Intégration

Extrait du programme officiel :

L'objectif majeur de ce chapitre est de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs réelles ou complexes et d'en établir les propriétés élémentaires, notamment le lien entre intégration et primitivation. On achève ainsi la justification des propriétés présentées dans le chapitre « Techniques fondamentales de calcul en analyse ».

Ce chapitre permet de consolider la pratique des techniques usuelles de calcul intégral. Il peut également offrir l'occasion de revenir sur l'étude des équations différentielles rencontrées au premier semestre.

La notion de continuité uniforme est introduite uniquement en vue de la construction de l'intégrale. L'étude systématique des fonctions uniformément continues est exclue.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ *désigne* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Continuité uniforme	
Continuité uniforme.	
Théorème de Heine.	La démonstration n'est pas exigible.
b) Fonctions continues par morceaux	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision.	
Fonction en escalier.	
Fonction continue par morceaux sur un segment, sur un intervalle.	Une fonction est continue par morceaux sur un intervalle I si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.
c) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.	Le programme n'impose pas de construction particulière. Interprétation géométrique. ⇆ PC et SI : valeur moyenne. Aucune difficulté théorique relative à la notion d'aire ne doit être soulevée. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.	Les étudiants doivent savoir majorer et minorer des intégrales.
Inégalité : $\left\lvert\int_{[a,b]} f\right\rvert \leqslant \int_{[a,b]} \lvert f\rvert$.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
L'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle.	
d) Sommes de Riemann	
Si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	Interprétation géométrique. Démonstration dans le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$. ⇆ I : méthodes des rectangles, des trapèzes.
e) Intégrale fonction de sa borne supérieure	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.	
Intégration par parties, changement de variable.	
f) Calcul de primitives	
Primitives usuelles.	Sont exigibles les seules primitives mentionnées dans le chapitre « Techniques fondamentales de calcul en analyse ».
Calcul de primitives par intégration par parties, par changement de variable.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Utilisation de la décomposition en éléments simples pour calculer les primitives d'une fraction rationnelle.	On évitera tout excès de technicité.

g) Formules de Taylor

Pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n.	
Inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.	L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On soulignera la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange).

TABLE DES MATIÈRES

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. a, b sont des réels tels que $a < b$.

I CONTINUITÉ UNIFORME

La continuité dont on a parlé jusqu'à maintenant était une propriété locale : au voisinage d'un point a, si je me reproche de a, alors mon image par f se rapproche de $f(a)$, ce qui s'écrit formellement :

$$\forall\, a \in I,\ \ \forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, \eta > 0,\ \ \forall\, x \in I,\ \ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon$$

(Traduction de f continue sur I.)

Pour formaliser la notion d'intégrale, nous aurons besoin d'une continuité plus fort, globale : on va imposer que le η ne dépende pas de a.

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est **uniformément continue** sur I si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, \eta > 0,\ \ \forall\, x, y \in I,\ \ \left|x - y\right| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \varepsilon$$

Cela impose que si x et y sont suffisamment proches, mais n'importe où dans I, alors $f(x)$ et $f(y)$ sont proches également. Ainsi, pour des fonctions à trop grandes variations, on pourra ne pas avoir uniforme continuité.

Propriété

Une fonction uniformément continue sur I est continue sur I. Réciproque fausse.

Démonstration

Si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, \eta > 0,\ \ \forall\, a, x \in I,\ \ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon$$

alors

$$\forall\, a \in I,\ \ \forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, \eta > 0,\ \ \forall\, x \in I,\ \ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon. \quad \square$$

Propriété : Caractérisation séquentielle

f est uniformément continue sur I si et seulement si $\forall\, (x_n)_n, (y_n)_n \in I^{\mathbb{N}} \mid x_n - y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,\ \ f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Démonstration

($\Rightarrow$) Si f uniformément continue et $x_n - y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\varepsilon > 0$.

On a $\eta > 0$ tel que $\forall\, x, y \in I,\ \ \left|x - y\right| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \varepsilon$ or on a $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant N,\ \ x_n - y_n \leqslant \eta$, ainsi $\forall\, n \geqslant N,\ \ f(x_n) - f(y_n) \leqslant \varepsilon$ et donc $f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

($\Leftarrow$) Par contraposée, si f n'est pas uniformément continue, on a $\varepsilon > 0$ tel que $\forall\, \eta > 0,\ \ \exists\, x, y \in I,\ \ \left|x - y\right| \leqslant \eta$ et $\left|f(x) - f(y)\right| > \varepsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\eta = \dfrac{1}{n+1}$, on a x_n, y_n des réels tels que $\left|a_n - y_n\right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $\left|f(x_n) - f(y_n)\right| > \varepsilon$. Ainsi, $x_n - y_n \to 0$ et $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$. $\square$

Propriété

Une combinaison linéaire, une composée de fonctions uniformément continue l'est encore.

⚠ Faux pour un produit ou un quotient.

Exemples

E 1 – Les fonctions constantes, $x \mapsto x$ sont uniformément continues.

E 2 – $f : x \mapsto ax + b$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

E 3 – $f : x \mapsto |x|$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

E 4 – $f : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$: problème si $x \to \pm\infty$ (pente trop forte). $x_n = n + \frac{1}{n}$, $y_n = n$ alors $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$ mais $x_n^2 - y_n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \not\to 0$.

E 5 – $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (malgré la pente infinie en 0) : si $x_n - y_n \to 0$, on peut supposer $x_n \geqslant y_n$, alors

$$\left(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\right)^2 = x_n - 2\sqrt{x_n y_n} + y_n \leqslant x_n - 2y_n + y_n = x_n - y_n \to 0.$$

Donc $\left|\sqrt{x}_n - \sqrt{y}_n\right| \leqslant \sqrt{|x_n - y_n|}$. Donc $\sqrt{x}_n - \sqrt{y}_n \to 0$.

E 6 – $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$ problème si $x \to 0$ (pente trop forte).
$x_n = \frac{2}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ alors $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$ mais $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} = -\frac{n}{2} \not\to 0$.

Remarque

La fonction $\sqrt{\cdot}$ vérifie $\forall\, x, y,\quad \sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant k \times |x - y|^{1/2}$, on dit qu'elle est $1/2$-hölderienne. Toute fonction α-hölderienne est facilement uniformément continue.

