Déterminant

Extrait du programme officiel :

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :
- *introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;*
- *établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;*
- *indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.*

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Formes n-linéaires alternées	
Forme n-linéaire alternée.	La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures.
Antisymétrie, effet d'une permutation.	Si f est une forme n-linéaire alternée et si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1,\dots,x_n)=0$.
b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base	
Si e est une base, il existe une et une seule forme n-linéaire alternée f pour laquelle $f(e)=1$. Toute forme n-linéaire alternée est un multiple de $\det_e$.	Notation $\det_e$. La démonstration de l'existence n'est pas exigible.
Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.	Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).
Comparaison, si e et e' sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$.	
La famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1,\dots,x_n)\neq 0$.	
Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.	$\leftrightarrows$ PC : orientation d'un espace de dimension 3.
c) Déterminant d'un endomorphisme	
Déterminant d'un endomorphisme.	
Déterminant d'une composée.	Caractérisation des automorphismes.
d) Déterminant d'une matrice carrée	
Déterminant d'une matrice carrée.	
Déterminant d'un produit.	Relation $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$. Caractérisation des matrices inversibles.
Déterminant d'une transposée.	
e) Calcul des déterminants	
Effet des opérations élémentaires.	
Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne.	
Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, d'une matrice triangulaire.	
Déterminant de Vandermonde.	
f) Comatrice	
Comatrice.	Notation $\mathrm{Com}(A)$.
Relation $A\,{}^t\mathrm{Com}(A)={}^t\mathrm{Com}(A)\,A=\det(A)\,I_n$.	Expression de l'inverse d'une matrice inversible.

TABLE DES MATIÈRES

I APPLICATIONS MULTILINÉAIRES

1 Définition

Définition

Soit $\mathbb{K}$ corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$, E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Une application $f : E^n \to F$ est dite **n-linéaire** lorsque pour tout $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, et tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$f_i : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \end{array}\right. \text{ est linéaire.}$$

(Linéarité par rapport à la i^{e} variable.) c'est-à-dire $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n,\ \ \forall i \in [\![1, n]\!],\ \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in E,\ \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x} + \lambda\vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) = {} & f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \\ & + \lambda f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \end{aligned}$$

On note $\mathscr{L}_n(E, F)$ l'ensemble des formes n-linéaires.
Lorsque $F = \mathbb{K}$, on parle de **forme n-linéaire**.

Remarques

R 1 – Une application n-linéaire se développe comme un produit : par exemple, si f est bilinéaire,

$$f\left(\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}', \gamma\vec{y}+\delta\vec{y}'\right) = \alpha\gamma f(\vec{x},\vec{y}) + \beta\gamma f\left(\vec{x}',\vec{y}\right) + \alpha\delta f\left(\vec{x},\vec{y}'\right) + \beta\delta f\left(\vec{x}',\vec{y}'\right).$$

R 2 – $\mathscr{L}_n(E,F) \neq \mathscr{L}(E^n,F)$! Si, par exemple, $n=2$ et f bilinéaire alors :

$$f(\vec{x}+\lambda\vec{x}', \vec{y}+\lambda\vec{y}') = f(\vec{x},\vec{y}) + \lambda(f(\vec{x}',\vec{y}) + f(\vec{x},\vec{y}')) + \lambda^2 f(\vec{y},\vec{y}')$$

tandis que si f est linéaire,

$$f(\vec{x}+\lambda\vec{x}', \vec{y}+\lambda\vec{y}') = f(\vec{x},\vec{y}) + \lambda f(\vec{y},\vec{y}')$$

Exemples

E 1 – L'application nulle est n-linéaire.

E 2 – Le produit $(x_1,\dots,x_n) \mapsto x_1 \times \cdots \times x_n$ sur $\mathbb{K}^n$, sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, est n-linéaire.

E 3 – $\left|\begin{array}{ccc} (\mathscr{L}(E))^2 & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ (u,v) & \longmapsto & u\circ v \end{array}\right.$ est bilinéaire.

E 4 – Le produit scalaire usuel $(\vec{x},\vec{y}) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.

E 5 – $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme bilinéaire sur $\mathscr{C}([a,b])$.

Remarque

Si E est de dimension finie n, f est n-linéaire sur E, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E, et si on note $(x_{1,j},\dots,x_{n,j})$ les coordonnées de $\vec{x}_j \in E$ dans la base $\mathscr{B}$, donc $\vec{x}_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j}\vec{e}_i$, alors

$$f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1,1}\vec{e}_{i_1},\dots,\sum_{i_n=1}^{n} x_{i_n,n}\vec{e}_{i_n}\right) = \sum_{1\leqslant i_1,\dots,i_n\leqslant n} x_{i_1,1}\dots x_{i_n,n} f(\vec{e}_{i_1},\dots,\vec{e}_{i_n})$$

2 Propriétés

Propriétés

(i) Si $f \in \mathscr{L}_n(E,F)$ et si l'un des $\vec{x}_i$ est nul, $f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) = \vec{0}_F$.

