Séries numériques

Extrait du programme officiel :

L'étude des séries prolonge celle des suites. Elle permet d'illustrer le chapitre « Analyse asymptotique » et, à travers la notion de développement décimal de mieux appréhender les nombres réels.

L'objectif majeur est la maîtrise de la convergence absolue ; tout excès de technicité est exclu.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Sommes partielles. Convergence, divergence. Somme et restes d'une série convergente.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.	
Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.
b) Séries à termes positifs	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	
Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.	
c) Comparaison série-intégrale dans le cas monotone	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.	Application à l'étude de sommes partielles et de restes.
Séries de Riemann.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Séries absolument convergentes	
Convergence absolue.	
La convergence absolue implique la convergence.	Le critère de Cauchy est hors programme. La convergence de la série absolument convergente $\sum u_n$ est établie à partir de celles de $\sum {u_n}^+$ et $\sum {u_n}^-$.
Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.	
e) Représentation décimale des réels	
Existence et unicité du développement décimal propre d'un réel.	La démonstration n'est pas exigible.

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I GÉNÉRALITÉS

1 Sommes partielles, convergence, divergence, somme

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite.
Étudier la **série de terme général** u_n, notée $\sum u_n$, c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
S_n est appelée **somme partielle d'ordre** n de la série $\sum u_n$.
$\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque $(S_n)_n$ converge, **divergente** sinon.
Lorsqu'elle est convergente, on appelle **somme de la série** $\sum u_n$ le nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Remarques

R1 – Enlever un nombre fini de termes à S_n ne change pas sa convergence. Autrement dit, si I est fini, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus I} u_n$ sont de même nature.

En effet, si $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\Sigma_n = \sum_{k\in[\![0,n]\!]\setminus I} u_k$ et si $n > \max I$,

$$S_n = \Sigma_n + \sum_{n\in I} u_n.$$

Lorsqu'elles sont convergentes, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus I} u_n + \sum_{n\in I} u_n$.

R2 – Une série peut n'être définie que pour $n \geqslant n_0$, et on note $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ la série dans ce cas.

R3 – Une série n'est rien d'autre qu'une suite. Tous les résultats sur les suites s'appliquent donc. Cependant, en général, c'est en étudiant son terme général u_n qu'on déduit des propriétés de la série.

R4 – Ne pas confondre la série $\sum u_n$ et le **nombre** (lorsqu'il existe) $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathbb{K}$.

R5 – ⚠ $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ n'est pas une somme, c'est une limite.

Exemple

Si $u_n = q^n$ où $q \in \mathbb{K}$. $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$

- Si $q = 1$, $S_n \to +\infty$.
- Si $|q| < 1$, $S_n \to \dfrac{1}{1-q}$
- Si $|q| \geqslant 1$ et $q \neq 1$, $(S_n)_n$ diverge. (si $q^n \to \ell \in \mathbb{K}$, $1 \leqslant |\ell| \neq 0$ et $\dfrac{q^{n+1}}{q^n} \to 1 = q$).

Propriété : Séries géométriques

Si $q \in \mathbb{K}$, la série dite géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.
Lorsque c'est le cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Exemple : Série harmonique alternée

$\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente de somme $\ln 2$.

$$S_n = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p}{p+1} = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \int_0^1 t^p \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{p=0}^{n-1} (-t)^p \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t} \,\mathrm{d}t = \ln 2 - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} \,\mathrm{d}t$$

puis

$$|S_n - \ln 2| \leqslant \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Autre preuve possible : appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ sur $[0,1]$.

2 Correspondance suite et séries

On a déjà vu qu'étudier la série de terme général u_n, c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles. On a alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = S_n - S_{n-1}}$$

(avec $S_{-1} = 0$).

Inversement, une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut-elle être vue comme suite de sommes partielles d'une série de terme général u_n ?

$$\begin{cases} v_0 = u_0 \\ v_1 = u_0 + u_1 \\ v_2 = u_0 + u_1 + u_2 \\ \vdots \\ v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = v_0 \\ u_1 = v_1 - v_0 \\ u_2 = v_2 - v_1 \\ \vdots \\ u_n = v_n - v_{n-1} \end{cases}$$

Propriété

*Étudier la suite $(v_n)_n$, c'est étudier la série $\sum(v_n - v_{n-1})$ (en posant $v_{-1} = 0$) appelée **série télescopique**.*

Démonstration

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_{-1} = v_n.$$

□

Corollaire

Soit $(v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La suite (v_n) et la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ ont même nature et, si elles sont convergentes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0.$$

Démonstration

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0.$$

□

Exemples

E 1 – Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et calcul de la somme.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

La série est télescopique, $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ donc la série est convergente, de somme 1.