Théorème : Théorème de Heine

Tout fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

Démonstration

Si $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ continue non uniformément continue, on a $\varepsilon > 0$ et $(x_n)_n, (y_n)_n \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n - y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et pour tout n, $f(x_n) - f(y_n) > \varepsilon$. (voir preuve de la caractérisation séquentielle).

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite bornée x une suite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$, puis de la suite bornée $\left(y_{\varphi(n)}\right)_n$ une suite convergente $\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_n$. Alors $\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_n$ est aussi convergente comme suite extraite de $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ et $x_{\varphi\circ\psi(n)} - y_{\varphi\circ\psi(n)} \to 0$ donc les deux limites sont égales à ℓ.

Alors, par continuité, $f\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right) \to f(\ell)$ et $f\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right) \to f(\ell)$ donc

$$f\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right) \to 0$$

ce qui contredit $f\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right) > \varepsilon$. □

Propriété

Toute fonction lipschitzienne (ou plus généralement hölderienne) sur I y est uniformément continue. La réciproque est fausse.

Remarque

f lipschitzienne $\not\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow$ f uniformément continue $\not\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow$ f continue.

Plus précisément :

f lipschitzienne $\not\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow$ f höldérienne $\not\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow$ f uniformément continue $\not\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow$ f continue.

Démonstration

$\forall\, x, y \in I,\quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant k\left|x - y\right|^{\alpha}$ ($\alpha = 1$ si lipschitzienne).
Donc si $x_n - y_n \to 0$, $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. □

Exemples

E 1 – $\sqrt{\cdot}$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne car si

$$\forall\, x,y\in\mathbb{R}^+,\quad \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\leqslant k\left|x-y\right|$$

avec $k>0$, on va avoir un problème près de zéro (pente trop forte). Pour $y=0$, on obtient $\forall\, x\in\mathbb{R}^+,\quad \sqrt{x}\leqslant kx$ et si $x\neq 0$, $\sqrt{x}\geqslant \frac{1}{k}$ donc $x\geqslant\frac{1}{k^2}$. Contradiction.

E 2 – Par inégalité des accroissements finis, une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$ (c'est le cas si elle est de classe $\mathscr{C}^1$) à dérivée bornée sera lipschitzienne donc uniformément continue. C'est le cas par exemple des fonctions $\sin$ et $\cos$.

II FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX

1 Subdivisions

Définition

On appelle **subdivision** de $[a,b]$ toute famille finie $\sigma=(a_0,a_1,\dots,a_n)$ telle que

$$a=a_0<a_1<\dots<a_n=b$$

On appelle **pas de la subdivision** le réel $h(\sigma)=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}(a_{k+1}-a_k)$.

Lorsque $a_{k+1}-a_k$ ne dépend pas de k, on parle de subdivision régulière. Alors $h(\sigma)=\dfrac{b-a}{n}$ et $\forall\, k\in[\![0,n]\!],\quad a_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$.

Une subdivision σ' de $[a,b]$ est dite **plus fine** que σ si **les** points de σ sont **des** points de σ' (σ' contient au moins tous les points de σ.)

dessin subdivision régulière
dessin subdivision plus fine

2 Fonctions en escalier

Définition : Fonctions en escalier

Une application $\varphi:[a,b]\to\mathbb{K}$ est dite **en escalier** si et seulement s'il existe une subdivision $\sigma=(a_0,a_1,\dots,a_n)$ de $[a,b]$ telle que

$$\forall\, k\in[\![0,n-1]\!],\quad \varphi_{|]a_k,a_{k+1}[}\ \text{est constante.}$$

On dit alors que σ est adaptée à φ.
On note $\mathscr{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

dessin fonction en escalier

Exemple

Partie entière.

Remarques

R 1 – Si σ est adaptée à φ, toute subdivision plus fine l'est encore.

R 2 – Si σ et σ' sont adaptées à φ et ψ respectivement, on peut construire une subdivision σ'' plus fine que σ et σ' et donc adaptée à φ et ψ simultanément.

Propriété

$\mathscr{E}([a,b])$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. En particulier, si $\varphi,\psi\in\mathscr{E}([a,b])$ et $\lambda\in\mathbb{K}$,

- $\varphi+\psi\in\mathscr{E}([a,b])$
- $\lambda\varphi\in\mathscr{E}([a,b])$
- $\varphi\times\psi\in\mathscr{E}([a,b])$

On a aussi $|\varphi|\in\mathscr{E}([a,b])$, et si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\inf(\varphi,\psi)$, $\sup(\varphi,\psi)\in\mathscr{E}([a,b])$.

Démonstration

Facile avec la remarque 2 précédente, les stabilités étant vraies pour les fonctions constantes.
La fonction constante 1 est bien en escalier, $\mathscr{E}([a,b])$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^{[a,b]}$. □

3 Fonctions continues par morceaux

Définition : Fonctions continues par morceaux

Une application $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ est dite **continue par morceaux** si et seulement s'il existe une subdivision $\sigma=(a_0,a_1,\dots,a_n)$ de $[a,b]$ telle que

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\quad \begin{cases} f|_{]a_k,a_{k+1}[} \text{ est continue.}\\ f \text{ admet des limites à droite de } a_k \text{ et à gauche de } a_{k+1}.\end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\quad \begin{cases} f|_{]a_k,a_{k+1}[} \text{ est continue.}\\ f|_{]a_k,a_{k+1}[} \text{ est prolongeable par continuité à } [a_k,a_{k+1}].\end{cases}$$

On dit alors que σ est adaptée à f.
On note $\mathscr{C}_m([a,b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

Définition

$f:I\to\mathbb{K}$ est dite continue par morceaux si sa restriction à tout segment l'est.

dessin

Remarques

R 1 – Les fonctions en escalier, les fonctions continues sont continues par morceaux.

R 2 – Comme f est prolongeable par continuité à $[a_k,a_{k+1}]$, f est bornée et uniformément continue sur $]a_k,a_{k+1}[$ (mais les bornes ne sont pas nécessairement atteintes).

R 3 – Lorsque l'on modifie une fonction continue par morceaux en un nombre fini de point, on obtient une nouvelle fonction continue par morceaux.