(ii) $\mathscr{L}_n(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration

(i) f_i est linéaire.
(ii) sev de $F^{(E^n)}$. □

3 Formes n-linéaires symétriques, antisymétriques, alternées

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}_n(E,\mathbb{K})$.

- f est dite **symétrique** si et seulement si
$$\forall (\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n) \in E^n,\quad \forall i \neq j,\quad f(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_i,\ldots,\vec{x}_j,\ldots,\vec{x}_n) = f(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_j,\ldots,\vec{x}_i,\ldots,\vec{x}_n).$$
- f est dite **antisymétrique** si et seulement si
$$\forall (\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n) \in E^n,\quad \forall i \neq j,\quad f(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_i,\ldots,\vec{x}_j,\ldots,\vec{x}_n) = -f(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_j,\ldots,\vec{x}_i,\ldots,\vec{x}_n).$$
- f est dite **alternée** si et seulement si
$$\forall (\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n) \in E^n,\quad \forall i \neq j,\quad f(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_i,\ldots,\vec{x}_i,\ldots,\vec{x}_n) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Exemples

E 1 – $f : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{x},\vec{y}) & \longmapsto & x_1y_2 - x_2y_1 \end{array}\right.$ est une forme bilinéaire antisymétrique et alternée.

E 2 – $f : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{x},\vec{y}) & \longmapsto & x_1x_2 + y_1y_2 \end{array}\right.$ est une forme bilinéaire symétrique

Propriétés : Caractérisations

Soit $f \in \mathcal{L}_n(E,\mathbb{K})$.

(i) f est symétrique si et seulement si
$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\quad \forall (\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n) \in E^n,\quad f(\vec{x}_{\sigma(1)},\ldots,\vec{x}_{\sigma(n)}) = f(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n).$$

(ii) f est antisymétrique si et seulement si
$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\quad \forall (\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n) \in E^n,\quad f(\vec{x}_{\sigma(1)},\ldots,\vec{x}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n).$$

(iii) f est alternée si et seulement si
$$\forall (\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n) \in E^n,\quad (\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n) \text{ liée} \Longrightarrow f(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Démonstration

$\Longleftarrow$: facile avec une transposition ou une famille contenant le vecteur nul.

$\Longrightarrow$: σ se décompose en produit de transpositions : $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_p$. Chaque τ_i ne change pas f si elle est symétrique, et sort un signe moins si f est antisymétrique.

Ainsi, par récurrence, l'action de σ ne change pas f et fait sortir $(-1)^p = \varepsilon(\sigma)$ si f est antisymétrique.

Finalement, si f est alternée et $(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)$ liée, on a i tel que $\vec{x}_i = \sum_{j\neq i} \lambda_j \vec{x}_j$, alors $f(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n) = \sum_{j\neq i} \lambda_j f(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_j,\ldots,\vec{x}_j,\ldots,\vec{x}_n) = 0.$ □

Propriété

Soit $f \in \mathcal{L}_n(E,\mathbb{K})$. Si f est alternée, alors f est antisymétrique.
La réciproque est vraie si $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, c'est-à-dire si $2_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Démonstration

Si f est alternée, $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i+\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i+\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_n) &= 0_{\mathbb{K}}\\
&= f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n)+f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_n)\\
&\quad + f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n)+f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_n)\\
&= f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_n)\\
&\quad + f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n).
\end{aligned}$$

Donc f est antisymétrique.

Si f est antisymétrique, en permutant, $f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n) = -f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n)$ donc $2_{\mathbb{K}} f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n) = 0_{\mathbb{K}}$ et donc si $2_K \neq 0_K$, $f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n) = 0_{\mathbb{K}}$ et f est alternée. □

4 L'espace $\Lambda_n(E)$

Ici, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$ avec $\mathbb{K}$ commutatif qui n'est pas de caractéristique 2.

Notation

On note $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E.

Théorème

Si $n = \dim E$, l'ensemble $\Lambda_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

Démonstration

$\Lambda_n(E)$ est facilement un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$.

