Représentation matricielle des applications linéaires

Extrait du programme officiel :

Matrices et applications linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases.	Notation $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$. Isomorphisme $u \mapsto \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$.
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes.
b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice	
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul.
Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. L'inverse d'une matrice triangulaire est une matrice triangulaire.	
d) Blocs	
Matrice par blocs.	Interprétation géométrique.
Théorème du produit par blocs.	La démonstration n'est pas exigible.

Changements de bases, équivalence et similitude

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Changements de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre.	La matrice de passage $P_e^{e'}$ de e à e' est la matrice de la famille e' dans la base e. Inversibilité et inverse de $P_e^{e'}$.
Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire.	
b) Matrices équivalentes et rang	
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est de rang r, il existe une base e de E et une base f de F telles que : $\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = J_{n,p,r}$.	La matrice $J_{n,p,r}$ a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.
Matrices équivalentes.	Interprétation géométrique.
Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à $J_{n,p,r}$.	Classification des matrices équivalentes par le rang.
Invariance du rang par transposition.	
Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.	
c) Matrices semblables et trace	
Matrices semblables.	Interprétation géométrique.
Trace d'une matrice carrée.	
Linéarité de la trace, relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, invariance par similitude.	Notations $\mathrm{tr}(A)$, $\mathrm{Tr}(A)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\text{tr}(uv) = \text{tr}(vu)$.	Notations $\text{tr}(u)$, $\text{Tr}(u)$. Trace d'un projecteur.

Opérations élémentaires et systèmes linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Opérations élémentaires	
Interprétation en termes de produit matriciel.	Les opérations élémentaires sont décrites dans le paragraphe « Systèmes linéaires » du chapitre « Calculs algébriques ».
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application au calcul du rang et à l'inversion de matrices.
b) Systèmes linéaires	
Écriture matricielle d'un système linéaire.	Interprétation géométrique : intersection d'hyperplans affines.
Système homogène associé. Rang, dimension de l'espace des solutions.	
Compatibilité d'un système linéaire. Structure affine de l'espace des solutions.	
Le système carré $Ax = b$ d'inconnue x possède une et une seule solution si et seulement si A est inversible. Système de Cramer.	Le théorème de Rouché-Fontené et les matrices bordantes sont hors programme.
§ Algorithme du pivot de Gauss.	

Table des matières

I MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

1 Matrice d'une application linéaire dans des bases

a Matrice d'un ou plusieurs vecteurs

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ et $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E.

Si $x = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n \in E$, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathscr{B}$, on appelle **matrice de x dans la base $\mathscr{B}$** la matrice colonne

$$X = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Remarque

On notera aussi $x \underset{\mathscr{B}}{\longleftrightarrow} X$.

Propriété

L'application $\left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & X = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme.*

Remarque

On retiendra que $\alpha x + \beta y \underset{\mathscr{B}}{\longleftrightarrow} \alpha X + \beta Y$.

Exemples

E 1 – Si $E = \mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_c$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \underset{\mathscr{B}_c}{\longleftrightarrow} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

E 2 – Pour $E = \mathbb{K}_n[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_c$, $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \underset{\mathscr{B}_c}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Si $\mathscr{B} = \left(1, X-a, \dots, (X-a)^n\right)$, $P \underset{\mathscr{B}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} P(a) \\ P'(a) \\ \vdots \\ \frac{P^{(n)}(a)}{n!} \end{pmatrix}$ d'après la formule de Taylor.

Définition

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs de E, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.

Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on note $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ les coordonnées de $\vec{x}_j$ dans la base $\mathscr{B}$ (ie $\vec{x}_j \underset{\mathscr{B}}{\longleftrightarrow} X_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{pmatrix}$.)

On appelle **matrice de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$** la matrice rectangulaire

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} X_1 & X_2 & \dots & X_p \end{array} \right) = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

On place dans les colonnes les coordonnées dans $\mathscr{B}$ des vecteurs de $\mathscr{F}$:

$$\begin{array}{rc l}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = & \left(\begin{array}{c|c|c|c} & & \dots & \end{array} \right) & \begin{array}{l} \text{selon } \vec{e}_1 \\ \text{selon } \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \text{selon } \vec{e}_n \end{array} \\
& \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_p \end{array} &
\end{array}$$

Remarque

La matrice est carrée lorsque le nombre de vecteurs est $\dim E$.

Propriété

L'application $\left| \begin{array}{ccc} E^p & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) & \longmapsto & A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme.*

Exemples

E1 – Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, $\vec{x}_1 = (0,1,2)$, $\vec{x}_2 = (1,2,3)$, $\vec{x}_3 = (1,1,1)$ et $\vec{x}_4 = (3,6,9)$. Alors $\mathrm{Mat}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base $\mathscr{B} = ((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

E 2 – $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = I_n$

E 3 – $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\cos,\sin) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f,g)$, $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$.

$$\mathrm{Mat}_{(\cos,\sin)}(f,g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \quad \mathrm{Mat}_{(f,g)}(\cos,\sin) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2\mathrm{i} \\ 1/2 & -1/2\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}).$$

Lien entre les deux matrices ?

b Matrice d'une application linéaire

Définition

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p)$ une base de E et $\mathscr{C} = \left(\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_p\right)$ une base de F et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

On appelle **matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathscr{B}$ au départ et $\mathscr{C}$ à l'arrivée** la matrice rectangulaire

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(\mathscr{B})) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(\vec{e}_1),\dots,u(\vec{e}_p)) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Lorsque $u \in \mathscr{L}(E)$ ($E = F$: endomorphisme) et $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarques

R 1 – On notera aussi $u \underset{\mathscr{C},\mathscr{B}}{\longleftrightarrow} A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $u \underset{\mathscr{B}}{\longleftrightarrow} A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ si $u \in \mathscr{L}(E)$. Cette notation s'avérera pratique pour les changements de bases et les compositions.

R 2 – On place dans les colonnes les coordonnées dans $\mathscr{C}$ des images par u des vecteurs de $\mathscr{B}$:

$$\begin{array}{cc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \quad & \quad & \cdots & \quad \\ & & & \\ & & & \end{array}\right) & \begin{array}{l} \leftarrow \vec{f}_1 \\ \leftarrow \vec{f}_2 \\ \quad\vdots \\ \leftarrow \vec{f}_n \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ u(\vec{e}_1) & u(\vec{e}_2) & \dots & u(\vec{e}_p) \end{array} & \end{array}$$

Exemples

E 1 – $u : (x,y,z) \to (x+y-z, x+z)$ dans les bases canoniques.

E 2 – $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_5[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$ dans les bases canoniques.