R 4 – La restriction d'une fonction continue par morceaux l'est encore.

Propriété

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée (mais les bornes ne sont pas nécessairement atteintes.)

Démonstration

Comme dans la remarque 2, f est borné sur chaque « morceau » donc sur le segment car il n'y a qu'un nombre fini de morceaux. □

Propriété

$\mathscr{C}_m([a,b])$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. En particulier, si $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $f + g \in \mathscr{C}_m([a,b])$
- $\lambda f \in \mathscr{C}_m([a,b])$
- $f \times g \in \mathscr{C}_m([a,b])$

On a aussi $|\varphi| \in \mathscr{C}_m([a,b])$, et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\inf(\varphi,\psi)$, $\sup(\varphi,\psi) \in \mathscr{C}_m([a,b])$.

Démonstration

Similaire à $\mathscr{E}([a,b])$. □

Théorème : Approx. uniforme des fonc. continues par des fonc. en escalier

Soient $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b])$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.

dessin

Démonstration

Par théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a,b]$. On a donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall\, x, y \in [a,b],\quad |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

On choisit une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ de pas $h \leqslant \eta$.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f est continue sur $[a_k, a_{k+1}]$ donc y est bornée et les bornes m_k et M_k sont atteintes en c_k et d_k. De plus, $|M_k - m_k| = |f(d_k) - f(c_k)| \leqslant \varepsilon$ car

$$|d_k - c_k| \leqslant a_{k+1} - a_k \leqslant h \leqslant \eta.$$

On définit alors $\varphi : x \longmapsto \begin{cases} m_k & \text{si } x \in]a_k, a_{k+1}[\\ f(a_k) & \text{si } x = a_k \end{cases}$ et $\psi : x \longmapsto \begin{cases} M_k & \text{si } x \in]a_k, a_{k+1}[\\ f(a_k) & \text{si } x = a_k \end{cases}$ des fonctions en escalier.

Alors, si $x \in [a,b[$, soit on a k tel que $x \in]a_k, a_{k+1}[$ et $\begin{cases} m_k = \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant M_k = \psi(x) \\ \psi(x) - \varphi(x) \leqslant \varepsilon \end{cases}$, soit on a k tel que $x = a_k$ et $\begin{cases} f(a_k) = \varphi(a_k) \leqslant f(a_k) \leqslant f(a_k) = \psi(a_k) \\ \psi(a_k) - \varphi(a_k) \leqslant \varepsilon \end{cases}$ d'où le résultat. □

Théorème : Approx. uniforme des fonctions cpm par des fonctions en escalier

Soient $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b])$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.

Démonstration

Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ adaptée à f.

Chaque $f_{|]a_k, a_{k+1}[}$ se prolonge par continuité en une fonction f_k continue sur $[a_k, a_{k+1}]$: on a $\varphi_k, \psi_k \in \mathscr{E}([a,b])$ telles que $\varphi_k \leqslant f_k \leqslant \psi_k$ et $\psi_k - \varphi_k \leqslant \varepsilon$.

On pose alors $\varphi : x \longmapsto \begin{cases} \varphi_k(x) & \text{si } x \in]a_k, a_{k+1}[\\ f(a_k) & \text{si } x = a_k \end{cases}$ et $\psi : x \longmapsto \begin{cases} \psi(a_k) & \text{si } x \in]a_k, a_{k+1}[\\ f(a_k) & \text{si } x = a_k \end{cases}$ des fonctions en escalier.

Alors, si $x \in [a, b[$, soit on a k tel que $x \in]a_k, a_{k+1}[$ et

$$\begin{cases} \varphi(x) = \varphi_k(x) \leqslant f(x) = f_k(x) \leqslant \psi_k(x) = \psi(x) \\ \psi(x) - \varphi(x) \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

soit on a k tel que $x = a_k$ et $\begin{cases} \varphi(a_k) = f(a_k) = \psi(a_k) \\ \psi(a_k) - \varphi(a_k) \leqslant \varepsilon \end{cases}$ d'où le résultat. □

Corollaire

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi \in \mathscr{E}([a, b])$ tel que $\left|f - \varphi\right| \leqslant \varepsilon$.

III Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

1 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

On définit l'intégrale d'une fonction en escalier comme la somme des aires algébriques des rectangles formés entre la courbe et l'axe des abscisses.

Définition

Soit $\varphi \in \mathscr{E}([a, b])$, $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ subdivision adaptée à φ.
On définit **l'intégrale de φ sur $[a, b]$** par

$$I_\sigma(\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) y_k$$

où y_k est la valeur de φ sur $]a_k, a_{k+1}[$.

Dessin

Propriété

L'intégrale de $\varphi \in \mathscr{E}([a, b])$ sur $[a, b]$ ne dépend pas de la subdivision σ et est notée $\int_{[a,b]} \varphi$.

Démonstration

On note $I_\sigma(\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) y_k$.
Si on rajoute un point à σ : $\sigma' = (a_0, \ldots, a_j, x, a_{j+1}, \ldots, a_n)$,

$$I_{\sigma'}(\varphi) = \sum_{k \neq j} (a_{k+1} - a_k) y_k + (x - a_j) y_j + (a_{j+1} - x) y_j = \sum_{k \neq j} (a_{k+1} - a_k) y_k + (a_{j+1} - a_j) y_j = I_\sigma(\varphi).$$

Ensuite, si σ et σ' sont adaptées à φ, on a σ'' plus fine que σ et σ', obtenue en ajoutant un nombre fini de point, donc $I_\sigma(\varphi) = I_{\sigma''}(\varphi) = I_{\sigma'}(\varphi)$. □

Remarque

On obtient en particulier l'intégrale des fonctions constantes.

Propriété : Croissance et linéarité de l'intégrale

Si $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b])$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

(i) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\varphi \leqslant \psi$, $\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi$.

(ii) $\int_{[a,b]} (\varphi + \psi) = \int_{[a,b]} \varphi + \int_{[a,b]} \psi$ et $\int_{[a,b]} (\lambda\varphi) = \lambda \int_{[a,b]} \varphi$.