Soient $f \in \Lambda_n(E)$, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E. On a déjà vu que si on note $(x_{1,j},\dots,x_{n,j})$ les coordonnées de $\vec{x}_j \in E$ dans la base $\mathscr{B}$, donc $\vec{x}_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j}\vec{e}_i$, alors

$$f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1,1}\vec{e}_{i_1},\dots,\sum_{i_n=1}^{n} x_{i_n,n}\vec{e}_{i_n}\right) = \sum_{1\leqslant i_1,\dots,i_n\leqslant n} x_{i_1,1}\dots x_{i_n,n} f(\vec{e}_{i_1},\dots,\vec{e}_{i_n})$$

mais comme ici f est alternée, on peut indexer la somme par $1 \leqslant i_1,\dots,i_n \leqslant n$ deux à deux distincts, ce qui revient à prendre une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que pour tout j, $i_j = \sigma(j)$. On obtient alors

$$f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(n),n} f(\vec{e}_{\sigma(1)},\dots,\vec{e}_{\sigma(n)})$$

Comme f est aussi antisymétrique,

$$f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) = \left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(n),n}\right) f(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$$

On pose $d : \left|\begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(n),n}\end{array}\right.$

On a que pour tout $f \in \Lambda_n(E)$, $f = f(\mathscr{B})\cdot d$ et donc $\Lambda_n(E) \subset \operatorname{Vect} d$.

Montrons que $d \in \Lambda_n(E)$.

- La n-linéarité vient de la linéarité l'application qui à un vecteur x associe sa i^{e} coordonnées dans $\mathscr{B}$.
- Pour montrer qu'elle est alternée, on montre qu'elle est antisymétrique :

$$d(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n) = -d(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_n)$$

avec le changement d'indice $\sigma' = \sigma\circ(i\ j)$.

Donc $\Lambda_n(E) = \operatorname{Vect} d$.

Dernier point : $d \neq 0$: il suffit de vérifier que $d(\mathscr{B}) = 1$. □

Remarque

Deux formes n-linéaires alternées sur E sont donc toujours proportionnelles.

II Déterminant d'une famille de vecteurs

1 Définition

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E. Il existe une unique forme n-linéaire alternée sur E dont l'image de $\mathcal{B}$ est égale à 1.

Démonstration

$f = \lambda d$ et $f(\mathcal{B}) = \lambda$ donc $f = d$. □

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.

On appelle **déterminant dans la base** $\mathcal{B}$ l'unique forme n-linéaire alternée sur E notée $\det_{\mathcal{B}}$ telle que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Si pour $1 \leqslant j \leqslant n$, $\vec{x}_j \in E$ de coordonnées $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ dans $\mathcal{B}$, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n}$$

On note

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Remarques

R 1 – On place dans les colonnes les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\mathcal{F}$:

$$\begin{array}{c} \\ \det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc} \begin{vmatrix} & & \dots & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \qquad\quad \uparrow \\ \vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \dots \quad \vec{x}_n \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \ \vec{e}_1 \\ \leftarrow \ \vec{e}_2 \\ \quad\ \vdots \\ \leftarrow \ \vec{e}_n \end{array}$$

R 2 – Un déterminant est nécessairement carré.

R 3 – $\forall f \in \Lambda_n(E), \ \exists \lambda, \ \ f = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. De plus, $\lambda = f(\mathcal{B})$.

R 4 – Par définition, le déterminant est n-linéaire alterné. En particulier, le déterminant d'une famille liée est nul.

Exemple

Si $n=2$, on trouve $\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=x_{1,1}x_{2,2}-x_{2,1}x_{1,2}$.

2 Propriétés

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ des bases de E.

(i) ***Formule de changement de base*** *:* $\det_{\mathscr{B}'}=\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})\det_{\mathscr{B}}$.

(ii) $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\neq 0$ *et* $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})=\left(\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\right)^{-1}$.

(iii) $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ *est libre/une base de E si et seulement si* $\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\neq 0_{\mathbb{K}}$.

Démonstration

(i) $\det_{\mathscr{B}'}\in\Lambda_n(E)$.

(ii) On applique (i) à $\mathscr{B}$.

(iii) Un sens déjà vu. Pour l'autre, c'est le caractère alterné du déterminant. □

Remarques

R 1 – Dans le plan, le déterminant permet de caractériser la colinéarité. Par exemple, une droite passant par $\mathrm{A}(x_0,y_0)$ et dirigée par $\vec{u}(\alpha,\beta)$ a pour équation $\begin{vmatrix} x-x_0 & \alpha \\ y-y_0 & \beta \end{vmatrix}=0$.

R 2 – Dans l'espace, le déterminant permet de caractériser la coplanérité. Par exemple, un plan passant par $\mathrm{A}(x_0,y_0,z_0)$ et dirigée par $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\vec{v}(\alpha',\beta',\gamma')$ a pour équation $\begin{vmatrix} x-x_0 & \alpha & \alpha' \\ y-y_0 & \beta & \beta' \\ z-z_0 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix}=0$.

III DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

On fixe E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{B}$ une base de E.