E 3 – $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = I_n$. ⚠ Faux si $\mathscr{C} \neq \mathscr{B}$!
$E = \mathbb{R}^3$, $\mathscr{C}$ base canonique et $\mathscr{B} = \big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_3\,!$$

Propriété

L'application $\begin{array}{|ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \end{array}$ *est un isomorphisme (d'espaces vectoriels.)*

Remarque

On retiendra que si $u \underset{\mathscr{C},\mathscr{B}}{\longleftrightarrow} A$ et $v \underset{\mathscr{C},\mathscr{B}}{\longleftrightarrow} B$, alors $\alpha u + \beta v \underset{\mathscr{C},\mathscr{B}}{\longleftrightarrow} \alpha A + \beta B$.

Démonstration

La bijectivité vient du fait qu'une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base. (composée de $u \mapsto u(\mathscr{B})$ et de l'isomorphisme précédent). □

Remarque

On retrouve que $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim E \times \dim F$.

c Images de vecteurs et matrices

Propriété

Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, E,F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

Pour tout $\vec{x} \in E$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(\vec{x})) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{x})$.

Autrement dit, $y = u(x)$ se traduit matriciellement par $Y = AX$ avec des notations évidentes.

Remarque

Autrement dit, si $x \underset{\mathscr{B}}{\longleftrightarrow} X$, $u \underset{\mathscr{C},\mathscr{B}}{\longleftrightarrow} A$ et $y = u(x) \underset{\mathscr{C}}{\longleftrightarrow} Y$ alors

$$\underset{\substack{\mathscr{C}\\ n,1}}{Y} = \underset{\substack{\mathscr{C},\mathscr{B}\\ n,p}}{A}\ \underset{\substack{\mathscr{B}\\ p,1}}{X}$$

Démonstration

$\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$, $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A.

$$\vec{y} = u(\vec{x}) = u(x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_p\vec{e}_p) = x_1 u(\vec{e}_1) + \cdots + x_p u(\vec{e}_p) \underset{\mathscr{C}}{\longleftrightarrow} x_1 C_1 + \cdots + x_p C_p = AX.$$

(c'est un produit par blocs !) □

Exemple

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans les bases $(1, X-1, X^2-2, X^3-3)$ au départ et $(1, X-1, (X-1)^2)$ à l'arrivée est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$P = X^2 + X = 3 + (X-1) + (X^2-2)$, alors $u(P) \underset{\mathscr{C}}{\longleftrightarrow} 3C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Donc $u(P) = 8 + (X-1) + 3(X-1)^2$.

d Composition d'applications linéaires et matrices

Propriété

Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$, $n = \dim F$, $q = \dim G$, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de E, $\mathscr{C} = \left(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\right)$ une base de F, $\mathscr{D} = (\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q)$ une base de G, $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u).$$

Remarque

Autrement dit, si $u \underset{\mathscr{C},\mathscr{B}}{\longleftrightarrow} A$, $v \underset{\mathscr{D},\mathscr{C}}{\longleftrightarrow} B$ et $v \circ u \underset{\mathscr{D},\mathscr{B}}{\longleftrightarrow} C$ alors

$$\underset{\substack{\mathscr{D},\mathscr{B} \\ q,p}}{C} = \underset{\substack{\mathscr{D},\mathscr{C} \\ q,n}}{B} \times \underset{\substack{\mathscr{C},\mathscr{B} \\ n,p}}{A}$$

Démonstration

- **1ère méthode :** On note C_j les colonnes de A.
  $u(\vec{e}_j) \underset{\mathscr{C}}{\longleftrightarrow} C_j$ et $v \underset{\mathscr{D},\mathscr{C}}{\longleftrightarrow} B$ donc $v \circ u(\vec{e}_j) \underset{\mathscr{D}}{\longleftrightarrow} BC_j$
  Or BC_j est bien la j^{eme} colonne de $B \times A$.
- **2ème méthode :** La j^{e} colonne de $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(v \circ u)$ contient les coordonnées de $v \circ u(\vec{e}_j)$ dans la base $\mathscr{D} = (\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q)$ une base de G.
  Les coordonnées de $u(\vec{e}_j)$ dans $\mathscr{C} = \left(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\right)$ se trouvent dans la j^{e} colonne de A.
  Donc $v \circ u(\vec{e}_j) = v\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \vec{f}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} v\left(\vec{f}_k\right)$.
  Or les coordonnées de $v\left(\vec{f}_k\right)$ dans $\mathscr{D} = (\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q)$ se trouvent dans la i^{e} colonne de B.
  Donc $v\left(\vec{f}_k\right) = \sum_{i=1}^{q} b_{i,k} \vec{g}_i$. Soit finalement
  $$v \circ u(\vec{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j} \vec{g}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j}\right) \vec{g}_i$$
  ce qui nous redonne bien la j^{e} colonne de $B \times A$. □

Propriété

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E.

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}\right.$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

Remarque

Cela permet de retrouver les propriétés classiques du produit matriciel : associativité, bilinéarité, etc.

Propriété

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Sont équivalentes :

(i) A est inversible

(ii) Toute application linéaire représentée par A est un isomorphisme

(iii) A représente un isomorphisme

(iv) A est inversible à gauche ou à droite

De plus, si c'est le cas et si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, alors $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u^{-1})$.

Démonstration

- $(i) \Rightarrow (ii)$: Si A est inversible et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, soit $v \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(v)$.
  Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v \circ u) = I_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$ donc $v \circ u = \mathrm{id}_E$. Donc u est inversible à gauche et comme $\dim E = \dim F = n$, u est un isomorphisme.
- $(ii) \Rightarrow (iii)$: ok.
- $(iii) \Rightarrow (i)$: Si A est inversible et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ isomorphisme tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$. Si $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u^{-1})$, alors $A \times B = B \times A = I_n$ donc A est inversible.
- $(i) \Rightarrow (iv)$: ok.
- $(iv) \Rightarrow (i)$: Si A est inversible à gauche et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, tels que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On a $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $B \times A = I_n$. Soit $v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors $v \circ u = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$. Donc u endomorphisme inversible à gauche en dimension finie donc un isomorphisme donc A est inversible.
  Idem à droite.

□

2 Application linéaire canoniquement associée

a Définition

Définition

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle **application linéaire canoniquement associée à** A l'unique $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dont la matrice dans les bases canoniques est A.

Ainsi, écrire $(y_1, \dots, y_n) = u(x_1, \dots, x_p)$ revient à écrire $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.
Avec l'identification de $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui consiste à écrire en colonne les n-uplets, on se permettra d'écrire

$$\vec{y} = u(\vec{x}) = u\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Les colonnes de A contiennent les images par u des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

Exemple

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$. Application linéaire canoniquement associée :

$$u:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix}x+2y+3z\\4x+5y+6z\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

b Image, noyau, rang d'une matrice

Définition

Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, u l'application linéaire canoniquement associée à A. On définit l'image, le noyau et le rang de A par :

$$\operatorname{Ker} A=\left\{X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\mid AX=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right\}\text{, correspond à }\operatorname{Ker} u=\{\vec{x}\in\mathbb{K}^p\mid u(\vec{x})=\vec{0}_{\mathbb{K}^p}\}$$

$$\operatorname{Im} A=\{AX\ ;\ X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}\text{correspondant à }\operatorname{Im} u=\{u(\vec{x})\ ;\ \vec{x}\in\mathbb{K}^p\}$$

$$\operatorname{rg} A=\operatorname{rg} u=\dim(\operatorname{Im} A)$$

Remarques

R 1 – On fait souvent l'abus d'écriture $\operatorname{Ker} A=\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} A=\operatorname{Im} u$.