E 2 – Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$$

La série est télescopique, $S_n = \ln(n+1) - 0 \to +\infty$ donc la série diverge.

Remarque

Dans la pratique, il est très rare qu'on prouve la convergence en calculant les sommes partielles et qu'on puisse calculer explicitement la somme de la série. Les séries géométriques et télescopiques en sont de rares exemples.

3 Espace vectoriel des séries convergentes

Propriété

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum (u_n + \lambda v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Démonstration

$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$, $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} v_n$ alors $\sum_{k=0}^{n} (u_n + \lambda v_n) = S_n + \lambda \Sigma_n$. □

Remarques

R1 – Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

R2 – Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors on ne peut rien dire de $\sum (u_n + v_n)$.

R3 – Si $\sum v_n$ diverge et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\sum (\lambda v_n)$ diverge si et seulement si $\lambda = 0$.

Propriété

Si $\sum u_n$ est une série à termes complexe, elle converge si et seulement si les séries $\sum \mathfrak{Re}\, u_n$ et $\sum \mathfrak{Im}\, u_n$ convergent, et on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Re}\, u_n + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Im}\, u_n$$

Remarque

Lorsqu'il y a convergence, $\mathfrak{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Re}(u_n)$ et $\mathfrak{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Im}(u_n)$.

4 Condition nécessaire de convergence, divergence grossière

Propriété : Divergence grossière

*Si $u_n \not\to 0$, alors $\sum u_n$ diverge. On parle de **divergence grossière**.*

⚠ *La réciproque est fausse !*

*Si $u_n \to 0$, **ON NE PEUT RIEN DIRE** sur la convergence de $\sum u_n$.*

Démonstration

$u_n = S_n - S_{n-1}$, donc si (S_n) converge, $u_n \to 0$.

Contre-exemple : si $u_n = \frac{1}{n}$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$: **série harmonique**.

$u_n \to 0$ mais $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$ donc $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
On verra plus tard que $H_n \sim \ln n$. □

5 Reste d'une série convergente

Définition

Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
On appelle **reste d'ordre n de la série $\sum u_n$** le nombre

$$R_n = S - S_n$$

qui n'a un sens que si la série converge.

Propriété

Avec les mêmes hypothèses, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k$.

Démonstration

$S_N - S_n \to S - S_n = R_n$ lorsque $N \to +\infty$ et $\sum_{k=n+1}^{N} u_k \to \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$ lorsque $N \to +\infty$ □

Exemple

Série géométrique, $|q| < 1$, $R_n = \dfrac{q^{n+1}}{1-q}$.

Propriété

*Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et R_n son reste d'ordre n, alors $R_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.*

Démonstration

$R_n = S - S_n$. □

II SÉRIES À TERMES RÉELS POSITIFS

Les résultats de cette partie sont valables pour des séries à terme général réel positif. Cependant, l'étude étant asymptotique, ils s'appliquent plus généralement pour des séries à terme général positif à partir d'un certain rang.

Dans le cas où le terme général, est de signe constant (à partir d'un certain rang), on se ramène à un terme général positif quitte à étudier $\sum(-u_n)$ si le signe est négatif.

1 Critères de convergence

Propriété

*Soit (u_n) suite **réelle positive**, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors*

(i) (S_n) est croissante

(ii) (S_n) à une limite finie ou $+\infty$.

(iii) $\sum u_n$ converge si et seulement si (S_n) est majorée.

