliser nos connaissances sur les probabilités sur des univers finis avec la probabilité $\mathbb{P}_X$.

Propriété

Si X variable aléatoire sur Ω, la loi de X est entièrement déterminée par la donnée des $\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.
Plus précisément, on a pour tout $A \subset X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration

$\big((X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. $\square$

Remarque

On peut noter $\mathbb{P}_X = \sum_{x \in X(\Omega)} p_x \delta_x$ où $p_x = \mathbb{P}(X = x)$ et $\delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x)$.

Exemple

On reprend nos n lancers de pièce équilibrée, X la v.a. du nombre de pile obtenus. Alors $\mathbb{P}_X$ est déterminée par $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$.

Remarque

Des variables aléatoires différentes peuvent suivre une même loi : par exemple X le nombre de pile et Y le nombre de face.

3 Quelques lois usuelles

X désigne une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

a Loi uniforme

Définition : Loi uniforme

On dit que X suit une **loi uniforme** lorsque pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n}$$

où $n = |X(\Omega)|$, c'est-à-dire que pour tout $A \subset X(\Omega)$, $\mathbb{P}_X(A) = \dfrac{|A|}{n}$.
On note alors $X \sim \mathcal{U}(n)$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$.

Exemple

Si on tire un dé à n faces ou si on tire une boule dans une urne qui en contient n (numérotée), alors la variable aléatoire du résultat suit $\mathcal{U}(n)$.

Remarques

R 1 – ⚠ cela ne concerne pas de la probabilité $\mathbb{P}$ initiale : $\mathbb{P}_X$ peut être uniforme sans que $\mathbb{P}$ le soit. Si, par exemple, on lance un dé à 6 faces truqué tel que l'on obtient 1 ou 6 avec une probabilité $1/4$ et $2, 3, 4$ ou 5 avec probabilité $1/8$, X variable aléatoire $\mathbb{1}_{2\mathbb{N}}$, alors $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/2$ donc $X \hookrightarrow \mathcal{U}(2)$ alors que $\mathbb{P}$ n'est pas la probabilité uniforme.

R 2 – On a donc $\mathbb{P}_X = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \frac{\delta_x}{n}$.

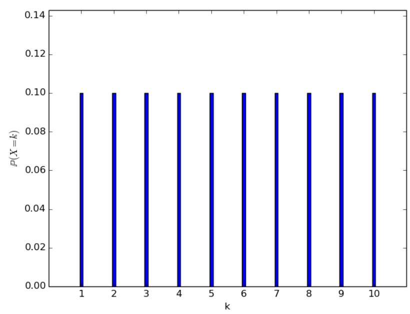

FIGURE 1 – Loi $\mathcal{U}(10)$

b Loi de Bernoulli

Définition : Loi de Bernoulli

On dit que X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** $p \in [0, 1]$ lorsque $X(\Omega) \subset \{0, 1\}$, $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = q = 1 - p$.
On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ ou $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Exemple

Situation type : Variable aléatoire étudiant le succès (1) d'un événement donné ou son échec (0).

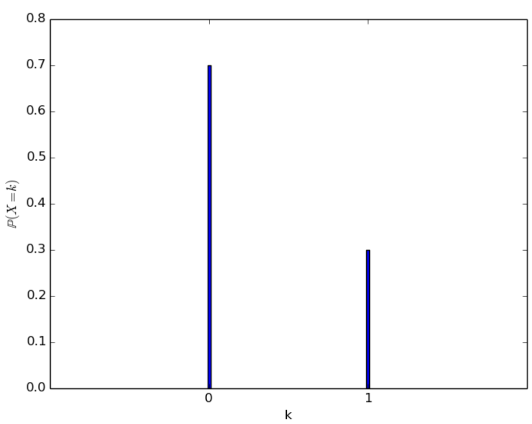

FIGURE 2 – Loi $\mathcal{B}(0{,}3)$

Remarques

R 1 – Si $0 < p < 1$, $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

R 2 – $\mathbb{P}_X = p\delta_1 + (1 - p)\delta_0$.

Propriété

Les variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p sont exactement les fonctions indicatrices des parties F de Ω telles que $\mathbb{P}(F) = p$.