1 Définition

Propriété

Soit $u\in\mathscr{L}(E)$. Alors $\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))$ *ne dépend pas de $\mathscr{B}$.*

Démonstration

Soit $f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)=\det_{\mathscr{B}}(u(\vec{x}_1),\dots,u(\vec{x}_n))$. Alors $f\in\Lambda_n(E)$ car u est linéaire et $\det_{\mathscr{B}}$ est n-linéaire alterné.
Donc $f=f(\mathscr{B})\det_{\mathscr{B}}=\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))\det_{\mathscr{B}}$ et donc

$$\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')=f(\mathscr{B}')=\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}'))=\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\det_{\mathscr{B}'}(u(\mathscr{B}'))$$

et on conclut car $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\neq 0$. □

Définition

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **déterminant** de u le scalaire $\det u = \det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B}))$ où $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E.

Si $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, $\det u = \det_{(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)}(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$.

2 Propriétés

Propriétés

(i) *Si* $u \in \mathscr{L}(E)$,
$$\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E, \quad \det_{\mathscr{B}}(u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_n)) = \det u \times \det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n).$$

(ii) $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.

(iii) $\forall u, v \in \mathscr{L}(E), \ , \det(u \circ v) = \det u \times \det v$.

(iv) ⚠ $\forall u \in \mathscr{L}(E), \ \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ , \det(\lambda u) = \lambda^{\boldsymbol{n}} \det u$.

(v) *Soit* $u \in \mathscr{L}(E)$. $u \in \mathscr{GL}(E) \iff \det u \neq 0$.

(vi) $\det : (\mathscr{GL}(E), \circ) \to (\mathbb{K}^*, \times)$ *est un morphisme de groupes.*

(vii) *Si* $u \in \mathscr{GL}(E)$, $\det\left(u^{-1}\right) = (\det u)^{-1}$.

Remarque

⚠ det n'est pas linéaire : $\det(u+v) \neq \det u + \det v$ en général. Exemple $\pm \mathrm{id}_E$ en dimension impaire.

Démonstration

(i) f dans la preuve précédente.

(ii) $\det(\mathrm{id}_E) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

(iii) découle de (i).

(iv) n-linéarité.

(v) $u \in \mathscr{GL}(E) \iff u(\mathscr{B})$ base de $E \iff \det u \neq 0$.

(vi) ok.

(vii) Propriété de morphisme de groupes. □

IV Déterminant d'une matrice carrée

1 Définition

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}_n}$. On définit le **déterminant** de A par
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Remarque

Dans chaque terme de la somme, on choisit exactement un terme par colonne et par ligne.

2 Propriétés

Propriétés

(i) *Si $C_1, \dots, C_n$ sont les vecteurs colonnes de A et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$,* $\det A = \det_{\mathscr{B}}(C_1, \dots, C_n)$.

(ii) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $u \in \mathscr{L}(E)$ représenté par A dans une base de E, alors* $\det A = \det u$.

(iii) $\det I_n = 1$.

(iv) *Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,* $\det AB = \det A \det B$.

(v) ⚠ *Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,* $\det(\lambda A) = \lambda^{\boldsymbol{n}} \det A$.

(vi) $\det A^\intercal = \det A$.

(vii) $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}$.

(viii) $\det : (\mathscr{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \to (\mathbb{K}^*, \times)$ *est un morphisme de groupes.*

(ix) *Si A est inversible,* $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$.

(x) *Des matrices semblables ont même déterminant : le déterminant est un invariant de similitude.*

Remarque

⚠ $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ en général : det n'est pas linéaire.

Démonstration

(i) à (v) définitions puis conséquences des propriétés du déterminant d'un endomorphisme. (vi) :

$$\begin{aligned}
\det\left(A^\intercal\right) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \\
&\underset{j=\sigma(i)}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(i),i} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1),1} \dots a_{\sigma^{-1}(n),n} \\
&\underset{\sigma'=\sigma^{-1}}{=} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma'(1),1} \dots a_{\sigma'(n),n} = \det A.
\end{aligned}$$

Le dernier changement d'indice étant licite car $\left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \\ \sigma & \longmapsto & \sigma^{-1} \end{array} \right.$ est bijective.

(viii) : par (iv).
(ix) : par morphisme de groupe ou $\det\left(A^{-1}\right) \times \det A = \det\left(A^{-1} \times A\right) = \det I_n = 1$.
(x) Deux matrices semblables représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes ou $\det\left(P^{-1}AP\right) = \det P^{-1} \det A \det P = \det A$. □

V Calculs de déterminants

1 Opérations élémentaires

Propriété

(i) *Si une ligne ou une colonne est nulle, ou une combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul.*

(ii) *On ne change pas le déterminant avec les opérations*

$$L_i \leftarrow L_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k L_k \quad \text{ou} \quad C_j \leftarrow C_j + \sum_{k \neq i} \lambda_k C_k$$

(transvections successives.)