R 2 – Si, plus généralement, $A=\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ alors $\operatorname{Ker} A$ contient les vecteurs colonnes représentant les éléments dans $\operatorname{Ker} u$ dans $\mathcal{B}$ et $\operatorname{Im} A$ contient les vecteurs colonnes représentant les éléments dans $\operatorname{Im} u$ dans $\mathcal{C}$.

Propriété

Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

(i) $\operatorname{Im} A=\operatorname{Vect}(C_1,\dots,C_p)$ *où* $C_1,\dots,C_p$ *sont les colonnes de* A.

(ii) $\operatorname{rg} A=\operatorname{rg}(C_1,\dots,C_p)$.

(iii) $\operatorname{rg} A+\dim(\operatorname{Ker} A)=p$.

Remarques

R 1 – $\operatorname{Ker} A$ est décrit par un système d'équations homogène de matrice A elle-même.

R 2 – Des opérations élémentaires sur les éléments de $(C_1,\dots,C_p)$ ne changent pas l'espace vectoriel qu'ils engendrent et donc leur rang. Ainsi, des opérations élémentaires sur les colonnes de A ne changent pas son rang.

Exemple

$A=\begin{pmatrix}1&5&2\\3&6&2\end{pmatrix}$.

$\operatorname{Ker} A=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}2\\-4\\9\end{pmatrix}$ donc $2C_1-4C_2+9C_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

$\operatorname{rg} A=3-1=2$, $\operatorname{Im} A=\mathbb{R}^2$.

Si $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ P = a + bX + cX^2 & \longmapsto & (a+5b+2c)+(3a+6b+2c)X \end{array} \right.$ alors u est linéaire et représentée par A dans les bases canoniques (attention : ce n'est pas l'application linéaire canoniquement associée à A !).

D'après l'étude précédente, $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(2-4X+9X^2)$ et $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}_1[X]$.

Propriété

Sont équivalentes :

(i) $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *est inversible*

(ii) Son application linéaire canoniquement associée u est un automorphisme

(iii) $\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(iv) $\operatorname{rg} A = n$

Démonstration

$(i) \iff (ii)$ est déjà connu, puis $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u$ et la dimension est finie donnent directement $(ii) \iff (iii) \iff (iv)$. □

Remarque

Cela permet de justifier la méthode décrite dans le chapitre précédent pour inverser une matrice : $\vec{y} = A\vec{x}$ admet une unique solution si et seulement si $A\vec{x} = 0$ admet comme unique solution la solution nulle si et seulement si $\operatorname{Ker} A$ est réduit à 0...

II Changements de bases, équivalence, similitude

1 Changements de bases

a Matrices de passage

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E.

On appelle **matrice de passage de** $\mathscr{B}$ **à** $\mathscr{B}'$ notée $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ dont les colonnes sont les coordonnées dans $\mathscr{B}$ des vecteurs de $\mathscr{B}'$. Autrement dit :

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\operatorname{id}_E)$$

Remarque

$\operatorname{id}_E \underset{\mathscr{B},\mathscr{B}'}{\longleftrightarrow} P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.

Exemple

$\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ tel que

$$\begin{cases} e'_1 & = & \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ e'_2 & = & \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ e'_3 & = & \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \end{cases}$$

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Propriétés

(i) *Toute matrice de passage est inversible et* $\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

(ii) *Toute matrice inversible est une matrice de passage.*
Plus précisément si E est de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$, alors on peut trouver une base $\mathscr{B}'$ de E telle que $A = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.

Démonstration

(i) $\mathrm{id}_E : (E, \mathscr{B}') \to (E, \mathscr{B})$ est inversible et $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E : (E, \mathscr{B}) \to (E, \mathscr{B}')$ donc $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$ est inversible et $\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_E^{-1}) = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

(ii) Si A inversible et $u \in \mathscr{L}(E)$ application linéaire représentée par A dans la base $\mathscr{B}$ de E alors u isomorphisme donc $u(\mathscr{B})$ base de E et $A = P_{\mathscr{B}}^{u(\mathscr{B})}$. □

Remarque

On en déduit une nouvelle méthode d'inversion de matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\mathscr{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3) = u(\mathscr{B})$.

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 & = & \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 & = & 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 & = & 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \end{cases} \iff \cdots \iff \begin{cases} \vec{e}_1 & = & -\vec{e}'_1 + 2\vec{e}'_2 - \vec{e}'_3 \\ \vec{e}_2 & = & 2\vec{e}'_1 - 2\vec{e}'_2 + \vec{e}'_3 \\ \vec{e}_3 & = & -\vec{e}'_2 + \vec{e}'_3 \end{cases}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b Formules de changement de bases

Propriété : Changement de base d'un vecteur

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ deux bases de E, $\vec{x}\in E$.
Si $X=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{x})$ et $X'=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\vec{x})$, alors

$$\underset{\mathscr{B}}{X} = \underset{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}{P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}} \times \underset{\mathscr{B}'}{X'}$$

Démonstration

Avec $\mathrm{id}_E:(E,\mathscr{B}')\to(E,\mathscr{B})$, $\vec{x}=\mathrm{id}_E(\vec{x})$ donc

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{x})} = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E(\vec{x}))} = \underset{\mathscr{B},\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)}\underset{\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\vec{x})}$$

donc $X=P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}X'$. □

Propriété : Changement de base pour une application linéaire

Soient E,F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ deux bases de E, $\mathscr{C},\mathscr{C}'$ deux bases de F, $u\in\mathscr{L}(E,F)$.
Soient $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $A'=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$. Alors

$$\underset{\mathscr{C}',\mathscr{B}'}{A'} = \underset{\mathscr{C}'\to\mathscr{C}}{P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}}} \times \underset{\mathscr{C},\mathscr{B}}{A} \times \underset{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}{P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}}$$

c'est-à-dire, si $P=P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $Q=P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$,

$$A'=Q^{-1}AP \quad ie \quad A=QA'P^{-1}$$

Démonstration

$u:(E,\mathscr{B}')\to(F,\mathscr{C}')$ peut se représenter par

$$(E,\mathscr{B}')\xrightarrow{\mathrm{id}_E}(E,\mathscr{B})\xrightarrow{u}(F,\mathscr{C})\xrightarrow{\mathrm{id}_F}(F,\mathscr{C}')$$