Démonstration

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors si $F = (X = 1)$, $X = \mathbb{1}_F$.
Réciproquement, si $X = \mathbb{1}_F$, $X(\Omega) \subset \{0,1\}$ et $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(F)$. □

c Loi binomiale

On a déjà vu que lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes, la probabilité d'avoir $k \leqslant n$ succès s'écrit $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ où p est la probabilité d'un succès.

Si on appelle X la variable aléatoire du nombre de succès, à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, alors elle suit la loi donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Remarquons que l'on peut écrire $X = X_1 + \cdots + X_n$ où X_i est la variable aléatoire de Bernoulli succès à la i^{e} répétition.

Définition : Loi binomiale

On dit que X suit une **loi binomiale de paramètre** (n, p) **où** $p \in [0,1]$ lorsque $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

avec $q = 1 - p$. On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ ou $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

Remarques

R 1 – $\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$.

R 2 – Si $0 < p < 1$, $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

R 3 – $\mathscr{B}(1, p) = \mathscr{B}(p)$.

R 4 – La formule du binôme redonne (ou se retrouve par) $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

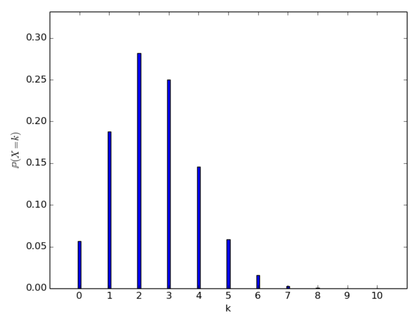

FIGURE 3 – Loi $\mathscr{B}(10, 1/4)$

Exemples

E 1 – Situations types :
- Nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes.
- Tirage avec remise de n boules dans une urne contenant b boules blanches et r boules rouges. Si $p = \frac{b}{b+r}$ et X le nombre de boules blanches tirées, alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

E 2 – Dans le cas d'un tirage simultané ou successif sans remise, on obtient une variable aléatoire de loi hypergéométrique :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{b}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}.$$

Exercice

Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors $Y = n - X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,q)$.

4 Opérations sur les variables aléatoires

Les variables aléatoires réelles étant des applications de $\mathbb{R}^\Omega$ qui a une structure d'algèbre, on peut en faire des combinaisons linéaires ou des produits.

On peut aussi les composer par d'autres fonctions :

Définition

Soit X une variable aléatoire sur Ω et f un application définie sur $X(\Omega)$. Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire notée $f(X)$.

Propriété

La loi de $Y = f(X)$ est donnée par

$$\forall\, y \in f(X(\Omega)),\quad \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(f(X) = y) = \mathbb{P}\left(X \in f^{-1}(\{y\})\right) = \sum_{x \,|\, f(x)=y} \mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration

$(f \circ X)(\omega) = y \Longleftrightarrow \exists\, x \in X(\Omega),\quad f(x) = y$ et $X(\omega) = x$ c'est-à-dire

$$\left(f(X) = y\right) = \bigsqcup_{x \,|\, f(x)=y} (X = x). \quad \square$$

Exemples

E1 – Si $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$, $Y = aX + b$, $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_n\}$ où $y_i = ax_i + b$, alors $\mathbb{P}(Y = y_i) = \mathbb{P}(aX + b = ax_i + b) = \mathbb{P}(X = x_i)$.

E2 – Si $f(x) = x^2$, $X(\Omega) = [\![-n, n]\!]$ et $Y(\Omega) = \{k^2,\ k \in [\![0, n]\!]\}$, $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0)$ et si $k \neq 0$, $\mathbb{P}\left(Y = k^2\right) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X = -k)$.

De la même manière, on obtient par exemple :

Propriété

Si X et Y sont des variables aléatoires,

$$\mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{x,y \,|\, x+y=z} \mathbb{P}\big(X = x, Y = y\big)$$

$$\text{et} \quad \mathbb{P}(XY = z) = \sum_{x,y \,|\, xy=z} \mathbb{P}\big(X = x, Y = y\big)$$

II Couples de variables aléatoires

1 Définitions

Définition : Couple de variables aléatoires

Soit Ω fini, X, Y variables aléatoires sur Ω à valeurs dans E, E'. L'application

$$(X,Y) : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times E' \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.$$

est une variable aléatoire appelé **couple** (X, Y).