(iii) *En multipliant par λ une ligne ou une colonne, on multiplie par λ le déterminant.*

(iv) *Si on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1. Plus généralement, si on permute les lignes ou les colonnes avec une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on multiplie le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$.*

(v) $$\begin{vmatrix} d_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (*) & & d_n \end{vmatrix} = d_1 \times \cdots \times d_n.$$

Remarques

R 1 – ⚠ Pas d'opération du type $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ car cela modifie le déterminant.

R 2 – On retrouve très facilement le critère d'inversibilité des matrices triangulaires.

Démonstration

Il suffit de raisonner sur les colonnes quitte à transposer.

(i) $\det_{\mathscr{B}}$ est alterné.

(ii) Par linéarité par rapport à la j^e colonne, et par caractère alterné,

$$\det_{\mathscr{B}}\left(C_1, \dots, C_j + \sum_{k \neq j} \lambda_k C_k, \dots, C_n\right) = \det(C_1, \dots, C_n) + \sum_{k \neq j} \lambda_i \underbrace{\det(C_1, \dots, C_k, \dots, C_k, \dots, C_n)}_{=0}$$

(iii) Linéarité par rapport à la i^e colonne.

(iv) Anti-symétrie.

(v) Dans $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$, le seul terme contenant éventuellement des cœfficients non nuls est celui pour $\sigma = \mathrm{id}$ ($\sigma(1) = 1$, puis $\sigma(2) = 2$, etc.). □

Exemples

E 1 – Si $(a,b)\in\mathbb{K}^2$ et $n\geqslant 2$ avec $C_1\leftarrow\sum C_i$ puis $L_i\leftarrow L_i-L_1$:

$$\begin{vmatrix} a & & (b)\\ & \ddots & \\ (b) & & a\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \dots & b\\ \vdots & a & & (b)\\ & & \ddots & \\ a+(n-1)b & (b) & & a\end{vmatrix} = \big(a+(n-1)b\big)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b\\ \vdots & a & & (b)\\ & & \ddots & \\ 1 & (b) & & a\end{vmatrix}$$

$$= \big(a+(n-1)b\big)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b\\ 0 & a-b & & (0)\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & (0) & & a-b\end{vmatrix} = \big(a+(n-1)b\big)(a-b)^{n-1}.$$

E 2 – Factoriser $\Delta=\begin{vmatrix} 2b & b-a-c & 2b\\ a-b-c & 2a & 2a\\ 2c & 2c & c-a-b\end{vmatrix}$

Avec $C_j\leftarrow C_j-C_1$ puis $L_1\leftarrow\sum L_i$ puis $L_2\leftarrow L_2+L_3$:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2b & -(a+b+c) & 0\\ a-b-c & a+b+c & a+b+c\\ 2c & 0 & -(a+b+c)\end{vmatrix} = (a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2b & -1 & 0\\ a-b-c & 1 & 1\\ 2c & 0 & -1\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0\\ a-b-c & 1 & 1\\ 2c & 0 & -1\end{vmatrix} = (a+b+c)^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ a-b-c & 1 & 1\\ 2c & 0 & -1\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ a-b+c & 1 & 0\\ 2c & 0 & -1\end{vmatrix} = -(a+b+c)^3.$$

2 Développements

a Mineurs et cofacteurs

Définition : Mineurs, cofacteurs, comatrice

Soient $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $i,j\in[\![1,n]\!]$.

- On appelle **mineur** d'indice (i,j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ obtenu en retirant L_i et C_j à A.
- On appelle **cofacteur** d'indice (i,j) le nombre $C_{i,j}=(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.
- On appelle **comatrice** de A la matrice de ses cofacteurs : $\tilde{A}=\operatorname{Com}A=(C_{i,j})_{i,j}=\big((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}\big)_{i,j}$.

Exemple

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Alors $\operatorname{Com}A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ -8 & 2 & -4\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Pour les signes à mettre devant les cofacteurs, c'est facile : ils sont alternés, et + sur la diagonale. Ici : $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$.

b Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Propriété

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) ***Développement par rapport à*** L_i *: Si $i \in [\![1, n]\!]$,*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} a_{i,j}.$$

(ii) ***Développement par rapport à*** C_j *: Si $j \in [\![1, n]\!]$,*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} a_{i,j}.$$

Exemple

Avec la matrice précédente :
- Développement par rapport à L_1 : $\det A = 1 - 2 - 1 = -2$.
- Développement par rapport à C_2 : $\det A = -2 + 2 - 2 = -2$.

Remarque

Plus il y a de zéros dans la ligne/colonne par rapport à laquelle on développe, plus c'est intéressant !

Démonstration

Sur les colonnes (il suffit de transposer pour passer aux lignes.)