Démonstration

$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0.$ □

2 Comparaisons de termes généraux positifs

Théorème : Comparaison des séries à termes positifs : cas de convergence

*Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**.*
Si $\sum v_n$ converge et que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

- $u_n = \mathrm{O}(v_n)$,
- $u_n = \mathrm{o}(v_n)$,
- $u_n \leqslant v_n$ *à partir d'un certain rang,*
- $u_n \sim v_n$,

alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration

Dans le premier cas, on a $n_0 \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, n \geqslant n_0,\ \ u_n \leqslant M v_n$.
Si S_n et Σ_n désignent respectivement les sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$, alors, tout étant positif, $S_n \leqslant S_{n_0} + M(\Sigma_n - \Sigma_{n_0})$ à partir du rang n_0. Comme $\sum v_n$ converge, (Σ_n) est majorée donc (S_n) majorée donc $\sum u_n$ converge.
Les trois autres cas sont des cas particuliers du premier. □

Corollaire : Comparaison des séries à termes positifs : cas de divergence

*Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**.*
Si $\sum u_n$ diverge et que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

- $u_n = \mathrm{O}(v_n)$,
- $u_n = \mathrm{o}(v_n)$,
- $u_n \leqslant v_n$ *à partir d'un certain rang,*
- $u_n \sim v_n$,

alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration

Contraposée du théorème. □

Exemples

E1 – $\sum \frac{1}{n2^n}$ converge car à termes positifs et pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$ terme général d'une série (géométrique) convergente.

E2 – $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car à termes positifs et pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ terme général d'une série (télescopique) convergente. (On peut montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.)

E3 – $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car à terme positif et si $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Propriété

*Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs** telles que $u_n \sim v_n$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Démonstration

Symétrie de l'équivalence. □

Remarques

R1 – Attention, pour les autres relations de comparaisons, ce n'est pas une équivalence ! Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $\sum u_n$ converge, on ne peut rien dire de $\sum v_n$ en général.

Exemple

$\frac{1}{n^2} = \mathrm{O}(1)$, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge mais $\sum 1$ diverge.

R2 – Plus généralement, pour des séries réelles, il suffit que l'une des deux soit de signe constant à partir d'un certain rang, l'autre aura alors le même signe par équivalence et le résultat reste vrai.

Exemples

E1 – $\sum \frac{1}{n}$ diverge car à termes positifs $\frac{1}{n} \sim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$ terme général d'une série (télescopique) divergente.

E2 – $\sum \sin \frac{1}{n^2}$ converge car $\sin \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ donc à termes positifs à partir d'un certain rang et $\sum \frac{1}{n^2}$

convergente. $\sum \sin \frac{1}{n^3}$ converge et $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

3 Critère de d'Alembert

Propriété : Critère de d'Alembert

*Soit (u_n) suite **à termes réels strictement positifs** tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in [0, +\infty].$$

- *Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
- *Si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire en général (cas douteux).*

Démonstration

- Si $\ell > 1$, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 = \frac{1}{1}$ avec $\sum 1$ divergente donc il y a divergence (grossière). (En fait, $u_n \to +\infty$!)
- Si $\ell < 1$ et $\ell < k < 1$, à partir d'un certain rang N, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$ donc $u_n \leqslant k^{n-N} u_N$ avec $\sum k^n$ convergente. Donc, comme tout est positif, par comparaison, $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$, on ne peut rien dire en général. Exemple : $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$. □

Exemples

E1 – Série exponentielle : pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge (vers e^x, démonstration avec l'inégalité de Taylor-Lagrange... qui redonne la convergence !).

E2 – $\sum \frac{n!}{n^n}$. Autre justification possible : termes positifs et d'après la formule de Stirling, $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, donc $\frac{n!}{n^n} \sim e^{-n}\sqrt{2\pi n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées.

III CONVERGENCE ABSOLUE

1 Définition

Définition

Une série $\sum u_n$ à valeur dans $\mathbb{K}$ est dite **absolument convergente** lorsque $\sum |u_n|$ converge.

2 Condition suffisante de convergence

Théorème : Convergence absolue ⇒ convergence

Si $\sum u_n$ à valeurs réelles ou complexes converge absolument (donc si $\sum |u_n|$ converge), alors $\sum u_n$ converge.

La réciproque est fausse.

Démonstration

- **Cas où** $\mathbb{K}=\mathbb{R}$: On écrit $u_n = u_n^+ - u_n^-$ avec

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n \text{ si } u_n \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad u_n^- = \begin{cases} -u_n \text{ si } u_n \leqslant 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

  Comme $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.