(On écrit simplement $u=\mathrm{id}_F\circ u\circ\mathrm{id}_E$.)
D'après la propriétés sur les matrices de composées, on a alors

$$A'=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}(\mathrm{id}_F)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$$

d'où le résultat. □

Corollaire : Changement de base pour un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ deux bases de E, $u\in\mathscr{L}(E)$.
Soient $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $A'=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$. Alors

$$\underset{\mathscr{B}'}{A'} = \underset{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}{P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}} \times \underset{\mathscr{B}}{A} \times \underset{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}{P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}}$$

c'est-à-dire, si $P=P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$

$$A'=P^{-1}AP \quad ie \quad A=PA'P^{-1}$$

Exemple

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&0&1\\0&2&4\end{pmatrix}=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \text{ et } \begin{cases}\vec{e}_1{}'&=&\vec{e}_1\\ \vec{e}_2{}'&=&\vec{e}_1+\vec{e}_2\\ \vec{e}_3{}'&=&\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3\end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases}\vec{e}_1&=&\vec{e}_1{}'\\ \vec{e}_2&=&-\vec{e}_1{}'+\vec{e}_2{}'\\ \vec{e}_3&=&-\vec{e}_2{}'+\vec{e}_3{}'\end{cases}$$

Matrice dans la base $\mathscr{B}'$ de u ?

- **Première méthode** :
  - ⋆ D'après la première colonne $u(\vec{e}_1{}')=u(\vec{e}_1)\underset{\mathscr{B}}{\longleftrightarrow}\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)$ donc $u(\vec{e}_1{}')=\vec{e}_1-\vec{e}_2=2\vec{e}_1{}'-\vec{e}_2{}'$.
  - ⋆ $u(\vec{e}_2{}')\underset{\mathscr{B}}{\longleftrightarrow}A\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}4\\-1\\2\end{smallmatrix}\right)$ donc $u(\vec{e}_2{}')=4\vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3=5\vec{e}_1{}'-3\vec{e}_2{}'+2\vec{e}_3{}'$.
  - ⋆ $u(\vec{e}_3{}')\underset{\mathscr{B}}{\longleftrightarrow}A\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}6\\0\\6\end{smallmatrix}\right)$ donc $u(\vec{e}_3{}')=6\vec{e}_1+6\vec{e}_3=6\vec{e}_1{}'-6\vec{e}_2{}'+6\vec{e}_3{}'$.

  Donc $A'=\begin{pmatrix}2&5&6\\-1&-3&-6\\0&2&6\end{pmatrix}$.

- **Deuxième méthode** : $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

  $A'=P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\times A\times P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}=\begin{pmatrix}2&5&6\\-1&-3&-6\\0&2&6\end{pmatrix}$

2 Matrices équivalentes et rang

a Relation d'équivalence

Définition : Matrices équivalentes

Une matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite **équivalente** à une autre matrice B de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si on peut trouver $U\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et $V\in\mathscr{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que

$$A=UBV$$

Propriété

On définit ainsi une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Propriété

Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles représentent une même application linéaire dans des bases différentes.

Démonstration

$\Leftarrow$: formules de changement de base.
$\Rightarrow$: Si A et B sont équivalentes, U,V inversibles telles que $A=UBV$, $u\in\mathscr{L}(E,F)$ représenté par B dans des bases $\mathscr{B},\mathscr{C}$.
On a vu qu'on pouvait interpréter les matrices inversibles V et U^{-1} comme matrices de passage de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ à des bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}'$ de E et F respectivement.
Alors, par formule de changement de bases, A représente u dans les bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}'$. □

Propriété

A et B sont équivalentes si et seulement si $A^\intercal$ et $B^\intercal$ le sont.

b Lien avec le rang

On rappelle que le rang d'une matrice est celui de l'application linéaire canoniquement associée ou encore celui de la famille de ses vecteurs colonnes.

Propriété

Deux matrices équivalentes ont même rang.

Démonstration

Si A est équivalente B, on a des matrices inversibles U, V telles que $A = UBV$. Si f, g, u, v sont les applications linéaires canoniquement associées à A, B, U, V, alors $f = u \circ g \circ v$. Comme u et v sont des isomorphismes, $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$ donc $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$. □

Propriété

Si une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est de rang r, alors il existe des bases $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{C}$ de F dans lesquelles u est représentée par $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$.

Démonstration

La forme de la matrice recherchée incite à commencer par déterminer les derniers vecteurs de $\mathscr{B}$ puis les premiers vecteurs de $\mathscr{C}$.

Si $\operatorname{rg} u = r$ alors, d'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker} u) = p - r$. Soit $(\vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_p)$ une base de $\operatorname{Ker} u$ que l'on complète en une base $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ de E.

Soient pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\vec{f}_i = u(\vec{e}_i)$. Comme $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r)$ est une base d'un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E et comme u induit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ sur $\operatorname{Im} u$ (théorème du rang), $\left(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_r\right)$ est une famille libre de F que l'on peut compléter en une base $\mathscr{C}$.

On a alors facilement $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = J_{n,p,r}$. □

Théorème

Une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à $J_{n,p,r}$.

Démonstration

La propriété précédente appliquée à l'application linéaire canoniquement associée à A donne le sens $\Rightarrow$.
Réciproquement, si A est équivalente à $J_{n,p,r}$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} J_{n,p,r} = r$. □

Corollaire

Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Démonstration

Le sens $\Rightarrow$ a déjà été vu.
Le sens $\Leftarrow$ est une conséquence du théorème précédent et de la transitivité de l'équivalence. □

Remarque

Les classes d'équivalences correspondent donc aux ensembles de matrices de même rang.

Corollaire

(i) *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^\intercal)$.

(ii) *Le rang d'une matrice est celui de la famille de ses vecteurs lignes.*
En particulier, une matrice carrée est inversible si et seulement si ses vecteurs lignes forment une famille libre.

Démonstration

A est équivalente à $J_{n,p,r}$ donc $A^\intercal$ est équivalente à $J_{n,p,r}^\intercal = J_{p,n,r}$ donc $\operatorname{rg}(A^\intercal) = r = \operatorname{rg} A$.
Les lignes de A sont les colonnes de $A^\intercal$. □

Remarque

On retrouve le fait que $\operatorname{rg} A \leqslant \min(n,p)$.

Propriété

Le rang d'une matrice est égal au rang de n'importe quelle application linéaire qu'elle représente.