Par n-linéarité du déterminant par rapport à ses colonnes, comme $C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$ où $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} D_{i,j}$ avec

$$D_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

En appliquant une permutation $\sigma = (j\, j+1 \cdots n)$ de signature $(-1)^{n-j}$ aux colonnes puis une permutation $\sigma = (i\, i+1 \cdots n)$ de signature $(-1)^{n-i}$ aux lignes, on obtient

$$D_{i,j} = (-1)^{n-j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} & 0 \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} & 1 \end{vmatrix}.$$

En notant $m_{i,j}$ les cœfficients de cette dernière matrice, on a alors, étant donné que seul le dernier cœfficient de la dernière colonne est non nul :

$$\begin{aligned} D_{i,j} &= (-1)^{i+j} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) m_{\sigma(1),1} \cdots m_{\sigma(n),n} = (-1)^{i+j} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) m_{\sigma(1),1} \cdots m_{\sigma(n-1),n-1} \\ &= (-1)^{i+j} \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\tilde{\sigma}) m_{\tilde{\sigma}(1),1} \cdots m_{\tilde{\sigma}(n-1),n-1} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} \end{aligned}$$

En effet :

- les permutations induites par les permutations de $\mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma(n) = n$ décrivent toutes les permutations de $\mathfrak{S}_{n-1}$, et elles ont même signature car même nombre d'inversion,
- $\Delta_{i,j}$ désigne le mineur de A car on ne considère plus cœfficients de la dernière ligne : on obtient donc directement le déterminant de la matrice extraite de A sans L_i et sans C_j. □

Exemple

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & & & (0) \\ \vdots & -1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & (0) & & -1 & 1 \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} 1 & & & (0) \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & 1 \end{vmatrix} = n$$

avec $C_1 \leftarrow \sum C_j$ puis un développement par rapport à C_1.

On aurait aussi pu développer par rapport à C_n et obtenir $D_n = D_{n-1} + 1$, et comme $D_1 = 1$, on retrouve $D_n = n$.

Remarque

On retrouve facilement, par récurrence, en faisant des développements,

$$\begin{vmatrix} d_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{vmatrix} = d_n \begin{vmatrix} d_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_{n-1} \end{vmatrix} = \cdots = d_1 \times \cdots \times d_n.$$

3 Déterminants par blocs

Propriété : Déterminant de matrice triangulaire par blocs

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, alors

$$\begin{vmatrix} A & (*) \\ (0) & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & (0) \\ (*) & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

Remarque

⚠ même lorsque toutes les matrices sont carrées, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C$ ou autre $\det(AD - BC)$ en général !

(cf TD)

Démonstration

- **Première méthode** : Soit la forme n-linéaire alternée
$$d:(C_1,\dots,C_n)\mapsto\begin{vmatrix} C_1|\cdots|C_n & (*) \\ (0) & B\end{vmatrix}.$$
On a alors $d=d(\mathscr{B})\det_{\mathscr{B}}$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Donc, en appliquant d aux colonnes de A, $\begin{vmatrix} A & (*) \\ (0) & B\end{vmatrix}=d(\mathscr{B})\det A$.
Or $d(\mathscr{B})=\begin{vmatrix} I_n & (*) \\ (0) & B\end{vmatrix}=\det B$ en effectuant n développement successifs par rapport à la première colonne.
- **Deuxième méthode** : On remarque que (multiplier à gauche par une matrice diagonale (par blocs) revient à multiplier les blocs-lignes par les blocs diagonaux correspondants)
$$\begin{pmatrix} A & C \\ (0) & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_n & (0) \\ (0) & B\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} A & C \\ (0) & I_p\end{pmatrix},$$
les déterminants des deux matrices se calculant facilement par développement successifs par rapport à C_1/dernière ligne. □

4 Déterminants de Vandermonde

Propriété

Soient $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{K}$,
$$V(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

Démonstration

- **Première méthode** : Soit P le polynôme $P=V(x_1,\dots,x_{n-1},X)$ (c'en est bien un !).
En développant par rapport à L_n (première expression), on a alors $P=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}D_{n,j}X^{j-1}$ où les $D_{n,j}$ ne contiennent pas X, donc $P\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$. De plus, $x_1,\dots,x_{n-1}$ sont racines de P.
Donc on a $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $P=\lambda(X-x_1)\cdots(X-x_{n-1})$ où λ est le cœfficient en X^{n-1} : c'est le mineur égal à $V(x_1,\dots,x_{n-1})$. Ainsi,
$$V(x_1,\dots,x_n)=V(x_1,\dots,x_{n-1})\prod_{1\leqslant i<n}(x_n-x_i).$$
On conclut alors par récurrence (facilement initialisée).
- **Deuxième méthode** : Avec $C_j\leftarrow C_j-x_nC_{j-1}$ en commençant par la dernière :
$$V(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x_1-x_n & x_1(x_1-x_n) & \dots & x_1^{n-2}(x_1-x_n) \\ 1 & x_2-x_n & x_2(x_2-x_n) & \dots & x_2^{n-2}(x_1-x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0\end{vmatrix}$$
Donc, en développant par rapport à L_n et factorisant,
$$V(x_1,\dots,x_n)=(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-x_n)V(x_1,\dots,x_{n-1})$$