  Donc, par linéarité, $\sum u_n = \sum (u_n^+ - u_n^-)$ converge.
- **Cas où** $\mathbb{K}=\mathbb{C}$: $\sum \mathfrak{Re}\, u_n$ et $\sum \mathfrak{Im}\, u_n$ convergent absolument car $|\mathfrak{Re}\, u_n| \leqslant |u_n|$ et $|\mathfrak{Im}\, u_n| \leqslant |u_n|$ donc convergent.

Pour la réciproque fausse, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais elle ne converge pas absolument.

□

Remarque

Lorsqu'une série est convergente mais n'est pas absolument convergente, on dit parfois qu'elle est semi-convergente.

3 Relations de comparaison et convergence absolue

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes. Si (v_n) **est à valeurs réelles positives** telle que $\sum v_n$ converge et si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

- $u_n = \mathrm{O}(v_n)$,
- $u_n = \mathrm{o}(v_n)$,
- $u_n \sim v_n$,

alors $\sum u_n$ converge absolument donc converge.
En effet, si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ ou $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ ou $u_n \sim v_n$ alors $|u_n| = \mathrm{O}(v_n)$.

Remarque

⚠ Si u_n et v_n ne sont pas de signe constant à partir d'un certain rang (il suffirait que l'une des deux le soit), on ne peut **RIEN** dire si $u_n \sim v_n$.

Exemple

Soit $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
$\sum u_n$ est télescopique et converge, donc $\sum v_n$ diverge par addition à la série harmonique.
Or $u_n \sim \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{\sqrt{n}}$ donc $\dfrac{1}{n} = \mathrm{o}(u_n)$ donc $v_n \sim u_n$.

4 Formule de Striling

Théorème : Formule de Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Démonstration

- **Première étape** : On montre que $n! \sim K(n/\mathrm{e})^n \sqrt{n}$ avec $K > 0$.

  Soit $u_n = \dfrac{n!}{(n/\mathrm{e})^n \sqrt{n}}$. L'idée est de démontrer que $(\ln u_n)$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum (\ln u_{n+1} - \ln u_n) = \sum \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge. Or

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\mathrm{e}}{(1+1/n)^{n+1/2}}$$

  donc

$$\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

  Comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, $\ln u_n \to \ell \in \mathbb{R}$ et $u_n \to \mathrm{e}^\ell = K$ d'où le résultat.

- **Deuxième étape** : Pour déterminer K, on utilise le résultat classique des intégrales de Wallis : si $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$, alors $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_{n+1}$, puis (I_n) décroît, puis $I_{n+1} \sim I_n$, puis $(n+1)I_n I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$, puis $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ donc $I_{2n} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ et

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n n!^2} \frac{\pi}{2} \sim \frac{K\pi(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{2n}}{2 \cdot 4^n K^2 n^{2n} \mathrm{e}^{-2n} n} = \frac{\pi}{K\sqrt{2n}}$$

d'où $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \sim \dfrac{\pi}{K\sqrt{2n}}$ puis $K \sim \sqrt{2\pi}$ donc $K = \sqrt{2\pi}$. □

IV COMPARAISON SÉRIE-INTÉGRALE

1 Comparaison et caractérisation de convergence

Propriété : Comparaison série-intégrale d'une fonction décroissante

Si $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ décroît et est continue par morceaux alors

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant f(k)$$

On a alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t+f(n)\leqslant\sum_{k=0}^n f(k)\leqslant f(0)+\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

et

$$\int_p^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=p}^n f(k)\leqslant\int_{p-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

si f est continue par morceaux sur $[p-1,n]$.

Remarques

R1 – Le plus important est de savoir retrouver ce résultat sur un dessin.

R2 – On peut aussi faire une comparaison série-intégrale dans le cas d'une fonction croissante.

Dessin

Propriété

*Si $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ décroissante, **positive** et continue par morceaux alors $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\left(\int_{n_0}^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge.*

Démonstration

$\left(\int_{n_0}^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge si et seulement si elle est majorée si et seulement si S_n est majorée si et seulement si $\sum f(n)$ converge car ces suites sont croissantes. □

Remarques

R1 – En cas de convergence, si on note $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=\lim\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$, on a en outre

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)\leqslant f(0)+\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

R2 – $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ étant croissante, dire que $\left(\int_0^n f(t)\,dt\right)_n$ converge revient exactement à dire que $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ a une limite en $+\infty$.