Démonstration

Si A représente u, alors A est équivalence à J_r avec $r = \operatorname{rg} u$ (autre matrice de u), donc $\operatorname{rg} A = r = \operatorname{rg} u$. □

3 Matrices semblables

a Définition

Définition : Matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite semblable à B lorsqu'on l'on a $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$A = PBP^{-1}$$

Propriété

La relation de similitude est une relation d'équivalence dont les classes sont appelées ***classes de similitudes****.*

Démonstration

- $A = I_n A I_n^{-1}$.
- Si $A = PBP^{-1}$, alors $B = P^{-1}AP = P^{-1}A\left(P^{-1}\right)^{-1}$.
- Si $A = PBP^{-1}$ et $B = QCQ^{-1}$, alors $A = (PQ)C(PQ)^{-1}$.

□

Remarque

Des matrices semblables sont équivalentes, mais la réciproque est fausse.

Propriété

$A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme (dans des bases différentes.)

Remarque

Cette caractérisation permet de démontrer la relation d'équivalence encore plus facilement ! Les classes d'équivalences sont les ensembles de toutes les matrices représentant un même endomorphisme.

Démonstration

Si A et B représentent un même endomorphisme, elles sont semblables par formule de changement de base.

Réciproquement, si $A = PBP^{-1}$, E un $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie n, $\mathscr{B}$ une base de E. Alors on a une base $\mathscr{B}'$ tel que la matrice inversible $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est représenté par B dans $\mathscr{B}'$, alors $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ par formule de changement de base.

□

Propriété

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBP^{-1}$.

(i) $\forall\, k \in \mathbb{N},\quad A^k = PB^kP^{-1}$

(ii) *A inversible ssi B l'est, et si c'est le cas, la formule précédente est valable dans $\mathbb{Z}$.*

Démonstration

A inversible ssi B l'est car A et B ont même rang.

- **Première méthode** : si u est canoniquement associé à A, alors il existe une base $\mathscr{B}$ dans laquelle u est représenté par B. Alors u^k est représenté par A^k dans la base canonique et par B dans la base $\mathscr{B}$. Donc par formule de changement de base, $A^k = PB^kP^{-1}$. Valable pour $k < 0$ si A ou B inversible.
- **Récurrence** : vrai pour $k = 0$, si c'est vrai pour un $k \geqslant 0$,

$$A^{k+1} = PA^kP^{-1}PAP^{-1} = PA^{k+1}P^{-1}.$$

- **Troisième méthode** : si $k \geqslant 0$,

$$A^k = (PBP^{-1})^k = PB(P^{-1}P)B\cdots(P^{-1}P)BP^{-1} = PB^nP^{-1}.$$

Puis si A et B inversible, $A^{-1} = (PBP^{-1})^{-1} = PB^{-1}P^{-1}$ appliqué à A^k et B^k donne le résultat dans $\mathbb{Z}$. □

Propriété

Si A et B sont semblables alors $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$. La réciproque est fausse.

Démonstration

$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(PBP^{-1}) = \operatorname{tr}(P^{-1}PB) = \operatorname{tr} B$. □

Exemples

E 1 – $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 12 & 5 & -6 \\ -8 & -25 & 6 \\ 17 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

E 2 – $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont même trace mais ne sont pas semblables (elles n'ont pas même rang).

b Trace d'un endomorphisme

Définition

Soit E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle trace de u, notée $\operatorname{tr} u$, la trace de n'importe quelle matrice le représentant.

Remarque

Définition licite vu la propriété précédente.

Propriété

tr *est une forme linéaire sur* $\mathscr{L}(E)$ *et si* $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.

Démonstration

Si A et B représentent u et v dans une même base, AB et BA représentent $u \circ v$ et $v \circ u$. □

Propriété

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

Démonstration

Il y a une base dans laquelle la matrice du projecteur est J_r. □

Remarque

Attention : toute matrice est équivalente à J_r où r est son rang, mais une matrice carrée n'est pas **semblable** à J_r en général. C'est en fait le cas si et seulement s'il s'agit d'un projecteur.

Exercice

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $p_1,\dots,p_m$ des projecteurs de E dont la somme vaut id_E. On note $F_1,\dots,F_m$ les images de $p_1,\dots,p_m$. Montrer que $E = \bigoplus_{k=1}^{m} F_k$.

c Diagonalisation (spé)

Position du problème : on a vu que les opérations sur les matrices se transmettent bien par la relation de similitude. Comme il est très facile de travailler avec des matrices diagonales, on essaye souvent de rendre une matrice semblable à une matrice diagonale.

Du point de vue des endomorphismes, cela revient à trouver une base dans laquelle la matrice est diagonale : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$. C'est une base dont les vecteurs vérifient $u(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$.

Définition

$u \in \mathscr{L}(E)$ est dit diagonalisable si et seulement s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale : $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale.

Remarque

Une matrice est diagonalisable si et seulement si l'application linéaire canoniquement associée est diagonalisable.

Définition

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$).

On appelle **valeur propre** de u (resp. A) tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $\vec{x} \in E$ (resp. $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) **non nul** tel que $u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ (resp. $AX = \lambda X$).

Un tel vecteur **non nul** est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.

On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ le sous-espace $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = \{\vec{x} \in E \mid u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\}$ (resp. $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}$).

L'ensemble des valeurs propres de u (resp. A) est appelé son **spectre**, noté $\mathrm{Sp}\,u$ (resp. $\mathrm{Sp}\,A$).

Remarques

R 1 – Les valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'une matrices correspondent à ceux de l'application linéaire canoniquement associée.

R 2 – λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ n'est pas injectif.

R 3 – Chercher les valeurs propres de A revient à trouver λ tel que $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

R 4 – 0 est valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible.

Propriété

Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Démonstration

Version matricielle : si $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de A, on veut montrer que $E_{\lambda_1}(A),\cdots,E_{\lambda_p}(A)$ sont en somme directe.

Par récurrence sur p.

- Rien à faire pour $p = 1$,

- Si c'est vrai pour $p-1$,
  Si $X_1 + \ldots + X_p = 0$ $(\star)$ avec pour tout i, $X_i \in E_{\lambda_i}(A)$, $AX_1 + \ldots + AX_p = 0$ donc $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_p X_p = 0$.
  En retranchant $\lambda_p \times (\star)$, on obtient $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_p)X_1}_{\in E_{\lambda_1}(A)} + \cdots + \underbrace{(\lambda_{p-1} - \lambda_p)X_{p-1}}_{\in E_{\lambda_{p-1}}(A)} = 0$
  Par (HR), on obtient pour $i \in [\![1, p-1]\!]$, $(\lambda_i - \lambda_p)X_i = 0$ et comme $\lambda_i \neq \lambda p$, $X_i = 0$.
  Puis $(\star)$ devient $X_p = 0$. La récurrence est établie.

□

Corollaire

Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Ainsi, pour diagonaliser une matrice (ou un endormorphisme), comme il faut former une base de vecteurs propres, il faut et il suffit que

$$\dim E = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \dim E_\lambda(A).$$

Une base diagonalisante est alors obtenue en mettant bout à bout les bases des sous-espaces propres.