Remarque

$(X,Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et il n'y a pas égalité en général.

Propriété

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires sur un univers fini Ω. Alors la famille d'événements $\big(((X,Y) = (x,y))\big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements appelé ***système complet d'événements associé au couple*** *(X,Y).*

Démonstration

Les événements sont bien disjoints et

$$\bigcup_{x,y} \big((X = x) \cap (Y = y)\big) = \Omega$$

car tout $\omega \in (X = X(\omega)) \cap (Y = Y(\omega))$. $\square$

Remarque

On note indifféremment $((X,Y) = (x,y))$ ou $(X = x) \cap (Y = y)$ ou $(X = x \text{ et } X = y)$ ou $(X = x, Y = y)$ ces événements.

2 Lois conjointe et marginales

Définition : Loi conjointe

Soit (X,Y) un couple de variable aléatoires. On appelle **loi conjointe** de (X,Y) la loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ de la variable aléatoire (X,Y).

Remarque

Vu la propriété précédente, cette loi est déterminée par $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ pour $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et peut être représentée dans un tableau à double entrée.

Exemple

On lance deux dés, X est la v.a. égale au plus grand des nombres, Y celle du plus petit. On pose $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme. On obtient :

X \ Y	1	2	3	4	5	6	loi de X
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	1/18	1/36	0	0	0	0	1/12
3	1/18	1/18	1/36	0	0	0	5/36
4	1/18	1/18	1/18	1/36	0	0	7/36
5	1/18	1/18	1/18	1/18	1/36	0	9/36
6	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/36	11/36
loi de Y	11/36	9/12	7/36	5/36	3/36	1/36	(1)

Remarquons qu'on obtient la loi de X en sommant les lignes et celle de Y en sommant les colonnes.

Définition : Lois marginales

Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires, les lois de X et de Y sont appelées **première et seconde lois marginales du couple.**

Propriété

La loi conjointe de (X, Y) détermine les lois marginales de (X, Y) mais la réciproque est fausse.

Démonstration

$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_y ((X, Y) = (x, y))\right) = \sum_y \mathbb{P}(X = x, Y = y)$. Idem pour Y.

Contre-exemple :

X \ Y	0	1	loi de X
0	1/2	0	1/2
1	0	1/2	1/2
loi de Y	1/2	1/2	(1)

X \ Y	0	1	loi de X
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
loi de Y	1/2	1/2	(1)

□

3 Loi conditionnelle

Définition : Loi conditionnelle

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$, la **loi conditionnelle de Y sachant** $(X = x)$ est la loi de Y pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X=x)}$. Elle est donc déterminée par, pour tout $y \in Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(Y = y \mid X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)}.$$

Remarque

Les lois conditionnelles de Y sachant $(X = x)$ et la loi de X permettent de déterminer la loi conjointe de (X, Y) :
- Soit $\mathbb{P}(X = x) = 0$ et alors $\mathbb{P}(X = x, Y = y) \leqslant \mathbb{P}(X = x) = 0$ donc $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = 0$,
- soit $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$ et $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(Y = y \mid X = x)\mathbb{P}(X = x)$.

Exemple

Lois conditionnelles de Y :

X \ Y	0	1
0	1/4	3/4
1	2/3	1/3

Loi conjointe de (X, Y) :

X \ Y	0	1	loi de X
0	1/10	3/10	2/5
1	2/5	1/5	3/5
loi de Y	1/2	1/2	(1)

4 Extension aux n-uplets

Définition : n-uplets de variables aléatoires

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires.
La **loi conjointe** de $(X_1, \ldots, X_n)$ est déterminée par les $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$ où pour tout i, $x_i \in X_i(\Omega)$.
Les lois de $X_1, \ldots, X_n$ sont les **lois marginales** de $(X_1, \ldots, X_n)$.

Définition : Loi conditionnelle pour n variables

Si $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont fixés, tel que $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) > 0$, la **loi conditionnelle** de X_n sachant $(X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1})$ est déterminée par

$$\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)}{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1})}$$

pour tout x_n.