Démonstration

Si $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ subdivision adaptée à φ et ψ,

- Si $\varphi \leqslant \psi$, sur $]a_k, a_{k+1}[$, $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ donc avec la définition $\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi$.
- Facilement $\int_{[a,b]} (\varphi + \psi) = \int_{[a,b]} \varphi + \int_{[a,b]} \psi$ et $\int_{[a,b]} (\lambda\varphi) = \lambda \int_{[a,b]} \varphi$. □

2 Extension aux fonctions continues par morceaux

a Cas réel

Propriété

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b], \mathbb{R})$.
Les ensembles $I^-(f) = \left\{\int_{[a,b]} \varphi\ ;\ \varphi \in \mathscr{E}([a,b]), \varphi \leqslant f\right\}$ et $I^+(f) = \left\{\int_{[a,b]} \psi\ ;\ \psi \in \mathscr{E}([a,b]), \psi \geqslant f\right\}$ admettent respectivement une borne supérieure et inférieure, égales.

Démonstration

- **Existence** : $I^-(f)$ et $I^+(f)$ sont des parties non vides de $\mathbb{R}$ vu le théorème d'approximation.
  De plus, f est bornée sur $[a,b]$, donc minorée par m et majorée par M, donc si $\varphi \leqslant f$, $\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \sum (a_{k+1} - a_k) M = \int_{[a,b]} M = M(b-a)$,et $I^-(f)$ est majoré par $M(b-a)$.

  De même, $I^+(f)$ est minoré par $m(b-a)$.
  Donc $\sup I^+(f)$ et $\inf I^-(f)$ existent.
- $\sup I^-(f) \leqslant \inf I^+(f)$: si $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b])$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, $\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi$. Comme φ est quelconque, $\int_{[a,b]} \psi$ majore $I^-(f)$ donc
  $$\sup I^-(f) \leqslant \int_{[a,b]} \psi.$$
  Comme c'est vrai pour tout ψ, $\sup I^-(f)$ minore $I^+(f)$ donc
  $$\sup I^-(f) \leqslant \inf I^+(f).$$
- $\sup I^-(f) \geqslant \inf I^+(f)$: Soit $\varepsilon > 0$ et $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b])$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$, par croissance et linéarité, $\sup I^-(f) \geqslant \int_{[a,b]} \varphi \geqslant \int_{[a,b]} (\psi - \varepsilon) = \int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varepsilon \geqslant \inf I^+(f) - (b-a)\varepsilon$, donc
  $$\sup I^-(f) \geqslant \inf I^+(f) - (b-a)\varepsilon$$
  et avec $\varepsilon \to 0$, $\sup I^-(f) \geqslant \inf I^+(f)$. □

Définition

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b], \mathbb{R})$. On définit

$$\int_{[a,b]} f = \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{E}([a,b]) \\ \varphi \leqslant f}} \int_{[a,b]} \varphi = \inf_{\substack{\psi \in \mathscr{E}([a,b]) \\ \psi \geqslant f}} \int_{[a,b]} \psi.$$

Remarques

R 1 – $\int_{[a,b]} f$ représente l'aire algébrique entre la courbe et l'axe des abscisses.

R 2 – Dans le cas d'une fonction f en escalier, le sup est un max et l'inf est un min, atteints pour $\varphi = \psi = f$ et on a donc bien la même intégrale.

R 3 – Par définition, si φ et ψ sont en escalier telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, alors

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} \psi.$$

b Cas complexe

Définition

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{C})$. Alors $\mathfrak{Re}\, f, \operatorname{Im} f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{C})$ et on pose

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathfrak{Re}\, f + \mathrm{i} \int_{[a,b]} \mathfrak{Im}\, f$$

Remarque

Par définition, $\mathfrak{Re}\left(\int_{[a,b]} f\right) = \int_{[a,b]} \mathfrak{Re}\, f$ et $\mathfrak{Im}\left(\int_{[a,b]} f\right) = \int_{[a,b]} \mathfrak{Im}\, f$.

3 Propriétés de l'intégrale

a Linéarité

Propriété : Linéarité de l'intégrale

L'application $\begin{array}{|ccc} \mathscr{C}_m([a,b]) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \int_{[a,b]} f \end{array}$ *est une forme linéaire, c'est-à-dire que pour toutes* $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b])$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\int_{[a,b]} (f+g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$ *et* $\int_{[a,b]} (\lambda f) = \lambda \int_{[a,b]} f$.

Démonstration

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il suffit de séparer parties réelle et imaginaire.

- Soit $\varepsilon > 0$, $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ en escalier telles que $\varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1$, $\varphi_2 \leqslant g \leqslant \psi_2$, $\psi_1 - \varphi_1 \leqslant \varepsilon$, $\psi_2 - \varphi_2 \leqslant \varepsilon$. Alors, par linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier et définition de $\int_{[a,b]} f$,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} (f+g) - \int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} g &\leqslant \int_{[a,b]} (\psi_1 + \psi_2) - \int_{[a,b]} \varphi_1 - \int_{[a,b]} \varphi_2 \\ &\leqslant \int_{[a,b]} (\psi_1 - \varphi_1 + \psi_2 - \varphi_2) \\ &\leqslant \int_{[a,b]} (2\varepsilon) \\ &\leqslant 2\varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}(f+g)-\int_{[a,b]}f-\int_{[a,b]}g &\geqslant \int_{[a,b]}(\varphi_1+\varphi_2)-\int_{[a,b]}\psi_1-\int_{[a,b]}\psi_2\\ &\geqslant -\int_{[a,b]}(\psi_1-\varphi_1+\psi_2-\varphi_2)\\ &\geqslant -\int_{[a,b]}(2\varepsilon)\\ &\geqslant -2\varepsilon(b-a)\end{aligned}$$

Donc $\left|\int_{[a,b]}(f+g)-\int_{[a,b]}f-\int_{[a,b]}g\right|\leqslant 2\varepsilon(b-a)$ puis si $\varepsilon\to 0$, $\int_{[a,b]}(f+g)=\int_{[a,b]}f+\int_{[a,b]}g$.

