Applications linéaires

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition, réciproque. Isomorphismes.	L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel. Bilinéarité de la composition.
Image et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire.	
Noyau d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité.	
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(x_i), i \in I)$.	
Image d'une base par un isomorphisme.	
Application linéaire de rang fini, rang. Invariance par composition par un isomorphisme.	Notation $\operatorname{rg}(u)$.
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties.	Notation id_E.
Anneau $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$.	Non commutativité si $\dim E \geqslant 2$. Notation vu pour la composée $v \circ u$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation des endomorphismes vérifiant $p^2 = p$ et $s^2 = \operatorname{id}$.	
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation GL(E).
c) Détermination d'une application linéaire	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une et une seule application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que pour tout $i \in I$: $u(e_i) = f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Classification, à isomorphisme près, des espaces de dimension finie par leur dimension.	
Une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Un endomorphisme d'un espace de dimension finie est inversible à gauche si et seulement s'il est inversible à droite.	
Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie.	
Si $E_1,\dots,E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E=\bigoplus_{i=1}^{p}E_i$ et si $u_i\in\mathscr{L}(E_i,F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule application $u\in\mathscr{L}(E,F)$ telle que $u_{\mid E_i}=u_i$ pour tout i.	

d) Théorème du rang

Si $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathfrak{Im}\, u$.	
Théorème du rang : $\dim E=\dim\operatorname{Ker} u+\operatorname{rg}(u)$.	

e) Formes linéaires et hyperplans

Forme linéaire.	Formes coordonnées relativement à une base.
Hyperplan.	Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E, alors pour toute droite D non contenue dans H : $E=H\oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.	En dimension n, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.
Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.	
Si E est un espace de dimension finie n, l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.	Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. L'étude de la dualité est hors programme.

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif de caractéristique nulle ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ au programme).

I GÉNÉRALITÉS

1 Définition

Définition : Application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \to F$.
On dit que u est une **application linéaire** lorsque

$$\begin{cases} \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad u\left(\vec{x}+\vec{y}\right) = u(\vec{x}) + u(\vec{v}) \\ \forall \vec{x} \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(\lambda\vec{x}) = \lambda u(\vec{x}) \end{cases}$$

ce qui s'écrit aussi $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u\left(\vec{x}+\lambda\vec{y}\right) = u(\vec{x}) + \lambda u(\vec{v})$.

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

- Si u est bijective, on parle d'**isomorphisme** (d'espaces vectoriels).
- Si $E = F$, on parle d'**endomorphisme** et on note $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,F)$.
- Si $E = F$ et u est bijective, on parle d'**automorphisme**.
- Si $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$, on dit que φ est une **forme linéaire**.
- On note $\mathscr{L}(E,\mathbb{K}) = E^*$ appelé **dual** de E l'ensemble des formes linéaires sur E.

Remarques

R1 – Ne pas confondre E^* et $E \setminus \{0_E\}$.

R2 – Une application linéaire est en particulier un morphisme de groupe de $(E,+)$ sur $(F,+)$.

Exemples

E1 – $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x+z) \end{array} \right.$

Notation matricielle (bases canoniques) : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+z \end{pmatrix}$.

E2 – Si E est l'espace des fonctions dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, $u : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^I \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$ est linéaire.

Plus généralement, si E est l'espace des fonctions n fois dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$,

$u : \begin{array}{|ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^I \\ f & \longmapsto & f^{(n)} \end{array}$ est linéaire.

$u : \begin{array}{|ccc} \mathscr{C}([a,b]) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est une forme linéaire.

E3 – **Homothéties vectorielles** : pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $h_\alpha = \alpha\,\mathrm{id}_E \in \mathscr{L}(E)$.

E4 – Les applications linéaires de $\mathscr{L}(\mathbb{K})$ sont les $\begin{array}{|ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$ pour $a \in \mathbb{K}$.