et on conclut par récurrence. □

Remarque

$V(x_1,\dots,x_n)\neq 0$ si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

Exemples

E1 – Calculer le rang de $\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&2&3&2\\1&8&9&4\\1&131&132&8\end{pmatrix}$

E2 – **Interpolation de Lagrange** : On cherche un polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(x_i)=y_i$, les x_i étant deux à deux distincts.

Si l'on écrit $P=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$, cela revient à résoudre un système de matrice $\begin{pmatrix}1&x_0&x_0^2&\dots&x_0^n\\1&x_1&x_1^2&\dots&x_1^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&x_n^2&\dots&x_n^n\end{pmatrix}$ qui a bien une et une seule solution.

Il s'agit d'ailleurs de la matrice représentant dans les bases canoniques l'endomorphisme $P\mapsto(P(x_0),\dots,P(x_n))$.

VI APPLICATIONS DES DÉTERMINANTS

1 Formule de la comatrice

Propriété

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$A\times(\operatorname{Com}A)^\top=(\operatorname{Com}A)^\top\times A=\det(A)\cdot I_n.$$

Si, de plus, A est inversible, alors $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}(\operatorname{Com}A)^\top$.

Démonstration

Si $j,k\in[\![1,n]\!]$, $\left((\operatorname{Com}A)^\top\times A\right)_{j,k}=\sum_{i=1}^n\left((\operatorname{Com}A)^\top\right)_{j,i}a_{i,k}=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}a_{i,k}$.

Ainsi, si $k=j$, on reconnaît le développement par rapport à C_j du déterminant de A, donc les cœfficients diagonaux de $(\operatorname{Com}A)^\top\times A$ valent tous $\det A$.

Sinon, cela ressemble au développement d'une matrice A' dont toutes les colonnes sont celles de A sauf C_j qui a été remplacée par C_k.

On a alors $\det A'=0$ par caractère alterné du déterminant.

Le développement par rapport à C'_j s'écrit $0=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+j}\Delta'_{i,j}a'_{i,j}$.

Or dans $\Delta'_{i,j}$, on a supprimé la colonne C'_j, donc les cœfficients correspondent exactement à ceux de A, donc $\Delta'_{i,j}=\Delta_{i,j}$.

De plus, pour tout k, $a'_{i,j}=a_{i,k}$.

Finalement, si $j\neq k$, $\sum_{i=1}^n(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}a_{i,k}=0$.

Ainsi, $(\operatorname{Com}A)^\top\times A=\det(A)\cdot I_n$.

Pour l'autre relation, il suffit de raisonner sur les lignes plutôt que sur les colonnes. □

Exemple

Si $n=2$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\text{Com}\, A=\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ et si A est inversible $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Remarque

Intérêt théorique, et pratique seulement si $n=2$ ou 3.

2 Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

a Orientation des bases

Définition

On dit qu'une base $\mathscr{B}$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel **a même orientation** qu'une autre base $\mathscr{B}'$ lorsque $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')=\det\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)>0$.

Remarque

⚠ Cela n'a aucun sens dans $\mathbb{C}$!

Propriété

C'est une relation d'équivalence avec exactement deux classes d'équivalences.

Définition

Orienter un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, c'est décider qu'une base est **directe**. Alors toutes les bases de même orientation sont dites directes.

Toutes les autres, qui ont même orientation, sont dites **indirectes**.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, orientations habituelles.

b Interprétation géométrique du déterminant

On verra plus tard que :

Propriété

(i) *Si $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v})$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

(ii) *Si $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est le volume orienté du parallélogramme construit sur $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$.*

3 Polynôme caractéristique (Spé)

On rappelle que $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre** de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- si et seulement s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ **non nul** tel que $AX = \lambda X$,
- si et seulement s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ **non nul** tel que $(A - \lambda I_n)X = 0$,
- si et seulement si $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$,
- si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible,
- si et seulement si $\det(\lambda I_n - A) \neq 0$.

Définition : Polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique** de A le polynôme $\chi_A = \det(XI_n - A) \in \mathbb{K}[X]$.
Alors $\operatorname{Sp}(A)$ (ensemble des valeurs propres) est exactement l'ensemble des racines de χ_A.
On définit de même $\chi_u = \det(X \operatorname{id}_E - u)$ pour $u \in \mathcal{L}(E)$ polynôme caractéristique de u qui est le polynôme caractéristique de n'importe quelle matrice représentant u.