Remarque

Lorsque l'on a la propriété $\mathbb{P}\left(X_{i+1} = x_{i+1} \mid X_1 = x_1, \ldots, X_i = x_i\right) = \mathbb{P}(X_{i+1} = x_{i+1} \mid X_i = x_i)$ (phénomène sans mémoire), on dit que la famille $(X_1, \ldots X_n)$ de variables aléatoires est **markovienne**.

III Variables aléatoires indépendantes

1 Cas d'un couple de variable

Définition : Indépendance

Soient X, Y deux variables aléatoires sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.
X et Y sont dites **indépendantes** si pour tout $(A, B) \in \mathscr{P}(X(\Omega)) \times \mathscr{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\ \mathbb{P}(Y \in B).$$

On note parfois $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Propriété

X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\ \mathbb{P}(Y = y).$$

Démonstration

Le sens $\Rightarrow$ est direct.
On suppose que pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$.
Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(X(\Omega)) \times \mathscr{P}(Y(\Omega))$.

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{(x,y)\in A\times B} (X = x, Y = y)\right) = \sum_{(x,y)\in A\times B} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{x\in A} \mathbb{P}(X = x) \sum_{y\in B} \mathbb{P}(Y = y).$$

$\square$

Remarque

Si X et Y sont indépendantes, la donnée des lois marginales de (X, Y) détermine sa loi conjointe.

Exemple

Deux variables aléatoires de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si $(X = 1)$ et $(Y = 1)$ le sont.

Propriété

Soit (X, Y) couple de variables aléatoires. Il y a équivalence entre

(i) Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

(ii) Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) > 0$, la loi de X sachant $(Y = y)$ est la même que la loi de X.

(iii) Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$, la loi de Y sachant $(X = x)$ est la même que la loi de Y.

Démonstration

Immédiat. □

Propriété

Si X, Y sont des variables aléatoires indépendantes, f, g définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration

$(f(X) \in A) = \left(X \in f^{-1}(A)\right)$ et $(g(Y) \in B) = \left(Y \in f^{-1}(B)\right)$, ces derniers étant indépendants. □

Exemple

Si X et Y sont indépendantes, pour tous m, n, X^m et Y^n le sont.

Remarque

En reprenant un calcul précédent, on obtient, si X, Y indépendantes,

$$\mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{x,t \mid x+y=z} \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y)$$

où l'on peut remplacer $X + Y$ par n'importe quelle fonction de X et Y.

Exemple

Si X et Y sont indépendants de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, déterminer les lois de $X + Y$ et de $X - Y$. Si $k \in [\![2, 2n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k - i) = \frac{\#\{i \in [\![1, n]\!] \mid k - i \in [\![1, n]\!]\}}{n^2}.$$

Soit $\dfrac{k-1}{n^2}$ si $k \leqslant n+1$, $\dfrac{2n-k+1}{n^2}$ sinon.

Si $k \in [\![1-n, n-1]\!]$, on calcule de même $\mathbb{P}(X - Y = k) = \dfrac{n - |k|}{n^2}$.

2 Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Définition

Des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont dites **(mutuellement) indépendantes** lorsque pour toutes parties A_1 de $X_1(\Omega)$, ..., A_n de $X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 \in A_1)$, ..., $(X_n \in A_n)$ le sont.

Si, de plus, elles ont même loi, on dit que ce sont des **variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées** (vaiid).

Propriété

$X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 = x_1)$, ..., $(X_n = x_n)$ le sont.

Démonstration

Le sens $\Rightarrow$ est direct.
On suppose que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$, les événements $(X_1 = x_1)$, ..., $(X_n = x_n)$ sont indépendants.
Soit $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(X_1(\Omega)) \times \cdots \times \mathscr{P}(X_n(\Omega))$, $I \subset [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}(X_i \in A_i)\right) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{(x_i)_i \in \prod\limits_{i\in I} A_i}\left(\bigcap_{i\in I}(X_i = x_i)\right)\right) \\
&= \sum_{(x_i)_i \in \prod\limits_{i\in I} A_i} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}(X_i = x_i)\right) = \sum_{(x_i)_i \in \prod\limits_{i\in I} A_i}\left(\prod_{i\in I}\mathbb{P}(X_i = x_i)\right) \\
&= \prod_{i\in I}\left(\sum_{x_i \in A_i}\mathbb{P}(X_i = x_i)\right) = \prod_{i\in I}\mathbb{P}(X_i \in A_i). \quad \square
\end{aligned}$$

Remarques

R 1 – n expériences aléatoires indépendantes peuvent être modélisées par n variables aléatoires indépendantes sur le même principe que ce qui a été vu dans le précédent chapitre. Le résultat de la i^e expérience est noté X_i et

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1)\cdots\mathbb{P}(X_n = x_n).$$

R 2 – Comme pour les événements, mutuellement indépendants $\Rightarrow$ indépendants deux à deux, mais la réciproque est fausse si $n > 2$.