E5 – Si $X \neq \varnothing$, F $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $a \in X$, alors $u_a : \begin{array}{|ccc} F^X & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array}$ est linéaire (morphisme d'évaluation).

E6 – $f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[x] \\ P & \longmapsto & \tilde{P} \end{array}$ où $\mathbb{K}[x]$ est l'ensemble des fonctions polynomiales est linéaire. Si $\mathbb{K}$ est infini, c'est un isomorphisme.

E7 – La trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

E8 – La transposition est linéaire sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ vers $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

E9 – Il y a un isomorphisme canonique entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: $(x_1,\dots,x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et en particulier entre $\mathbb{K}$ et $\mathscr{M}_1(\mathbb{K})$: cela légitime les abus de notations que l'on rencontre parfois.

Définition : Morphisme d'algèbre

Soit $(\mathscr{A},+_{\mathscr{A}},\times_{\mathscr{A}},\cdot_{\mathscr{A}})$, $(\mathscr{B},+_{\mathscr{B}},\times_{\mathscr{B}},\cdot_{\mathscr{B}})$ et $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$.
On dit que f est un **morphisme d'algèbres** lorsque

- f est linéaire,
- $\forall\, x, y \in \mathscr{A}, \quad f(x \times_{\mathscr{A}} y) = f(x) \times_{\mathscr{B}} f(y)$
- $f(1_{\mathscr{A}}) = 1_{\mathscr{B}}$.

Exemples

E1 – Si $X \neq \varnothing$, $\mathscr{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre, $a \in X$, alors $u_a : \begin{array}{|ccc} \mathscr{A}^X & \longrightarrow & \mathscr{A} \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array}$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. (morphisme d'évaluation).

E2 – $f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[x] \\ P & \longmapsto & \tilde{P} \end{array}$ est un isomorphisme d'algèbre si $\mathbb{K}$ est infini, et $g : \begin{array}{|ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \frac{P}{1} \end{array}$ est un morphisme d'algèbres injectif.

E3 – Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(K) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{array} \right.$ est un morphisme d'algèbres.

E4 – $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathscr{M}_1(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & (x) \end{array} \right.$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

2 Propriétés

Propriétés

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

(i) $u\left(\vec{0}_E\right) = \vec{0}_F$

(ii) $\forall\, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in E, \quad \forall\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\vec{x}_i)$

(iii) *Si A est une partie de E, $u(\mathrm{Vect}\, A) = \mathrm{Vect}(u(A))$.*

(iv) *Si E' est un sous-espace vectoriel de E, $u_{|E'} \in \mathscr{L}(E',F)$ (u induit une application linéaire sur E').*

(v) *Si u est bijective (isomorphisme) alors $u^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$.*

(vi) $(\mathscr{L}(E,F),+,\cdot)$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

(vii) *Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.*

(viii) *Si $u, u_1, u_2 \in \mathscr{L}(E,F)$, $v, v_1, v_2 \in \mathscr{L}(F,G)$, et $\lambda \in \mathbb{K}$*

$$\begin{cases} v \circ (u_1 + \lambda u_2) = v \circ u_1 + \lambda v \circ u_2 \\ (v_1 + \lambda v_2) \circ u = v_1 \circ u + \lambda v_2 \circ u \end{cases}$$

(ix) *Si E' est un sous-espace vectoriel de E et F' est un sous-espace vectoriel de F, $u(E')$ est un sous-espace vectoriel de F et $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration

(i) $2u\left(\vec{0}_E\right) = u\left(\vec{0}_E + \vec{0}_E\right) = u\left(\vec{0}_E\right)$. (Propriété de morphisme de groupes)

(ii) Récurrence.

(iii) Si $\vec{x} \in \mathrm{Vect}\, A$, on a $n \in \mathbb{N}$, $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in A$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i$ et donc $u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\vec{x}_i) \in \mathrm{Vect}(u(A))$.