Alors $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de A et où P est la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres placés dans le même ordre que les valeurs propres.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & -(\lambda+1) & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 2+\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$ par pivot de Gauss.

$A - \lambda I_3$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda + 1 = 0$ ou $2 + \lambda - \lambda^2 = 0$.
Donc $\operatorname{Sp}(A) = \{-1, 2\}$.

Remarque

Comme $0 \notin \operatorname{Sp}(A)$, A est inversible.

Si $\lambda = -1$, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff x + y + z = 0 : E_{-1}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Si $\lambda = 2$, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff x = y = z : E_2(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Autres calculs possibles :

- $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de rang 1 avec $C_1 - C_2 = C_1 - C_3 = 0$. Donc, par théorème du rang $\dim E_{-1}(A) = 2$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ en sont deux vecteurs non colinéaires donc $E_{-1}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
- $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ de rang 2 avec $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ et (C_1, C_2) libre. Donc, par théorème du rang $\dim E_2(A) = 1$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en est un vecteur non nul donc $E_2(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On a assez de vecteurs pour former une base : A est diagonalisable, $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A^n = P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1}$ ce qui permet de retrouver le résultat du TD :

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n+2(-1)^n & 2+(-1)^{n+1} & 2+(-1)^{n+1} \\ 2+(-1)^{n+1} & 2^n+2(-1)^n & 2+(-1)^{n+1} \\ 2+(-1)^{n+1} & 2+(-1)^{n+1} & 2^n+2(-1)^n \end{pmatrix}.$$

- **Application 1** : Trouver le terme général des suites x, y, z telles que pour tout n,

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$$

  On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, alors $X_{n+1} = AX_n$ donc pour tout n, $X_n = A^n X_0$.
  On peut même calculer le résultat sans calculer P^{-1} ! Si on pose $Y_n = P^{-1}X_n$, $Y_{n+1} = DY_n$ donc $Y_n = D^n Y_0$ et donc $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$.
- **Application 2** : Résoudre le système différentiel,

$$(S)\begin{cases} f' = g + h \\ g' = f + h \\ h' = f + g \end{cases}$$

  On pose $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$ (fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$), alors $X' = AX$ donc si $Y = P^{-1}X$, $(S) \iff Y' = DY$, donc si $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$,

$$(S) \iff \begin{cases} y_1' = -y_1 \\ y_2' = -y_2 \\ y_3' = 2y_3 \end{cases}$$

  donc

$$(S) \iff \exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y_1(t) = \lambda e^{-t} \\ y_2(t) = \mu e^{-t} \\ y_3(t) = \nu e^{2t} \end{cases}$$

  Puis $X = PY$ (pas besoin de P^{-1} ici !)

$$(S) \iff \exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda e^{-t} \\ \mu e^{-t} \\ \nu e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+\mu)e^{-t} + \nu e^{2t} \\ -\lambda e^{-t} + \nu e^{2t} \\ -\mu e^{-t} + \nu e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Remarque

De la même manière, on peut résoudre des suites récurrentes d'ordre 2 : Par exemple, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ (Fibonacci). On pose $X_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$. Alors $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $X_n = A^n X_0$ (Informatiquement, on calcule A^n par exponentiation rapide. Mathématiquement, on diagonalise. Les valeurs propres sont les racines... de l'équation caractéristique !)

Idem pour les EDL2 à cœfficients constants. $f'' + af' + bf = 0 \iff X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{pmatrix}$.

4 Rang et matrices extraites

Définition : Matrice extraite

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle **matrice extraite** ou **sous-matrice** de A toute matrice dont les cœfficients sont les $a_{i,j}$ pour $(i,j) \in I \times J$ avec $I \subset [\![1,n]\!]$ et $J \subset [\![1,p]\!]$.

On notera $A|_{I\times J}$ cette matrice, obtenue en supprimant des lignes et des colonnes de A.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix},\ A|_{\{1;3\}\times\{2;4\}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Propriété

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Pour toute sous-matrice R de A, $\operatorname{rg} R \leqslant \operatorname{rg} A$.

Démonstration

$R = A|_{I\times J}$ avec $I \subset [\![1,n]\!]$ et $J \subset [\![1,p]\!]$.

Les colonnes de $A|_{[\![1,n]\!]\times J}$ étant des colonnes de A, on a $\operatorname{rg} A|_{[\![1,n]\!]\times J} \leqslant \operatorname{rg} A$.

Les lignes de $R = A|_{I\times J}$ étant des lignes de $A|_{[\![1,n]\!]\times J}$, on a $\operatorname{rg} R \leqslant \operatorname{rg} A|_{[\![1,n]\!]\times J} \leqslant \operatorname{rg} A$. □

Propriété

Le rang d'une matrice est l'ordre maximum de ses matrices extraites (carrées) inversibles.

Démonstration

Si $A = 0$, elle n'a pas de matrice extraite inversible et est bien de rang 0.

Sinon, soit r l'ordre maximum de ses matrices extraites (carrées) inversibles.

D'après la propriété précédente, $r \leqslant \operatorname{rg} A$.

Il suffit d'extraire de A une matrice inversible de taille $\operatorname{rg} A$.

Comme le rang de la famille des colonnes de A est égal à $\operatorname{rg} A$, on peut trouver une partie J de $[\![1,p]\!]$ de taille $\operatorname{rg} A$ telle que les colonnes C_j pour $j \in J$ de A forment une famille libre (de rang sa taille $\operatorname{rg} A$).

Comme le rang de la famille des lignes de $A|_{[\![1,n]\!]\times J}$ est égal au rang de ses colonnes soit $\operatorname{rg} A$, on peut trouver une partie I de $[\![1,n]\!]$ de taille $\operatorname{rg} A$ telle que les lignes L_i pour $i \in I$ de $A|_{[\![1,n]\!]\times J}$ forment une famille libre (de rang sa taille $\operatorname{rg} A$).

Finalement, $A|_{I\times J}$ est une matrice de taille $\operatorname{rg} A$ égal à son rang donc inversible. □

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ est de rang 3.}$$

III Interprétation géométrique des matrices par blocs

On a vu qu'une matrice M pouvait s'écrire par bloc

$$M = \begin{array}{cc} \overset{E_1}{\underset{p}{\longleftrightarrow}} & \overset{E_2}{\underset{q}{\longleftrightarrow}} \end{array} \atop \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{array}{l} n \updownarrow F_1 \\ m \updownarrow F_2 \end{array} \in \mathcal{M}_{n+m,p+q}(\mathbb{K})$$

Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est représenté par M dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, alors on peut séparer $\mathcal{B}$ de taille $p+q$ en deux sous-familles :

- les p premiers vecteurs engendrant un sous-espace E_1 de E
- les q derniers vecteurs engendrant un sous-espace E_2.