- $\int_{[a,b]}(\lambda f)=\lambda\int_{[a,b]}f$
  - ⋆ ok si $\lambda=0$.
  - ⋆ **Cas où** $\lambda>0$: Soit $\varepsilon>0$, φ,ψ en escalier telles que $\varphi\leqslant f\leqslant\psi$, $\psi-\varphi\leqslant\varepsilon$. Alors $\lambda\varphi\leqslant\lambda f\leqslant\lambda\psi$ et, par linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier et définition de $\int_{[a,b]}f$,

    $$\int_{[a,b]}(\lambda f)-\lambda\int_{[a,b]}f\leqslant\int_{[a,b]}(\lambda\psi)-\lambda\int_{[a,b]}\varphi=\lambda\int_{[a,b]}(\psi-\varphi)\leqslant\lambda\varepsilon(b-a).$$

    De même, $\int_{[a,b]}(\lambda f)-\lambda\int_{[a,b]}f\geqslant-\varepsilon(b-a)$. Donc $\left|\int_{[a,b]}(\lambda f)-\lambda\int_{[a,b]}f\right|\leqslant\varepsilon(b-a)$ et si $\varepsilon\to 0$, $\int_{[a,b]}(\lambda f)=\lambda\int_{[a,b]}f$.
  - ⋆ **Cas où** $\lambda<0$:

    $$0=\int_{[a,b]}(\lambda f+(-\lambda f))=\int_{[a,b]}(\lambda f)+\int_{[a,b]}(-\lambda f)=\int_{[a,b]}(\lambda f)-\lambda\int_{[a,b]}f,$$

    d'où le résultat. □

Remarque

On ne change pas l'intégrale si on change la valeur en un nombre fini de points : $\int f-\int g=\int f-g=0$ car $f-g$ est en escalier nulle en un nombre fini de points.

b Propriétés liées à l'ordre

Propriété : Positivité et croissance de l'intégrale

Soit $f,g\in\mathscr{C}_m([a,b])$.

(i) Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $f\geqslant 0$, $\int_{[a,b]}f\geqslant 0$. Réciproque fausse.

(ii) Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $f\leqslant g$, $\int_{[a,b]}f\leqslant\int_{[a,b]}g$. Réciproque fausse.

*(iii) **Inégalité triangulaire** : Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\left|\int_{[a,b]}f\right|\leqslant\int_{[a,b]}|f|\leqslant(b-a)\,\|f\|_\infty$ où $\|f\|_\infty=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$.*

Démonstration

(i) $0\in\mathscr{E}((a,b])$ et $0\leqslant f$ donc par définition $0=\int_{[a,b]}0\leqslant\int_{[a,b]}f$.

(ii) Si $f\leqslant g$, $g-f\geqslant 0$ donc $0\leqslant\int_{[a,b]}(g-f)=\int_{[a,b]}g-\int_{[a,b]}f$ par linéarité.

(iii) Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $-|f|\leqslant f\leqslant|f|$ donc par croissance, $-\int_{[a,b]}|f|\leqslant\int_{[a,b]}f\leqslant\int_{[a,b]}|f|$ soit $\left|\int_{[a,b]}f\right|\leqslant\int_{[a,b]}|f|$, puis $|f|\leqslant\|f\|_\infty$.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, soit θ un argument de $\int_{[a,b]}f$. Alors $\left|\int_{[a,b]}f\right|=\left(\int_{[a,b]}f\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=\int_{[a,b]}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}f\right)$. Comme ce nombre est réel,

$$\left|\int_{[a,b]}f\right|=\mathfrak{Re}\left(\int_{[a,b]}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}f)\right)=\int_{[a,b]}\mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}f\right)\leqslant\int_{[a,b]}\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}f\right|\leqslant\int_{[a,b]}|f|.\quad\square$$

Remarque

$\int_{[a,b]} f$ représente une somme continue des valeurs prises par f sur $[a,b]$. On peut introduire la **valeur moyenne** de f : $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

dessin

Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on vérifie sans mal que

$$\inf_{[a,b]} f \leqslant \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f \leqslant \sup_{[a,b]} f$$

Si f est continue, les bornes sont atteinte et le théorème des valeurs intermédiaire nous dit qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$ (Formule de la moyenne).

C Propriétés liées à l'intervalle

Propriété : Relation de Chasles

Si $a<b<c$, $f\in\mathscr{C}_m([a,c])$, alors $f_{|[a,b]}\in\mathscr{C}_m([a,b])$ et $f_{|[b,c]}\in\mathscr{C}_m([b,c])$ et

$$\int_{[a,c]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f$$

(abus de notation)

Démonstration

C'est facile à voir pour les fonctions en escalier en utilisant une subdivision contenant b (on peut toujours le supposer).
Si $\varphi\in\mathscr{E}([a,c])$ telle que $\varphi\leqslant f$, alors $\varphi_{|[a,b]}\leqslant f_{|[a,b]}$ et $\varphi_{|[b,c]}\leqslant f_{|[b,c]}$ donc

$$\int_{[a,c]}\varphi = \int_{[a,b]}\varphi + \int_{[b,c]}\varphi \leqslant \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f$$

par définition de l'intégrale. Comme c'est vrai pour tout $\varphi\leqslant f$, en passant au sup, $\int_{[a,c]} f\leqslant \int_{[a,b]} f+\int_{[b,c]} f$.
En prenant $\psi\geqslant f$, on obtient de même l'inégalité dans l'autre sens. □

Notation

Pour $f\in\mathscr{C}_m([a,b])$, on note $\displaystyle\int_a^b f=\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_b^a f=-\int_a^b f=-\int_{[a,b]} f$ et $\displaystyle\int_a^a f=0$.

On note aussi $\displaystyle\int_a^b f=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriétés

Si I intervalle, $a,b\in I$ (non nécessairement ordonnés).

(i) $\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{C}_m(I) & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f\end{array}\right.$ *est linéaire.*

(ii) Si $a\leqslant b$, $f\leqslant g\Longrightarrow \int_a^b f\leqslant\int_{[a,b]} g$.
Si $b\leqslant a$, $f\leqslant g\Longrightarrow \int_a^b f\geqslant\int_{[a,b]} g$.

(iii) ⚠ En général, si $a,b\in I$ et $f\in\mathscr{C}_m(I)$,

$$\left|\int_a^b f\right|\leqslant\left|\int_a^b |f|\right|$$

(iv) Si $a,b\in I$ et $f\in\mathscr{C}_m(I)$, $\displaystyle\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$.