Si $\vec{y} \in \mathrm{Vect}(u(A))$, on a $n \in \mathbb{N}$, $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in A$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\vec{x}_i)$ et donc $\vec{y} = u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i\right) \in u(\mathrm{Vect}\, A)$.

(iv) Immédiat.

(v) Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ bijective, $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On a $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E$ tels que $\vec{y}_1 = u(\vec{x}_1)$ et $\vec{y}_2 = u(\vec{x}_2)$.
Alors $u^{-1}(\vec{y}_1 + \lambda\vec{y}_2) = u^{-1}(u(\vec{x}_1) + \lambda u(\vec{x}_2)) = u^{-1} \circ u(\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2) = \vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2 = u^{-1}(\vec{y}_1) + \lambda u^{-1}(\vec{y}_2)$ en utilisant la linéarité de u.

(vi) Sous-espace vectoriel de F^E sans difficulté.

(vii) Si $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \circ u(\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2) = v(u(\vec{x}_1) + \lambda u(\vec{x}_2)) = v \circ u(\vec{x}_1) + \lambda v \circ u(\vec{x}_2)$ par linéarité de u puis de v.

(viii) $(v_1 + \lambda v_2) \circ u = v_1 \circ u + \lambda v_2 \circ u$ est toujours vrai, $v \circ (u_1 + \lambda u_2) = v \circ u_1 + \lambda v \circ u_2$ provient de la linéarité de v.

(ix)
- $u(E') \subset F$, $u(E') \neq \varnothing$ car $\vec{0}_F = u(\underbrace{\vec{0}_E}_{\in E'}) \in u(E')$ et si $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E'$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors
$$u(\vec{x}_1) + \lambda u(\vec{x}_2) = u(\underbrace{\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2}_{\in E'}) \in u(E').$$
- $u^{-1}(F') \subset E$, $u^{-1}(F') \neq \varnothing$ car $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F \in F'$ donc $0_E \in u^{-1}(F')$, et si $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in u^{-1}(F')$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $u(\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2) = \underbrace{u(\vec{x}_1)}_{\in F'} + \lambda \underbrace{u(\vec{x}_2)}_{\in F'} \in F'$ donc $\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2 \in u^{-1}(F')$. □

Remarque

(viii) nous dit que $\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,G) \\ u & \longmapsto & v \circ u \end{array}\right.$ et $\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(F,G) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,G) \\ u & \longmapsto & v \circ u \end{array}\right.$ sont linéaires.

3 Noyau et image

Définition : Noyau et image

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
- Le **noyau** de u est $\operatorname{Ker} u = u^{-1}(\{\vec{0}_F\}) = \{\vec{x} \in E \mid u(\vec{x}) = \vec{0}_F\} \in \mathscr{P}(E)$.
- L'**image** de u est $\operatorname{Im} u = u(E) = \{u(\vec{x})\ ;\ \vec{x} \in E\} \in \mathscr{P}(F)$.

Remarque

L'image de u est en fait l'image de u vu comme simple fonction et le noyau de u est le noyau de u vu comme un morphisme de groupes additifs.

Exemple

Soit $u : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x+z) \end{array}\right.$
Alors $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(-1,2,1)$ et $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^2$.

Propriétés

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

(i) $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont des sous-espaces vectoriels de F et E respectivement.

(ii) u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}_E\}$.

(iii) u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$.

(iv) Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $\operatorname{Ker} u_{|E'} = E' \cap \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u_{|E'} = u(E')$.

Démonstration

(i) Image directe et réciproque des sous-groupes E et $\{\vec{0}_F\}$.

(ii) Déjà vu pour les morphismes de groupes : on a toujours $\vec{0}_E \in \operatorname{Ker} u$ et

- si u est injective,
$$\vec{x} \in \operatorname{Ker} u \Rightarrow u(\vec{x}) = \vec{0}_F = u\left(\vec{0}_E\right) \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}_E.$$
- si $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$ alors
$$u(\vec{x}) = u\left(\vec{x}'\right) \Rightarrow u\left(x - x'\right) = \vec{0}_F \Rightarrow x - x' \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow x = x'$$
par linéarité de u, donc u est injective.