Exemple

Si X_1, X_2 vaiid de loi $\mathscr{U}(2)$ sur $\{-1,1\}$. $X_3 = X_1 \times X_2$.

$$\mathbb{P}(X_3 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = -1) + \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 1) = \frac{1}{2}$$

Donc $X_3 \hookrightarrow \mathscr{U}(2)$ sur $\{-1,1\}$.

Alors X_1, X_2, X_3 sont indépendantes deux à deux car $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 1)$$

$$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = -1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(X_3 = 1)$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_3 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = -1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_3 = -1)$$

$$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_3 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(X_3 = 1)$$

(Voir aussi la remarque sur les variables aléatoire de Bernoulli indépendantes qui s'adapte ici.)

Donc $X_1 \perp\!\!\!\perp X_3$ et par symétrie, $X_2 \perp\!\!\!\perp X_3$.

Pourtant, elles ne sont pas (mutuellement) indépendantes :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}.$$

Propriété

Si $X_1, \ldots, X_n$ vaiid de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Démonstration

$$\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n = k) = \sum_{\substack{x_1,\ldots,x_n \in \{0,1\} \\ x_1+\cdots+x_n = k}} \mathbb{P}(X_1 = x_1)\cdots\mathbb{P}(X_n = x_n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$ □

Remarque

Plus généralement, si les X_i indépendantes suivent $\mathscr{B}(n_i, p)$, alors $X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(\sum n_i, p)$.

Propriété

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, $f_1, \ldots, f_n$ définies sur $X_1(\Omega), \ldots, X_n(\Omega)$, alors $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.

Démonstration

Similaire au cas de deux variables : $\big(f(X_i) \in B_i\big) = \big(X_i \in f^{-1}(B_i)\big)$. □

IV Espérance

1 Définition

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle finie. On appelle **moyenne** ou **espérance mathématique** de X le nombre

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \cdot x = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{P}(X = x) \cdot x.$$

Remarques

R 1 – La notion d'espérance est une notion relative à la loi de X seulement : deux variables aléatoires de même loi ont même espérance.

R 2 – Il s'agit de la moyenne des valeurs prises par X, pondérées par la probabilité d'obtenir ces valeurs. Ainsi, c'est la valeur que l'on peut espérer voir prendre X en moyenne.

Propriété

Pour toute variable aléatoire réelle finie,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega).$$

Démonstration

Pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} \mathbb{P}(\{\omega\})$ donc

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} \mathbb{P}(\{\omega\}) x = \sum_{\substack{(x,\omega) \in X(\Omega) \times \Omega \\ X(\omega) = x}} \mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega)$$

car x est uniquement déterminé par ω. $\square$

Définition

Une variable aléatoire réelle X finie est dite **centrée** lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$.
Pour toute variable aléatoire réelle X finie, $X - \mathbb{E}(X)$ est appelée **variable aléatoire centrée associée à** X.

2 Propriétés

Propriétés

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles finies, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Si X est une variable aléatoire constante : $X \equiv a \in \mathbb{R}$, alors $\mathbb{E}(X) = a$.

(ii) Si A est un événement, $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

(iii) ***Linéarité*** *: $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$.*

(iv) $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

(v) ***Positivité*** *: Si $X \geqslant 0$, $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$. Si, dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = 0$, alors X est nulle presque sûrement, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X=0) = 1$ (ie $\mathbb{P}(X>0) = 0$).*

(vi) ***Croissance*** *: Si $X \leqslant Y$, $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.*

(vii) ***Inégalité triangulaire*** *: $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$.*

Démonstration

(i) Facile.

(ii) Facile.