Démonstration

Séparer les cas $a<b$, $a>b$ et $a=b$. □

Remarque

Les (iii) se résume par : il faut remettre les bornes dans le bon sens dans l'intégrale de droite.

d Cas des fonctions continues

Propriété

*Si f est **continue** sur $\overleftrightarrow{[a,b]}$ et **de signe constant**,*

$$\int_a^b f = 0 \iff f \equiv 0 \text{ sur } [a,b]$$

C'est faux si f est seulement continue par morceaux.

Démonstration

Si $f \equiv 0$, $\int_a^b f = 0$.
Réciproquement, quitte à changer f en $-f$ et/ou échanger a et b, on suppose $f \geqslant 0$ et $a<b$.

1re méthode Si on a $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0)>0$, alors par continuité, on peut trouver $\eta>0$ tel que si $x \in [x_0-\eta, x_0+\eta]$, $x \in [a,b]$ et $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. *dessin.*

Alors, par positivité et par Chasles, $\displaystyle\int_a^b f \geqslant \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f \geqslant 2\eta \frac{f(x_0)}{2} > 0$.

Donc $f \equiv 0$ sur $]a,b[$ et par continuité sur $[a,b]$.

2e méthode Comme f est continue, le théorème fondamental (voir partie V) nous dit que $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}x$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a. Mais $F' = f \geqslant 0$ donc F est croissante sur $[a,b]$ et comme $F(a)=F(b)=0$, F est constamment nulle sur $[a,b]$ et $f = F'$ également.

□

Propriété : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si $f, g \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$,

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

avec égalité si et seulement si (f,g) est liée.

Remarque

Inégalité encore vraie pour les fonctions continues par morceaux, mais le cas d'égalité n'est plus valable.

Démonstration : Très classique !

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_a^b (f+\lambda g)^2 \geqslant 0$ par positivité.
Donc, par linéarité,

$$\left(\int_a^b g^2\right)\lambda^2 + 2\left(\int_a^b fg\right)\lambda + \left(\int_a^b f^2\right) \geqslant 0$$

- Si $\int_a^b g^2 = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $2\left(\int_a^b fg\right)\lambda + \left(\int_a^b f^2\right) \geqslant 0$ donc (avec $\lambda \to \pm\infty$) $\left(\int_a^b fg\right) = 0$ et il y a égalité $0=0$.
- Si $\int_a^b g^2 \neq 0$, c'est un trinôme du second degré de signe constant, donc son discriminant réduit est négatif, avec

$\Delta' = \left(\int_a^b fg\right)^2 - \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$.

Il y a bien égalité si (f,g) liée.

S'il y a égalité et $g \not\equiv 0$, alors par continuité, $\int_a^b g^2 \neq 0$ et $\Delta' = 0$ donc on a un λ tel que $\int_a^b (f+\lambda g)^2 \geqslant 0$. Comme $(f+\lambda g)^2$ est continue de signe constant, $(f+\lambda g)^2 \equiv 0$ donc $f = -\lambda g$ donc (f,g) liée. □

IV Sommes de Riemann

Définition

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$, $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ subdivision de $[a,b]$ et pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\xi_k \in [a_k, a_{k+1}]$. On appelle **somme de Riemann associée à f, σ et $(\xi_k)_k$** :

$$S(f,\sigma,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(\xi_k)$$

Dessin

Théorème

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$.

(i) $h(\sigma)$ désignant le pas de σ, $S(f,\sigma,\xi) \xrightarrow[h(\sigma)\to 0]{} \int_a^b f$.

(ii) Si, de plus, f est K-lipschitzienne, $\left|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| \leqslant K(b-a)h(\sigma)$.

Démonstration

On fait la démonstration dans le cas où f est continue sur $[a,b]$. Elle y est donc uniformément continue en vertu du théorème de Heine.

Soit $\varepsilon > 0$, on a $\eta > 0$ tel que $|x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Soit $S(f,\sigma,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(\xi_k)$ une somme de Riemann sur une subdivision σ de pas $h \leqslant \eta$.

$$\begin{aligned}\left|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \left((a_{k+1}-a_k) f(\xi_k) - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \big(f(\xi_k) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(\xi_k) - f(x)|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

par inégalité triangulaire. Pour $x, \xi_k \in [a_k, a_{k+1}]$, $|\xi_k - x| \leqslant |a_{k+1} - a_k| \leqslant h \leqslant \eta$ donc $|f(\xi_k) - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Ainsi,

$$\left|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

On a démontré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall \sigma, \xi,\ h(\sigma) \leqslant \eta \Longrightarrow \left|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| \leqslant \varepsilon.$$

Si f est K-lipschitzienne (c'est le cas si f est $\mathscr{C}^1$ par exemple), le calcul est plus simple :

$$\begin{aligned}\left|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(\xi_k) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant K \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\xi_k - x|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant K h(\sigma) \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = K h(\sigma)(b-a)\end{aligned}$$

ce qui permet aussi de retrouver le résultat précédent. □

Remarque

On retrouve les formules de quadrature vues en informatique : rectangles à gauche pour $\xi_k = a_k$, rectangles à droite pour $\xi_k = a_{k+1}$, point milieu pour $\xi_k = \dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$.

On obtient aussi, pour une fonction K-lipschitzienne, la convergence en h (mais on peut faire mieux pour le point milieu : h^2).

On obtient aussi la convergence pour la méthode des trapèzes en remarquant que $T_n = \dfrac{R_n^g + R_n^d}{2}$ où T_n, R_n^g, R_n^d représentent respectivement les approximations par les méthodes des trapèzes, et des rectangles à gauche et à droite.

Corollaire

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, $a<b$,

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f.$$

En particulier, si $a=0$ et $b=1$, $f \in \mathscr{C}_m([0,1])$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f.$$

Démonstration

Rectangles à gauche, subdivision régulière. □

Remarque

À cause du $\frac{1}{n}$, ajouter ou enlever un nombre fini de termes dans la somme ne change pas sa limite.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 25}^{n-1 \text{ ou } n-2 \text{ ou } n+12} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f.$$

Exemple

$$n\sum_{j=n}^{2n-1}\frac{1}{j^2} \to \frac{1}{2}.$$

V INTÉGRALE DÉPENDANT DE SA BORNE SUPÉRIEURE

1 Intégrale et primitive

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Propriété

*Soit $f : I \to \mathbb{K}$, F, G deux primitives de f sur I, avec I **intervalle**.*
Alors on a $C \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in I$, $F(x) = G(x) + C$.