2 Séries de Riemann

Théorème : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

Démonstration

Si $\alpha \leqslant 0$, il y a divergence grossière.
Si $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right)$$

a une limite finie si et seulement si $\alpha > 1$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est positive, décroissante, et continue, on obtient le résultat.

Pour $\alpha = 1$, cela a déjà été vu et se retrouve avec $\int_1^n \frac{1}{t}\,dt = \ln n \to +\infty$. □

Remarques

R1 – On pose pour $\alpha > 1$, $\zeta(\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$. ζ est appelée fonction ζ de Riemann.

R2 – Règle du $n^\alpha u_n$: Soit $\sum u_n$ une série à termes réels.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ est bornée (par exemple $n^\alpha u_n \to 0$), alors $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ donc $\sum u_n$ converge (absolument).
- S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $n^\alpha u_n \to +\infty$, alors à partir d'un certain rang $u_n \geqslant 0$ et $\frac{1}{n^\alpha} = \mathrm{o}(u_n)$ donc $\sum u_n$ diverge.
- S'il existe $\alpha, \ell \in \mathbb{R}_*^+$ tels que $u_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha}$, alors à partir d'un certain rang $u_n \geqslant 0$ et $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemples

E1 – $u_n = \dfrac{\cos n}{n^3}$.

E2 – $u_n = \mathrm{e}^{-n^\beta}$ où $\beta \in \mathbb{R}$.

E3 – $u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}$.

E4 – $u_n = \frac{\ln n}{n^\beta}$ pour $\beta \in \mathbb{R}$.

E5 – $u_n = \dfrac{\operatorname{Arctan} n}{\sqrt{n+1}}$

3 Évaluation des sommes partielles et des restes

Exemple

$\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln n}$: $f : t\mapsto \frac{1}{t\ln t}$ est décroissante et positive sur $[2,+\infty[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\int_2^n \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{n\ln n}\leqslant \sum_{k=2}^n\frac{1}{k\ln k}\leqslant \frac{1}{2\ln 2}+\int_2^n\frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_2^n \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{n\ln n}\leqslant \sum_{k=2}^n\frac{1}{k\ln k}\leqslant \frac{1}{2\ln 2}+\int_2^n\frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\ln(\ln n)-\ln(\ln(2))+\frac{1}{n\ln n}\leqslant \sum_{k=2}^n\frac{1}{k\ln k}\leqslant \frac{1}{2\ln 2}+\ln(\ln n)-\ln(\ln(2))$$

Donc $\sum_{k=2}^n\frac{1}{k\ln k}\to+\infty$.

En fait, on a obtenu mieux que cela : $\sum_{k=2}^n\frac{1}{k\ln k}\sim\ln(\ln n)$.

Remarque

Plus généralement avec les hypothèses précédentes, si $\sum f(n)$ diverge et $f(n)\to 0$, $S_n\sim F(n)$ où F primitive de f.

Exemples

E 1 – **Très classique !** $H_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$. Par comparaison série-intégrale,

$$\ln n+\frac{1}{n}\leqslant H_n\leqslant \ln n$$

donc $H_n\sim\ln n$.
Puis, si $v_n=H_n-\ln n$,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{-1}{n(n+1)}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

terme général d'une série convergente, donc $v_n=H_n-\ln n\to\gamma\in\mathbb{R}$ où γ est appelé constante d'Euler.

$$H_n=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$$

E 2 – Équivalent de $\sum_{k=0}^n k^\alpha$ où $\alpha>0$.

E 3 – $S_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}$. On cherche une estimation de $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$. Par comparaison à une intégrale,

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{N+1}=\int_{n+1}^{N+1}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=n+1}^N\frac{1}{k^2}\leqslant\int_n^N\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}-\frac{1}{N}$$

puis en faisant $N\to+\infty$

$$\frac{1}{n+1} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n}$$

et $R_n \sim \frac{1}{n}$ (convergence lente.) Pour une précision de 10^{-2} dans le calcul de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, il faut prendre $n = 100$.
Peut-on faire mieux ? Oui ! On a aussi

$$\left|S - \left(S_n + \frac{1}{n}\right)\right| = \left|R_n - \frac{1}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

En considérant $S_n + \frac{1}{n}$, on obtient une convergence en $\frac{1}{n^2}$. Cette fois $n = 10$ suffit ! On parle de technique d'accélération de convergence.