Alors E_1 et E_2 sont supplémentaires de E ($E_1 \oplus E_2 = E$.)

De même, on écrit $F = F_1 \oplus F_2$ correspondant à la partition de la base $\mathcal{C}$ de taille $n+m$.

Alors, si $\vec{x} \in E$, $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ ses composantes sur E_1 et E_2 (donc $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$), $\vec{x}$ est représenté dans $\mathcal{B}$ par $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow q \end{array}$ où X_1 et X_2 représentent $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$.

Alors $u(\vec{x})$ est représenté dans $\mathcal{C}$ par

$$AX = \begin{pmatrix} AX_1 + BX_2 \\ CX_1 + DX_2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow n \\ \updownarrow m \end{array}$$

représentant respectivement les composantes sur F_1 et F_2 de $u(\vec{x})$.

Cela se généralise à un nombre quelconque de sous-espaces.

Le plus souvent, on utilise cette interprétation géométrique pour des endomorphismes.

Exercice

Montrer que tout projection peut être représentée par un matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que toute symétrie peut être représentée par un matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

Propriété

Soit $E = F \oplus G$ et $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette somme directe, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

- *F est stable par u si et seulement si $C = 0$.*
- *G est stable par u si et seulement si $B = 0$.*

Démonstration

Si $C = 0$, l'image d'une base de F est dans F, donc c'est vrai pour tous les vecteurs de F par linéarité.
Si F stable par u, alors la composante sur G des image des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans F est nulle donc $C = 0$. □

Propriété : Généralisation

Soit $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ et $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette somme directe, $u \in \mathcal{L}(E)$.

$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale par blocs ($A = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$) si et seulement si chaque E_i est stable par u.
On peut alors considérer l'endomorphisme induit par u sur E_i dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_i$ (issue de $\mathscr{B}$) est A_i.

Exemple

Projections et symétries

IV OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES ET SYSTÈMES LINÉAIRES

1 Opérations élémentaires

a Rappel

On rappelle qu'il existe 3 types d'opérations élémentaires :

- **Les permutations** : $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$.
- **Les transvections** : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$ avec $k \neq i$ ou $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_k$ avec $k \neq j$.
- **Les dilations** : $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$ avec $\lambda \neq 0$.

b Interprétation en termes de produit matriciel

Les opérations élémentaires se traduisent par des multiplications à gauche (pour les lignes) ou à droite (pour les colonnes) par des matrices (carrées) inversibles dont la taille est égale aux nombre de lignes respectivement colonnes correspondantes.

- **Permutations** : $L_i \leftrightarrow L_j$ (resp. $C_i \leftrightarrow C_j$) se traduit par la multiplication à gauche (resp. à droite) par la **matrice de permutation** :

$$P_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & (0) & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & (0) & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \qquad \uparrow \qquad\qquad \uparrow \\ \qquad i^{\mathrm{e}} \qquad\qquad j^{\mathrm{e}} \end{array}$$

$P_{i,j}^2 = I_n$, $P_{i,j}$ inversible et $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$.

- **Transvections** : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$ (resp. $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_k$) se traduit par la multiplication par une **matrice de transvection** $T_{i,k}(\lambda)$ à gauche (resp. $T_{k,j}(\lambda)$ à droite) avec

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & \lambda & \cdots & 1 & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \quad i^{\text{e}} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ j^{\text{e}} \end{array} & \end{array} = I_n + \lambda E_{i,j}$$

$T_{i,j}(\lambda)T_{i,j}(\mu) = T_{i,j}(\lambda+\mu)$ donc $T_{i,j}(\lambda)$ inversible et $\left(T_{i,j}(\lambda)\right)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$.

- **Dilatation** : $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (resp. $C_i \leftarrow \lambda C_i$) avec $\lambda \neq 0$ se traduit par la multiplication par une **matrice de dilatation** $D_i(\lambda)$ à gauche (resp. à droite) avec

$$D_i(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ i^{\text{e}} \end{array} \end{array}$$

$D_i(\lambda)D_i(\mu) = D_i(\lambda\mu)$ donc $D_i(\lambda)$ inversible et $(D_i(\lambda))^{-1} = D_i\left(\lambda^{-1}\right)$.

c Propriétés des opérations élémentaires

Propriété

(i) Une opération élémentaire sur ses lignes ne change pas le noyau d'une matrice.
(ii) Une opération élémentaire sur ses colonnes ne change pas l'image d'une matrice.
(iii) Une opération élémentaire ne change pas le rang d'une matrice.

Démonstration

(i) Si P inversible, $AX = 0 \Longleftrightarrow (PA)X = 0$.
(ii) Si P inversible, $AX = (AP)(P^{-1}X)$ et $(AP)X = A(PX)$.
(iii) Une opération élémentaire donne une matrice équivalente. □

d Matrices échelonnées

Définition

Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite **echelonnée** en lignes (respectivement en colonnes) si chaque ligne (respectivement colonne) débute par un nombre strictement croissant de 0 jusqu'à ce qu'elles soient éventuellement nulles.

Remarques

R 1 – Si elle est carrée, elle est nécessairement triangulaire supérieure (resp. inférieure).

R 2 – Si une ligne (resp. colonne) est nulle, les suivantes le sont aussi.

Exemples

E 1 – $A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée en lignes. $2, 3, -4, 6$ sont appelés **pivots**.

E 2 – $B = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée en colonnes. $-1, -1$ sont les pivots.

E 3 – $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée en lignes (même si elle est triangulaire).

Propriété

Toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée en lignes (resp. colonnes) par des opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes.)

Démonstration

On applique l'algorithme du pivot de Gauss aux lignes (resp. colonnes) de la matrice :

1. Si la matrice est nulle, elle est échelonnée.
2. Sinon, soit j_0 le numéro de la première colonne non nulle au moins un de ses cœfficients n'est pas nul, disons $a_{i_0,j_0} = p \neq 0$, ce sera un pivot : le mettre dans la première ligne grâce à $L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$.
3. On annule ensuite tous les cœfficients de la première colonne avec les opérations $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{p} L_1$. On obtient une

matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \dots & 0 & \boxed{p} & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & A' & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \end{array}\right)$$

4. On recommence alors à l'étape 1 avec A', ce qui revient à agir sur les $n-1$ dernière lignes. Les opérations sur ces lignes ne changent pas la première. □

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ en colonnes.}$$

e Application au calcul du rang

On ne change pas le rang par opérations élémentaires. Quelle est le rang d'une matrice échelonnée ?

Propriété

Le rang d'une matrice échelonnée en lignes (resp. colonnes) est le nombre de lignes (resp. colonnes) non nulles.

Démonstration

Sur les colonnes, si $C_{r+1}, \dots, C_p$ sont les colonnes nulles, alors $C_1, \dots, C_r$ sont facilement libres grâce aux pivots et le rang vaut r. □

Remarque

En faisant des opérations sur les colonnes, on peut obtenir à la fois le rang, l'image et le noyau !