Démonstration

$F' - G' \equiv 0$ sur l'intervalle I. □

Théorème : Théorème fondamental du calcul intégro-différentiel

Si f est continue sur un intervalle I et $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
F est bien définie pour tout $x \in I$ car f est continue sur $\overleftrightarrow{[a, x]}$.
Soit $c \in I$. Si $x \neq c$, $\dfrac{F(x) - F(c)}{x - c} = \dfrac{1}{x - c}\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Par théorème des valeurs intermédiaire, on a $\xi_x \in \overleftrightarrow{[x, c]}$ tel que $f(\xi_x) = \dfrac{1}{x - c}\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (égalité de la moyenne : f continue et $\min\limits_{[x,c]} f \leqslant \dfrac{1}{x - c}\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \max\limits_{[x,c]} f$, les bornes étant atteintes).
Si $x \to c$, $\xi_x \to c$ donc par continuité $f(\xi_x) \to f(c)$ D'où $\dfrac{F(x) - F(c)}{x - c} \xrightarrow[x \to c]{} f(c)$: F est dérivable en c et $F'(c) = f(c)$.
De plus, on a bien $F(a) = 0$.

Autre méthode : si $\varepsilon > 0$, on a $\eta > 0$ tel que $|x - c| \leqslant \eta \Rightarrow \left|f(x) - f(c)\right| \leqslant \varepsilon$. Alors si $|x - c| \leqslant \eta$ avec $x > c$,

$$\left|\frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c)\right| = \left|\frac{1}{x - c}\int_c^x (f(t) - f(c))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{x - c}\int_c^x \left|f(t) - f(c)\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{(x - c)\varepsilon}{x - c} = \varepsilon$$

et de même si $x < c$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il suffit d'appliquer le raisonnement à $\mathfrak{Re}\, f$ et $\mathfrak{Im}\, f$. □

Corollaire

(i) Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.

(ii) Si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, F primitive de f sur I, $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(iii) Si f est de classe $\mathscr{C}^1([a, b])$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

*(iv) **Inégalité des accroissements finis** : Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et f' bornée par k, alors f est k-lipschitzienne sur $[a, b]$.*

Démonstration

(ii) $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $F - F(a)$ sont deux primitives de f sur l'intervalle I s'annulant en a, donc sont égales.
(iii) f primitive de f'.
(iv) Si $x < y$, $\left|f(x) - f(y)\right| = \left|\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant k|x - y|$. □

Propriété

Soient I, J intervalles de $\mathbb{R}$, $u, v : I \to J$ dérivables, $f : J \to \mathbb{K}$ continue.

L'application $\varphi : \begin{vmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{vmatrix}$ est dérivable sur I et

$$\forall\, x \in I, \quad \varphi'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x)).$$

Démonstration

Si F primitive de f, $\varphi = F\circ v - F\circ u$. □

Exemple

$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, expression de φ'.

2 Intégration par parties

Propriété

Si u, v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,

$$\forall\, a, b \in I,\quad \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque

En fait, u, v dérivables et u', v' continues par morceaux suffit.

Démonstration

$(uv)' = u'v + uv'$ puis intégrer entre a et b. □

Exemple

Équivalent de $f(x) = \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^t \ln t\,\mathrm{d}t$ en $+\infty$.

$f(x) = \mathrm{e}^x \ln x - \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$ et si $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^x - \mathrm{e} = \mathrm{o}(\mathrm{e}^x \ln x)$.

3 Changement de variable

Propriété

Si I intervalle, $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$, f continue sur I,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Démonstration

Si F primitive de f, $(F\circ\varphi)' = f\circ\varphi \times \varphi'$. □

VI CALCUL DE PRIMITIVES ET D'INTÉGRALES (RAPPELS)

1 Calculs directs

Il est bien entendu indispensable de connaître ses primitives usuelles (cf formulaire).

On reconnaît souvent une forme $u' \times v'(u)$ qui s'intègre en $v \circ u$ (voir aussi le changement de variable)

On peut parfois passer par les complexes : par définition, la partie réelle (imaginaire) de la primitive est la primitive de la partie réelle (imaginaire).

2 L'intégration par parties

a Fonction dont la dérivée est plus simple...

...comme par exemple les fonctions $\ln, \text{Arccos}, \text{Arcsin}, \text{Arctan}$, etc.

b Abaissement du degré, formule de récurrence

Exemple

$$\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

3 Le changement de variable

a On veut calculer $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$

C'est en fait le cas où on reconnaît une forme $\varphi' \times f \circ \varphi$.

b On veut calculer $\int f(x)\mathrm{d}x$

Dans ce cas, il faut écrire $x = \varphi(t)$ avec φ de classe $\mathscr{C}^1$. Mais attention, si on fait un calcul de primitive, il faudra choisir φ **bijective** pour pouvoir à la fin du calcul revenir de t à x ($t = \varphi^{-1}(x)$). Si c'est un calcul d'intégrale avec des bornes, φ n'a pas besoin d'être bijective ! (on en revient pas à la première variable.)

Comment déterminer un bon changement de variable ? Pas toujours facile, mais voici quelques tuyaux pour y parvenir.

4 Les fractions rationnelles

Parfois, un simple changement de variable, ou des astuces du type $+1-1$ permettent de calculer les primitives.

Si ce n'est pas possible de simplifier « à vue », l'idée est de se ramener à des fractions simples pour utiliser, si $a \in \mathbb{R}$, sur $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)(t-a)^{n-1}} + C \text{ si } n \neq 1 \quad \text{et} \quad \int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x = \ln|t-a|.$$

Pour se faire on procède à une **décomposition en éléments simples**. Ne pas oublier la partie entière si elle est non nulle.

Il y a un autre cas à traiter : c'est celui pour lequel on obtient un facteur ax^2+bx+c au dénominateur sans racine réelle : cela donne dans la décomposition un terme en $\dfrac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$, qui se primitive en $\ln$ et Arctan :

- On se débarrasse du x au numérateur en faisant apparaître la dérivée $2ax+b$ du dénominateur et on intègre en $\ln$,
- on met sous forme canonique le dénominateur du terme restant et on intègre en Arctan.