(iii) Toujours vrai : u est surjective si et seulement si $\forall \vec{y} \in F, \quad \exists \vec{x} \in E, \quad u(\vec{x}) = \vec{y}$ si et seulement si $\forall \vec{y} \in F, \quad \vec{y} \in u(E)$ si et seulement si $F \subset u(E)$; et $u(E) \subset F$ est toujours vrai.

(iv) $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u_{|E'} \Longleftrightarrow \vec{x} \in E'$ et $u(\vec{x}) = \vec{0}_F$ et $\vec{y} \in \operatorname{Im} u_{|E'} \Longleftrightarrow \exists \vec{x} \in E', \quad u(\vec{x}) = \vec{y} \Longleftrightarrow \vec{y} \in u(E')$. □

Exercice

Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$, condition nécessaire et suffisante pour que $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$? $(\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v)$.

4 Image d'une famille de vecteurs, rang

Propriétés

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{F} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On note $u(\mathscr{F}) = \left(u(\vec{e}_i)\right)_{i \in I}$.

(i) Si $\mathscr{F}$ est liée, $u(\mathscr{F})$ l'est aussi.

(ii) Si $\mathscr{F}$ engendre E, $u(\mathscr{F})$ engendre $\operatorname{Im} u$ (⚠ et non F si u n'est pas surjective !)

*(iii) Si $\mathscr{F}$ est libre et u **est injective**, $u(\mathscr{F})$ est libre.*

(iv) Si u est un isomorphisme et $\mathscr{B}$ est une base de E, alors $u(\mathscr{B})$ est une base de F.

Remarque

L'image d'une base (de l'espace de départ) par un isomorphisme est une base (de l'espace d'arrivée).

Démonstration

(i) Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i = \vec{0}_E$, alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\vec{e}_i) = u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i\right) = u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.

(ii) $\operatorname{Im} u = u(E) = u(\operatorname{Vect} \mathscr{F}) = \operatorname{Vect}(u(\mathscr{F}))$.

(iii) Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\vec{e}_i) = \vec{0}_F$, alors $u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i\right) = u(\vec{0}_E)$, donc par injectivité, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i = \vec{0}_E$ donc les λ_i sont nuls car $\mathscr{F}$ est libre.

(iv) par (i) et (ii). □

Propriété

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E ou F de dimension finie.
Alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie au plus $\min(\dim E, \dim F)$.

Démonstration

Si $E = \operatorname{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$, alors $\operatorname{Im} u = u(E) = \operatorname{Vect}(u(\vec{e}_1), \ldots, u(\vec{e}_p))$ de dimension finie $\leqslant p$ et $\operatorname{Im} u$ sous-espace vectoriel de F. □

Définition : Rang

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, E ou F de dimension finie.
On appelle **rang** de u l'entier $\operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} u)$.
Si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}\left(u(\mathscr{B})\right)$.

Remarque

On a toujours $\operatorname{rg} u \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.

Propriété : Effet sur le rang de la composition par un isomorphisme

On ne change pas le rang en composant à gauche ou à droite par un isomorphisme.

Démonstration

- Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ bijective. On veut montrer que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.
  Si $\mathscr{B}$ est une base de $\operatorname{Im} u$, $v(\mathscr{B})$ est libre par injectivité de v et engendre $v(\operatorname{Im} u) = v \circ u(E) = \operatorname{Im}(v \circ u)$. C'est donc une base de $\operatorname{Im}(v \circ u)$ et
  $$\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{taille}(v(\mathscr{B})) = \operatorname{taille}(\mathscr{B}) = \operatorname{rg} u.$$
- Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(G,E)$ bijective. On veut montrer que $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg} u$.
  Or $\operatorname{Im} u = u(E) = u(v(G)) = \operatorname{Im}(u \circ v)$ donc $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u \circ v)$.