(iii) Facile avec la propriété précédente.

(iv) Évident.

(v) Direct.

(vi) Découle de la positivité et la linéarité ou avec la propriété précédente.

(vii) Découle de la croissance. □

Propriété : Inégalité de Markov

Si X est une variable aléatoire réelle ***positive*** *finie, $a > 0$,*

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Démonstration

X étant positive,

$$\mathbb{E}(X) \geqslant \sum_{x \geqslant a} x\mathbb{P}(X=x) \geqslant a \sum_{x \geqslant a} \mathbb{P}(X=x) = a\mathbb{P}(X \geqslant a).$$

Ou : $\mathbb{1}_{(X \geqslant a)} \leqslant \frac{X}{a}$ et croissance de $\mathbb{E}$. □

3 Espérance et lois usuelles

Propriété

(i) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{x\in X(\Omega)} x$ (moyenne arithmétique).

Dans le cas courant où $X(\Omega) = [\![a,b]\!]$, $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.

(ii) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{E}(X) = p$.

(iii) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $\mathbb{E}(X) = np$.

Démonstration

Pour (i) : $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n}\frac{(a+b)n}{2}$.

Pour (iii) : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)} = np.$.

Autre preuve possible : si les $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ vaiid (expérience de Bernoulli), alors $X = X_1 + \ldots + X_n$ de loi $\mathcal{B}(n,p)$. □

Remarque

Le cas de Bernoulli a déjà été vu pour $X = \mathbb{1}_A$!

4 Espérance d'une fonction de variable aléatoire

Propriété : Formule de transfert

Si X variable aléatoire réelle finie et f telle que $f(X)$ a un sens, alors

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)f(x)$$

Remarque

Pas besoin de connaître la loi de $f(X)$!

Démonstration

Pour tout $y \in f(X(\Omega))$, $\mathbb{P}(f(X)=y) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ f(x)=y}} \mathbb{P}(X=x)$ donc

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{y\in f(X(\Omega))}\left(\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ f(x)=y}}\mathbb{P}(X=x)\right)y = \sum_{\substack{(x,y)\in f(X(\Omega))\times X(\Omega)\\ f(x)=y}}\mathbb{P}(X=x)f(x) = \sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)f(x)$$

car y est uniquement déterminé par x. □

5 Espérance et indépendance

Propriété

Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes,

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

La réciproque est fausse en général.

Démonstration

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{z\in(XY)(\Omega)} \mathbb{P}(XY = z)z = \sum_{z\in(XY)(\Omega)} \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ xy=z}} \mathbb{P}(X = x, Y = y)xy$$

$$= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)x\mathbb{P}(Y = y)y = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Contre-exemple : Soit X_1 de loi $\mathbb{P}_{X_1} = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{4}(\delta_1 + \delta_{-1})$. $\mathbb{E}(X_1) = 0$. Et $X_2 = \mathbb{1}_{(X_1=0)}$.
Alors $X_1X_2 \equiv 0$ donc $\mathbb{E}(X_1X_2) = 0 = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$.
Pourtant $X_1 \not\perp X_2$ car $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 0 \neq \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{8}$. □

V VARIANCE, ÉCART-TYPE, COVARIANCE

1 Moments

Les moments d'une variable aléatoire sont les paramètres numériques qui donnent des renseignements sur sa loi. En général, on se limite aux moments d'ordre 1 (espérance) et d'ordre 2 (permet d'obtenir la variance).

Définition : Moments

Soit X une variable aléatoire réelle finie, $p \geqslant 1$.
Le **moment d'ordre p de X** est le nombre réel

$$\mathbb{E}\left(X^p\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)x^p.$$

Remarque

Le moment d'ordre 1 de X est son espérance.

2 Variance et écart-type

Définition : Variance, écart-type, variable réduite

Soit X un variable aléatoire réelle finie. On appelle **variance** de X le nombre

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).$$

On appelle **écart-type** de X le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)}$$

Lorsque $\mathbb{V}(X) = 1$, X est dite **réduite**.

Remarques

R 1 – $\mathbb{V}(X)$ est le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire centrée associée à X : $X-\mathbb{E}(X)$. Par positivité de l'espérance, $\mathbb{V}(x) \geqslant 0$ donc l'écart-type est bien défini.