5 Les fonctions trigonométriques

Si on veut intégrer une fonction polynomiale en $\cos x$ et $\sin x$, le plus simple est de linéariser. Cependant, si on a un terme en $\sin^p x \cos^q x$ avec p ou q impair, on peut poster $t = \cos x$ si q est impair et $t = \sin x$ si p est impaire en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Si on veut intégrer une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$, on applique les règles de Bioche : Si $f(x)\mathrm{d}x$ est invariant par

- $x \mapsto -x$, on pose $t = \cos x$;
- $x \mapsto \pi - x$, on pose $t = \sin x$;
- $x \mapsto \pi + x$, on pose $t = \tan x$;
- Sinon on pose $t = \tan \frac{x}{2}$.

6 Les fonctions hyperboliques

Pour les fonctions faisant intervenir $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}$ et exp, on peut poser $t = \mathrm{e}^x$ ($\mathrm{ch}\, x = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right)$, $\mathrm{sh}\, x = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right)$, $\mathrm{th}(x) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.)

Si l'on a une fraction rationnelle en $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}$, il peut être plus efficace d'appliquer un changement de variable obtenu grâce aux règles de Bioche appliquées à la fraction rationnelle dans laquelle on aura remplacé mentalement $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}$ par $\cos, \sin, \tan$ respectivement.

7 Les fonctions avec radical

- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ (x et $\sqrt{ax+b}$ en particulier), on pose $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.
- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ($a \neq 0$), il faut mettre ce dernier sous forme canonique pour obtenir du $\sqrt{\pm(\alpha x+\beta)^2 \pm 1}$ puis poser $t = \alpha x + \beta$. Ensuite, pour :
  - ⋆ $\sqrt{t^2+1}$ on pose $t = \mathrm{sh}\, u$ ($\mathrm{sh}^2 + 1 = \mathrm{ch}^2$) ou $t = \tan u$ ($1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$, attention à l'intervalle dans ce cas là.)
  - ⋆ $\sqrt{t^2-1}$ on pose $t = \pm \mathrm{ch}\, u$ suivant le signe de t. ($\mathrm{ch}^2 - 1 = \mathrm{sh}^2$.)
  - ⋆ $\sqrt{1-t^2}$ on pose $t = \sin u$ ou $t = \cos u$ ($1 - \cos^2 = \sin^2$ et $1 - \sin^2 = \cos^2$.)

VII FORMULES DE TAYLOR

Définition

Si f est n fois dérivable en a, son **développement de Taylor** en a à l'ordre n est

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

et le **reste de Taylor** de f en a à l'ordre n est $R_n = f - T_n$ (tel que $f = T_n + R_n$).

On sait déjà que si f est polynomiale de degré d, pour tout $n \geqslant d+1$, $R_n \equiv 0$.
On va chercher à :

- exprimer **globalement** R_n : c'est la formule de Taylor avec reste intégral,
- majorer **globalement** R_n : c'est l'inégalité de Taylor-Lagrange,
- dominer **localement** R_n : c'est la formule de Taylor-Young.

1 Formule de Taylor avec reste intégral

Propriété : Formule de Taylor avec reste intégral

*Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que f **est de classe** $\mathscr{C}^{n+1}$ **sur** I, $a \in I$. Pour tout $x \in I$,*

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

ie

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

À connaître parfaitement !

Démonstration

Par récurrence sur n.

- Si $n = 0$, $f \in \mathscr{C}^1(I)$, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

- Si c'est vrai pour un $n \geqslant 0$, $f \in \mathscr{C}^{n+2}(I)$, par hypothèse de récurrence, si $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par intégration par parties, $f^{(n+1)}$ et $t \mapsto -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$,

$$\begin{aligned} R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

ce qui établit la récurrence. □

2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Propriété : Inégalité de Taylor-Lagrange

*Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que f **est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur** I, $a \in I$. Pour tout $x \in I$,*

$$|R_n(x)| = \left| f(x) - \left(f(a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) \right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|.$$

À connaître parfaitement ! Mais c'est plus facile, il n'y a que du $n+1$.

Démonstration

- Ok si $x = a$.
- Si $x > a$, par Taylor reste intégral, les bornes étant dans le bon sens,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| = \left| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \right| &\leqslant \int_a^x \left| \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \left| f^{(n+1)}(t) \right| \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Comme $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a,x]$, $\sup\limits_{t \in [a,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$ existe et, tout étant positif et les bornes dans le bon sens toujours,

$$|R_n(x)| \leqslant \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \sup_{[a,x]} \left| f^{(n+1)} \right| \mathrm{d}t = \sup_{[a,x]} \left| f^{(n+1)} \right| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,x]} \left| f^{(n+1)} \right|$$

- Si $x < a$,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| = \left| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \right| &\leqslant \left| \int_a^x \left| \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \int_x^a \frac{(t-x)^n}{n!} \left| f^{(n+1)}(t) \right| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \sup_{[x,a]} \left| f^{(n+1)} \right| \int_x^a \frac{(t-x)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[x,a]} \left| f^{(n+1)} \right|. \end{aligned}$$ □

Exemple

$f = \exp$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, pour tout n, $\exp^{(n)}(0) = 1$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange nous dit alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left| \mathrm{e}^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \right| \leqslant \dfrac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)!} \sup\limits_{[0,x]}(\exp) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Donc $\boxed{\mathrm{e}^x = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k!}}$.

Exercice

Montrer la **formule de Taylor-Lagrange** : si f est de classe $\mathscr{C}^{(n+1)}$ sur I, $a, b \in I$, on a $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

On applique n fois le théorème de Rolle à

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \cdots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{A}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

avec A tel que $\varphi(a) = 0$.

3 Formule de Taylor-Young

Propriété : Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que f ***est de classe*** $\mathscr{C}^n$ ***sur*** I, $a \in I$.

$$R_n(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right)$$

ie

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right).$$

Remarques

R 1 – En fait, f de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ et n fois dérivable en a suffit.

R 2 – Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, on a le résultat plus fort

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x \to a}{\mathrm{O}}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Démonstration

Voir chapitre analyse asymptotique (primitivation de développements limités). □