Remarque

On a en fait montré qu'en composant à gauche par une application linéaire injective ou à droite par une application linéaire surjective, on ne change pas le rang.

II ENDOMORPHISMES

1 Structure d'algèbre

Propriété

$(\mathscr{L}(E),+,\circ,\cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative et non intègre si $\dim E \geqslant 2$.

Notation

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$, on note $uv = u \circ v$, $u^n = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u^0 = \mathrm{id}_E$.

Définition : Polynôme en un endomorphisme

Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on peut définir $P(u) = a_0 \mathrm{id}_E + a_1 u + \cdots + a_n u^n$.
Lorsque $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on dit que P est un **polynôme annulateur** de u.

Propriété

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, l'application $\left|\begin{array}{ccc} (\mathbb{K}[X],+,\times,\cdot) & \longrightarrow & (\mathscr{L}(E),+,\circ,\cdot) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array}\right.$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

⚠ *En particulier, $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$.*

Démonstration

La linéarité ne pose pas de problème, on a bien $1_{K[X]}(u) = \mathrm{id}_E$.

Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $(P \times Q)(u) = \sum_{k,\ell} a_k b_\ell u^{k+\ell} = \sum_k a_k u^k \left(\sum_\ell b_\ell u^\ell\right) = P(u) \circ Q(u)$ par linéarité de u. □

Remarque

Deux polynômes en u commutent.

Propriété : Binôme

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}.$$

2 Groupe linéaire

Définition : Groupe linéaire

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathscr{GL}(E)$ appelé **groupe linéaire de** E.

Propriété

$(\mathscr{GL}(E), \circ)$ *est un groupe.*

Démonstration

C'est le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ ou c'est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(E), \circ)$. □

3 Projecteurs

Définition : Projection

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.
Tout vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.
On appelle **projection** (ou **projecteur**) **sur** F **parallèlement à** G l'application

$$p : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x}_F \end{array} \right.$$

On définit de même la projection q sur G parallèlement à F.
On dit que les projections p et q sont **associées.**

(Dessin)

Propriétés

Avec les notations ci-dessus :

(i) $p, q \in \mathscr{L}(E)$ *et* $p + q = \mathrm{id}_E$.

(ii) $F = \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Inv}\, p = \{\vec{x} \mid p(\vec{x}) = \vec{x}\}$.

(iii) $G = \mathrm{Ker}\, p$.

(iv) $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

(v) $p^2 = p \circ p = p$ *(p est idempotent.)*

Remarques

R 1 – A savoir retrouver sur un dessin.

R 2 – On retiendra que $\vec{x} \in F = \operatorname{Im} p \iff \vec{x} \in \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \iff p(\vec{x}) = \vec{x}$.

Démonstration

□

Propriété : Caractérisation des projections

p est une projection (vectorielle) sur E si et seulement si $p \in (E)$ et $p^2 = p \circ p = p$.

Dans ce cas,

(i) $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p = E$

(ii) p est la projection sur $\operatorname{Im} p = \operatorname{Inv} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$

Démonstration

□

Exemples

E 1 – $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (4x - 6y, 2x - 3y) \end{array} \right.$ projection sur $D = \operatorname{Vect}(2, 1)$ parallèlement à $D' = \operatorname{Vect}(3, 2)$.

E 2 – Projection sur $D = \operatorname{Vect}(1, 1, 1)$ parallèlement à $P \ : \ x + z = 0$?

E 3 – Projection sur $\mathscr{P}$ (fonctions paires) parallèlement à $\mathscr{I}$ (fonctions impaires) ?

E 4 – Projection sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$?

4 Symétries

Définition : Symétrie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.
Tout vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.

On appelle **symétrie sur F parallèlement à** G l'application $s : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x}_F - \vec{x}_G \end{array} \right.$ ie $s = p - q$ avec les notations précédentes.

(Dessin)

Propriétés

(i) $s \in \mathscr{L}(E)$

(ii) *s est involutive :* $s^2 = s \circ s = \mathrm{id}_E$.