R 2 – L'écart-type s'interprète comme une distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ entre le vecteur dont les coordonnées sont les valeurs prises par X et le vecteur dont toutes les coordonnées valent $\mathbb{E}(X)$. C'est donc un indicateur de dispersion de X autour de sa moyenne $\mathbb{E}(X)$.

R 3 – D'après la formule de transfert, si les valeurs prises par X sont $x_1,\dots,x_n$,

$$\mathbb{V}(X)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X=x_i)(x_i-\mathbb{E}(X))^2.$$

R 4 – Plus la variance (et donc l'écart-type) est petit, plus X est concentrée autour de sa moyenne $\mathbb{E}(X)$. Le cas extrême est pour une variable aléatoire constante : $\mathbb{V}(X)=0$.
Réciproquement, si $\mathbb{V}(X)=0$, alors $\forall\, x\in X(\Omega),\ \ \mathbb{P}(X=x)=0$ ou $x=\mathbb{E}(X)$. Autrement dit, $\mathbb{P}(X\neq\mathbb{E}(X))=0$ ou encore $\mathbb{P}(X=\mathbb{E}(X))=1$: X est constante presque sûrement.

Propriétés

Soit X une variable aléatoire réelle finie.

(i) ***Théorème de Kœnig-Huygens*** : $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-\mathbb{E}(X)^2$.

(ii) Si $a,b\in\mathbb{R}$, $\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(x)$ donc $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$.

(iii) Si $\sigma(X)\neq 0$, $\dfrac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite, appelée ***variable aléatoire centrée réduite associée à*** *X.*

Remarque

La deuxième formule est intuitive au sens où une translation des valeurs de X ne perturbe la distance à la moyenne, et comme cette distance est au carré, une homothétie de rapport a la multiplie par a^2.

Démonstration

(i) $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\left(X^2-2\mathbb{E}(X)^2X+\mathbb{E}(X)^2\right)=\mathbb{E}(X^2)-2\mathbb{E}(X)^2+\mathbb{E}(X)^2=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2$ par linéarité.

(ii) $\mathbb{V}(aX+b)=\mathbb{E}\left((aX+b)^2\right)-\mathbb{E}(aX+b)^2=a^2\mathbb{E}\left(X^2\right)+2ab\mathbb{E}(X)+b^2-a^2\mathbb{E}(X)^2-2ab\mathbb{E}(X)+b^2$
$=a^2V(X)$. □

3 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle finie, $a>0$.

$$\mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}(X)|\geqslant a\right)\leqslant\frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

Démonstration

Découle directement de l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}(X)|\geqslant a\right)=\mathbb{P}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\geqslant a^2\right)\leqslant\frac{\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)}{a^2}=\frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.$$

ou, directement,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} (x-\mathbb{E}(X))^2\,\mathbb{P}(X=x)$$
$$\geqslant a^2 \sum_{x \mid |x-\mathbb{E}(X)|\geqslant a} \mathbb{P}(X=x) = a^2\,\mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}(X)|\geqslant a\right) \quad \square$$

Remarques

R 1 – le a^2 est logique pour des raisons d'homogénéité (dimension).

R 2 – On retrouve avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, le fait que si $\mathbb{V}(X) = 0$,

$$\forall\,\varepsilon > 0,\quad \mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\geqslant\varepsilon) = 0$$

Donc, comme $X(\Omega)$ est fini, $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| > 0) = 0$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$.

R 3 – En particulier, $\mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}(X)| < a\right) \geqslant 1 - \dfrac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$.

4 Covariance

Définition : Covariance

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles finies.
On appelle **covariance** du couple (X,Y) le nombre

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\big(Y-\mathbb{E}(Y)\big)\Big).$$

Lorsque $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, X et Y sont dites **non corrélées**.

Remarques

R 1 – La covariance mesure la corrélation entre les variations de X et de Y dans le sens où elle est positive lorsque X et Y s'écartent de leur moyenne dans le même sens, et négative si c'est dans le sens opposé.

R 2 – Cela ressemble à un produit scalaire et ce n'est pas un hasard ! On vérifie facilement qu'il s'agit d'une forme bilinéaire positive. La variance correspond au carré de la « norme » (et donc l'écart-type à la « norme ».)
Cela permet par exemple d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (mais sans le cas d'égalité) : $\mathrm{Cov}(X,Y)^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$ ie $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$.