Remarque

Plus généralement avec les hypothèses précédentes, si $\sum f(n)$ converge de reste R_n, $I = \int_0^{\infty} f(t)\,dt$ et $I_n = \int_0^n f(t)\,dt$,

$$I - I_{n+1} \leqslant R_n \leqslant I - I_n$$

ce qui permet d'avoir une estimation asymptotique de R_n.

V Séries alternées (Spé)

Théorème : Critère Spécial sur des Séries Alternées

Si $(u_n)_n$ est une suite réelle, décroissante, telle que $u_n \to 0$, alors $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.

Remarque

$\forall\, n, \quad u_n \geqslant 0$ et donc $(-1)^n u_n$ a un signe alterné. Quitte à tout multiplier par -1, le résultat s'applique aussi à $\sum (-1)^{n-1} u_n$.

Démonstration

(S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. □

Remarque

On a en outre que $S_n \leqslant S \leqslant S_{n+1}$ ou $S_{n+1} \leqslant S \leqslant S_n$ pour tout n.
Donc $|R_n| = |S - S_n| \leqslant |S_{n+1} - S_n| = u_{n+1}$, ce qui permet d'avoir des informations sur la vitesse de convergence.

Exemple

Pour tout $\alpha > 0$, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge. C'est le cas en particulier de $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ comme on l'a déjà vu. On peut retrouver la valeur de sa somme grâce au développement $H_n = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$. En effet,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p} \\ &= H_{2n} - H_n = \ln 2n - \ln n + \mathrm{o}(1) = \ln 2 + \mathrm{o}(1) \end{aligned}$$

Donc $S_{2n} \sim \ln 2$ puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$. Convergence en $\frac{1}{n}$, donc lente.

VI DÉVELOPPEMENT DÉCIMAL

Théorème

Tout réel positif x s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = N + 0,a_1a_2\dots = N + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

où $N \in \mathbb{N}$ et $(a_n)_{n\geqslant 1} \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}^*}$ dont les termes ne sont pas constamment égaux à 9 à partir d'un certain rang.

On a en outre $N = \lfloor x \rfloor$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10\left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor$.

Définition

Une telle écriture est appelée **développement décimal illimité propre** de x.

Démonstration : Non exigible.

Remarquons qu'une telle série converge bien ($\mathrm{O}(1/10^n)$).

De plus, si on considère cette série, et si l'on note $x_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ (approximation décimale par défaut de x), alors on a déjà vu que $x_n \to x$.
Or $\dfrac{a_n}{10^n} = x_n - x_{n-1}$ donc la série est télescopique de somme $x - x_0 = x - \lfloor x \rfloor$.

De plus, la suite des a_n ne stationne pas sur 9 . Sinon, on considérant p tel que $10^p x$ a une partie décimale ne contenant que des 9, on obtient que $10^p x = 1$ donc $x = 10^{-p}$ et ainsi, si $n > p$, $a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor = 0$, ce qui est contradictoire.

Cela donne l'existence.

Lemme

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n} = 1$ *avec pour tout* n, $b_n \in [\![0,9]\!]$, *alors, pour tout* n, $b_n = 9$.

Démonstration

Soit $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n} = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ tel que tous les b_n ne soient pas égaux à 9. Montrons que $x < 1$.

Soit n_0 le plus petit entier tel que $b_{n_0} \neq 9$ et

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n_0 - 1} b_k \cdot 10^{-k} + 9 \cdot 10^{-n_0} = 0, b_0 b_1 \dots b_{n_0 - 1} 9.$$

Alors $1 - x_0 > 0$ et comme $b_{n_0} \neq 9$, $x \leqslant x_0 < 1$. □

Pour l'unicité, si on a un telle écriture, alors

$$10^n x = 10^n N + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{k-n}} = 10^n N + \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{n-k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{k-n}}$$

avec $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{k-n}} \leqslant 1$. Par hypothèse et d'après le lemme, c'est en fait < 1, et on obtient $\lfloor 10^n x \rfloor = 10^n N + \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{n-k}$ ce qui redonne facilement $a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor$.

$N = \lfloor x \rfloor$ en utilisant le lemme également. □

Remarque

Les seuls nombres réels à avoir deux développements décimaux illimités sont les nombres décimaux (d'après le lemme).

Exemple

$]0,1[$, donc $\mathbb{R}$, n'est pas dénombrable.