(iii) $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Inv}\, s = \{\vec{x} \mid s(\vec{x}) = \vec{x}\}$.

(iv) $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = \{\vec{x} \mid s(\vec{x}) = -\vec{x}\}$ *(anti-invariants).*

(v) *Si p projection sur F parallèlement à G,* $s = 2p - \mathrm{id}_E$.

Démonstration

□

Propriété : Caractérisation des symétries

s est une symétrie (vectorielle) sur E si et seulement si $s \in (E)$ et $s^2 = s \circ s = \mathrm{id}_E$.

Dans ce cas,

(i) $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = E$

(ii) *s est la projection sur $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$*

Démonstration

□

Exemples

E 1 – $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (y, x, z) \end{array} \right.$ symétrie parallèlement à $P : x = y$ parallèlement à $D = \mathrm{Vect}(1, -1, 0)$.

E 2 – Symétrie par rapport à $D = \mathrm{Vect}(1, 1, 1)$ parallèlement à $P : x + z = 0$.

E 3 – $f \mapsto \hat{f}$ où $\hat{f} : x \mapsto f(-x)$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

E 4 – $T : M \mapsto M^{\mathsf{T}}$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque

Si $F = \{\vec{0}_E\}$, alors $G = E$ et $s = -\mathrm{id}_E$: symétrie centrale.

5 Affinités

Définition : Affinité

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.

Tout vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.

On appelle **affinité de base F de direction G et de rapport $k \in \mathbb{K}$** l'application

$f_k : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x}_F + k\vec{x}_G \end{array} \right.$ ie $f_k = p + kq$ avec les notations précédentes.

(Dessin)

Remarque

On retrouve homothéties, projections, symétries.

Propriété : Caractérisation des affinités

f est une affinité si et seulement si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $f = \mathrm{id}_E$ ou bien on a $k \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - k\,\mathrm{id}_E) = E$.

Il s'agit alors de l'affinité de base $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, de direction $\mathrm{Ker}(f - k\,\mathrm{id}_E)$ et de rapport k.

III Détermination d'une application linéaire

1 Image d'une base

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{B} = (\vec{e}_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour $\vec{x} \in E$, on note $(x_i)_{i\in I}$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$.

Alors pour tout $i \in I$, l'application $\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \vec{x} & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$ est une forme linéaire (i^{e} coordonnée).

Propriété

Soient E, F deux espaces vectoriels, $\mathscr{B} = (\vec{e}_i)_{i\in I}$ une base de E et $\mathscr{F} = \left(\vec{f}_i\right)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F.

Il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall\, i \in I,\quad u(\vec{e}_i) = f_i$.

Remarque

Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Démonstration

Par analyse synthèse. □

Exemple

$u(1,0,0) = (1,1)$; $u(0,1,0) = (1,0)$; $u(0,0,1) = (-1,2)$, traduction sur la matrice canoniquement associée.

Corollaire

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors $u = v$ si et seulement si $u(\mathcal{B}) = v(\mathcal{B})$.

Propriété

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

- *u est injective si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est libre.*
- *u est surjective si et seulement si $u(\mathcal{B})$ engendre F.*
- *u est un isomorphisme si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une base de F.*

Remarque

$u \in \mathcal{L}(E,F)$ est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base de F.

Démonstration

□

2 Applications linéaires et dimensions

Propriété

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\dim E = \dim F \Longleftrightarrow E$ et F sont isomorphes.

Démonstration

□

Remarque

L'étude de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^p$ se reporte sur tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p.

Propriété

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

Alors u est injective $\Longleftrightarrow u$ est surjective $\Longleftrightarrow u$ est bijective.

Remarque

C'est en particulier le cas pour tout endomorphisme en dimension finie.