Propriété

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles finies.

(i) Cov *est une forme bilinéaire positive.*

(ii) ***Théorème de Kœnig-Huygens*** *:* $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

(iii) $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$.

(iv) *Si* $X \perp\!\!\!\perp Y$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ *et la réciproque est fausse.*

Démonstration

(i) Provient de la linéarité et la positivité de $\mathbb{E}$.

(ii) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

(iii) C'est une identité remarquable :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathrm{Cov}(X+Y, X+Y) = \mathrm{Cov}(X,X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + V(Y).$$

ou alors

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X+Y) &= \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X)+Y-\mathbb{E}(Y))^2\right)\\ &= \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) + 2\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right) + \mathbb{E}\left((Y-\mathbb{E}(Y))^2\right).\end{aligned}$$

(iv) Immédiat avec (ii). (Voir contre-exemple de $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. □

Remarques

R 1 – $\mathrm{Cov}(X,X) = 0 \Longrightarrow X$ constante presque sûrement.

R 2 – $\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \mathrm{Cov}\left(\dfrac{X}{\sigma(X)} \times \dfrac{Y}{\sigma(Y)}\right)$ est le cœfficient de corrélation de X et Y.

5 Variance d'une somme de variables aléatoires

Propriété

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires réelles finies.

(i) $\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right)$.

(ii) Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes deux à deux,

$$\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n).$$

En particulier, si $X_1, \dots, X_n$ sont des vaiid, $\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n) = n\mathbb{V}(X_1)$.

Démonstration

(i) Le cas $n=1$ est trivial et le cas $n=2$ a déjà été vu.
Si c'est vrai pour $n-1$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n) &= \mathbb{V}(X_1+\cdots+X_{n-1}+X_n) = \mathbb{V}(X_1+\cdots+X_{n-1}) + \mathbb{V}(X_n) + 2\,\mathrm{Cov}(X_1+\cdots+X_{n-1}, X_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{V}(X_i) + \mathbb{V}(X_n) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) + 2 \sum_{1\leqslant i<j=n} \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right).\\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right).\end{aligned}$$

(ii) Immédiat. □

6 Cas des lois usuelles

Propriété

(i) Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, $\mathbb{V}(X) = p(1-p) = pq$.

(ii) Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = npq$.

Démonstration

(i) $X^2 = X$, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X) - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$.

(ii) On prend $X = X_1 + \ldots + X_n$ où $X_1, \ldots, X_n$ sont des vaiid de loi $\mathscr{B}(p)$.

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{k=1}^{n} V(X_i) = np(1-p) = npq. \quad \square$$

Exercice

Variance de $X \hookrightarrow \mathscr{U}(n)$ sur $[\![1,n]\!]$?

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \frac{(n+1)^2}{4} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}.$$

Variance de $X \hookrightarrow \mathscr{U}(n)$ sur $[\![a,b]\!]$? $Y = X - a + 1 \hookrightarrow \mathscr{U}(n)$ sur $[\![1,n]\!]$ avec $n = b - a + 1$.

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}.$$

7 Formulaire

- **Loi de X :** $\boxed{\mathbb{P}_X : A \mapsto \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)}$ déterminée par $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.
- **Espérance de X :** $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)x = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega).}$
- **Formule de transfert :** $\boxed{\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) f(x).}$
- **Variance de X :** $\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2.}$
- **Covariance de X et Y :** $\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).}$
- **Variance d'une somme :** $\boxed{\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y).}$
- **Inégalité de Markov :** $\boxed{\text{Si } X \geqslant 0 \text{ et } a > 0,\ \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.}$
- **Inégalité de Bienaymé-Tchebbychev :** $\boxed{\text{Si } a > 0,\ \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.}$
- **Loi de Bernoulli :** $\boxed{\mathbb{P}(X = 1) = p,\ \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = q.\ \mathbb{E}(X) = p,\ \mathbb{V}(X) = pq.}$
- **Loi binomiale :** $\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},\ \mathbb{E}(X) = np,\ \mathbb{V}(X) = npq.}$