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{rg} A \underset{C_1 \leftrightarrow C_3}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2^{(2)} \leftarrow C_2^{(1)} - 2C_1^{(1)} \\ C_3^{(2)} \leftarrow C_3^{(1)} - 4C_1^{(1)}}}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{C_3^{(3)} \leftarrow C_3^{(2)} - C_2^{(2)}}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\operatorname{rg} A = 2$, $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. $\dim \operatorname{Ker} A = 1$. Et

$$C_3^{(3)} = 0 = C_3^{(2)} - C_2^{(2)} = \left(C_3^{(1)} - 4C_1^{(1)}\right) - \left(C_2^{(1)} - 2C_1^{(1)}\right) = C_3^{(1)} - C_2^{(1)} - 2C_1^{(1)} = C_1 - C_2 - 2C_3.$$

Donc $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Remarque

En appliquant ensuite un pivot de Gauss sur les lignes, on peut se ramener à J_r.

f Application à l'inversion de matrice

Propriété

Par des opérations élémentaires sur des lignes (respectivement des colonnes), on peut transformer une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en I_n.

Démonstration

Sur les lignes, par exemple. Par pivot de Gauss, on se ramène à une matrice échelonnée en lignes, donc triangulaire supérieure, et inversible donc les cœfficients diagonaux sont tous non nuls :

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

Par $L_i \leftarrow \frac{1}{m_{i,i}} L_i$, on obtient :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

puis par $\forall\, i = 1 \dots n-1,\ \ L_i \leftarrow L_i - m'_{i,n} L_n$, on arrive à

$$M'' = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M'_1 & & \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Où M'_1 a la même forme que M'. Il suffit de ré-appliquer l'étape suivante à M'_1, par récurrence (finie.)

$\square$

On en déduit la méthode d'inversion de matrice par opérations **exclusivement** sur les lignes ou les colonnes de A.

- Sur les lignes : $P_k P_{k-1} \cdots P_1 A = I_n \Longrightarrow A^{-1} = P_k P_{k-1} \cdots P_1 I_n$.
- Sur les colonnes : $A Q_1 Q_2 \cdots Q_k = I_n \Longrightarrow A^{-1} = I_n Q_1 Q_2 \cdots Q_k$.

2 Systèmes linéaires

a Traductions d'un système linéaire

On considère un système linéaire de n équations à p inconnues dans $\mathbb{K}$:

$$(S)\ \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array} \right.$$

On rappelle que la matrice du système linéaire est définie par

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

et la matrice augmentée est

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right)$$

Interprétations :

- **Matricielle** : si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$,

$$\boxed{(S) \iff A\vec{x} = \vec{b}}$$

- **Équation linéaire** : si u est l'application linéaire canoniquement associée à A,

$$\boxed{(S) \iff u(\vec{x}) = \vec{b} \iff \vec{x} \in u^{-1}\left(\left\{\vec{b}\right\}\right)}$$

- **Formes linéaires** : Soit pour $i \in [\![1, n]\!]$ φ_i la forme linéaire de $\mathbb{K}^p$ correspondant à la i^e (canoniquement associée à la i^e ligne de A) :

$$\varphi_i : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \vec{x} & \longmapsto & a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p \end{array}\right.$$

alors

$$\boxed{(S) \iff \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \ \varphi_i(\vec{x}) = b_i \iff \vec{x} \in \bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} \varphi_i^{-1}(\{b_i\})}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (S) est soit vide, soit l'intersection d'hyperplans affines $\varphi_i^{-1}(\{b_i\})$ de direction $\varphi_i^{-1}(\{0\}) = \operatorname{Ker}\varphi_i$.

b Espace des solutions

Définition

On appelle **rang** du système (S) le nombre $r = \operatorname{rg}(S) = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u$.

Remarque

$\operatorname{rg}(S) \leqslant \min(n, p)$.

Propriété

L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions du système homogène (H) associé à (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $\dim \mathcal{S}_H = p - \operatorname{rg} S$.

Démonstration

$\mathcal{S}_H = \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} A$. □

Propriété

L'ensemble des solution $\mathcal{S}_S$ est soit vide, soit de la forme $\mathcal{S}_S = \vec{x}_0 + \mathcal{S}_H$ où $\vec{x}_0 \in \mathbb{K}^p$ est une solution particulière. C'est donc un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ de direction $\mathcal{S}_H$.

*Lorsque $\mathcal{S}_S = \varnothing$, le système est dit **incompatible**. Sinon il est **compatible**.*

Démonstration

C'est une équation linéaire $u(\vec{x}) = \vec{b}$. □

Exemple

$$(S)\ \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

$p = 3$ et $n = 2$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{rg}(S) = \mathrm{rg}\,A = 2$, $\dim S_H = 3 - 2 = 1$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ solution de (H) donc $\mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution particulière : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathscr{S}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1+t \\ t \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}\right\}$.

Propriété

(i) *Le système est dit de* ***Cramer*** *lorsque $n = p = \mathrm{rg}(S)$ ie A inversible.*
Alors pour tout $b \in \mathbb{K}^n$, il y a une unique solution.

(ii) *Si $\mathrm{rg}\,S = n$, le système a au moins une solution.*

(iii) *Si $\mathrm{rg}\,S = p$, le système a au plus une solution.*

Démonstration

(ii) $\mathrm{Im}\,u = \mathbb{K}^n$ donc u est surjective.
(iii) $\dim \mathrm{Ker}\,u = p - r = 0$ donc $\mathscr{S}_S = \varnothing$ ou $\mathscr{S}_S = \left\{x^{(0)}\right\}$. □

L'algorithme du pivot de Gauss appliqué aux systèmes a été présenté dans un chapitre de début de d'année : appliqué aux lignes de la matrice augmentée pour la rendre échelonnée en lignes (à permutation éventuelle des inconnues près), il permet d'obtenir un système équivalent

$$(S) \iff \begin{cases} p_1 x_{i_1} + \cdots & = b'_1 \\ \quad p_2 x_{i_2} + \cdots & = b'_2 \\ & \vdots \\ \quad\quad p_r x_{i_r} + \cdots & = b'_r \\ 0 & = b'_{r+1} \\ \vdots & \\ 0 & = b'_n \end{cases}$$

où $r = \mathrm{rg}(S)$, $i_1 < \ldots < i_r$, $p_1, \ldots, p_r$ non nuls, les $n - r$ dernières équations sont les **équations de compatibilité**, elle permettent de savoir si $\mathscr{S}_S = \varnothing$.

On tire successivement x_{i_r}, puis $x_{i_{r-1}}$ jusqu'à x_{i_1} en fonction des autres inconnues. On retrouve la dimension $n - r$.