Propriété

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. χ_A est de degré n, unitaire, de terme constant $(-1)^n \det A$ et de cœfficient en X^{n-1} égal à $-\operatorname{tr} A$.

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = X^n - (\operatorname{tr} A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A.$$

Remarques

R1 – Si χ_A est **scindé**, la somme et le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité) valent respectivement $\operatorname{tr} A$ et $\det A$ d'après les relation cœfficients-racines. Ce qui est évident si A est diagonalisable, n'est-ce pas ? (tr et det sont des invariants de similitude, χ en est aussi un !)

R2 – Si $n = 2$, $\chi_A = X^2 - (\operatorname{tr} A)X + \det A$.

Démonstration

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X - a_{1,1} & & (-a_{i,j}) \\ & \ddots & \\ (-a_{i,j}) & & X - a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) m_{\sigma(1),1} \cdots m_{\sigma(n),n},$$

où les $m_{i,j}$ sont des polynômes de degré 0 (s'il vaut $-a_{i,j}$) ou 1 (s'il vaut $X - a_{i,i}$).

On a donc $\chi_A \in \mathbb{K}_n[X]$. On remarque que si $\sigma \neq \operatorname{id}$, on a au moins deux termes constants dans le produit (car σ injective), donc

$$\chi_A = (X - a_{1,1}) \cdots (X - a_{n,n}) + Q$$

où $\deg Q \leqslant n - 2$. Soit encore

$$\chi_A = X^n - \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} X^{n-1} + Q_1 = X^n - (\operatorname{tr} A)X^{n-1} + Q_1$$

où $\deg Q_1 \leqslant n - 2$.

Donc χ_A est de degré n, unitaire et de cœficient en X^{n-1} égal à $-\operatorname{tr} A$.

Le cœfficient constant est $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$. □

Exemple

Diagonalisation de $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A=\begin{vmatrix}X-5&-1&1\\-2&X-4&2\\-1&1&X-3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&1&X-3\\-2&X-4&2\\X-5&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&1&X-3\\0&X-6&-2(X-4)\\0&X-6&(X-4)^2\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}-1&1&X-3\\0&X-6&-2(X-4)\\0&0&(X-2)(X-4)\end{vmatrix}=(X-2)(X-4)(X-6)$$

Avec $L_1\leftrightarrow L_3$, puis $L_2\leftarrow L_2-2L_1$, puis $L_3\leftarrow L_3+(X-5)L_1$ puis $L_3\leftarrow L_3-L_2$.
Donc $\mathrm{Sp}(A)=\{2,4,6\}$: 3 valeurs propres distinctes en dimension 3 donc A est diagonalisable.
Puis

- $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_2(A)\iff\begin{cases}-x+y-z&=&0\\-4y+4z&=&0\end{cases}\iff\begin{cases}x&=&0\\y&=&z\end{cases}$ donc $E_2(A)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_4(A)\iff\begin{cases}-x+y+z&=&0\\-2y&=&0\end{cases}\iff\begin{cases}x&=&z\\y&=&0\end{cases}$ donc $E_4(A)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_6(A)\iff\begin{cases}-x+y+3z&=&0\\z&=&0\end{cases}\iff\begin{cases}x&=&y\\z&=&0\end{cases}$ donc $E_6(A)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est donc une base de vecteurs propres et la formule de changement de base donne $A=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

Remarques

R 1 – A propos d'équation caractéristique ?

EDL$_2$: $f''=af'+bf$ se réécrit $Y'=\begin{pmatrix}f\\f'\end{pmatrix}'=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\b&a\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}f\\f'\end{pmatrix}=AY$.

Suites récurrentes d'ordre 2 : $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ se réécrit $X_{n+1}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\b&a\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\end{pmatrix}=AX_n$.

On calcule $\chi_A=X^2-aX-b$: équation/polynôme caractéristique.

Dans tous les cas, même si A n'est pas diagonalisable, on peut se placer dans $\mathbb{C}$ (il y a deux valeurs propres avec multiplicité) et compléter un vecteur propre en une base de $\mathbb{C}^2$, écrire $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&*\\0&\lambda_2\end{pmatrix}P^{-1}$ et retrouver les résultats connus.

R 2 – Le théorème de Cayley-Hamilton (au programme de Spé) dit que χ_A est un polynôme annulateur de A.
⚠ $\det(A\times I_n-A)=\det 0=0$ n'est pas une démonstration valable !!!!
Par exemple, toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ vérifie $A^2-(\operatorname{tr}A)A+(\det A)I_2=0_2$.