Démonstration

Image d'une base. □

Exemple

$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array} \right.$ où $x_0, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts est facilement injectif (noyau réduit à $0_{\mathbb{K}[X]}$) et $\dim \mathbb{K}_n[X] = \dim \mathbb{K}^{n+1}$ donc c'est un isomorphisme, ce qui redonne le résultat de l'interpolation de Lagrange.

Propriété

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F = n$ et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalents :

(i) u isomorphisme

(ii) u est inversible à gauche

(iii) u est inversible à droite

(iv) $\operatorname{rg} u = n$

Démonstration

□

3 Dimension de $\mathscr{L}(E, F)$

Propriété

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\mathscr{L}(E, F)$ est de dimension finie et $\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

Démonstration

Isomorphisme $u \mapsto u(\mathscr{B})$. □

Remarque

⚠ : $\mathscr{L}(E)$ est de dimension $(\dim E)^2$.

4 Décomposition d'applications linéaires

Propriété

Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et pour tout i, $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que pour tout i, $u_{|E_i} = u_i$.

Démonstration

Analyse-synthèse. □

IV Théorème du rang

Théorème : Théorème du rang

$u \in \mathscr{L}(E,F)$ induit un isomorphisme de tout supplémentaire H de $\operatorname{Ker} u$ sur $\operatorname{Im} u$.
Si, de plus, E est de dimension finie, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u$.

Remarque

⚠ En général, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ ne sont pas supplémentaires.

Exemple

$u : (x,y) \mapsto (y,0)$

Exemple

$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x+z) \end{array} \right.$ $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(1,-2,-1)$ et $\operatorname{rg} u = 2$ donc u est surjective.

Corollaire

Si E est de dimension finie, u est injective si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim E$.
Si F est de dimension finie, u est surjective si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim F$.

Propriété : Formule de Grassmann

Si F et G sont de dimension finie, alors

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Démonstration : Nouvelle preuve de la formule de Grassmann

Théorème du rang appliqué à $u : \left| \begin{array}{ccc} F \times G & \longrightarrow & F+G \\ (\vec{x},\vec{y}) & \longmapsto & \vec{x}+\vec{y} \end{array} \right.$ □

Démonstration : Nouvelle preuve de v injective $\Longrightarrow \operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$

On a $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(v \circ u)$ par injectivité de v, et le théorème du rang donne le résultat. □

V Formes linéaires et hyperplans

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Définition

On rappelle que les formes linéaires sont les $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ et que $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est appelé espace dual de E.

Remarque

$\dim E^* = \dim E$.

Propriété

*Soient $\mathscr{B} = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ base de E et pour tout i, $\varphi_i \in E^*$ la forme linéaire i^e coordonnée. Alors $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est une base de E^* appelée **base duale de** $\mathscr{B}$.*

Remarque

Ainsi, toute forme linéaire s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des coordonnées des vecteur de E.

Exemples

E 1 – Dans $\mathbb{R}^3$ base duale de la base canonique.

E 2 – Dans $\mathbb{R}^3$ base duale de la $\mathscr{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$.

E 3 – Dans $\mathbb{K}[X]$ base duale de la $\mathscr{B} = ((X-a)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque

Si $(\varphi_i)_{i\in I}$ base de E^*, on peut trouver une et une seule base $\mathscr{B}$ dont c'est la base duale, appelée **base antéduale** de $(\varphi_i)_{i\in I}$. Il suffit de traduire pour tout i,j que $\varphi_i(\vec{e}_j) = \delta_{i,j}$.

Théorème : Caractérisation des hyperplans

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) H est un hyperplan.

(ii) H est un supplémentaire de toute droite $D \not\subset H$.

(iii) H est un supplémentaire d'une droite $D \not\subset H$.

(iv) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle : $\exists \varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\},\quad H = \operatorname{Ker}\varphi$.

Démonstration

□

Corollaire

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$.

$$\operatorname{Ker}\varphi_1 = \operatorname{Ker}\varphi_2 \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad \varphi_1 = \lambda\varphi_2.$$

Démonstration

Si $\vec{x}_0 \notin H$, $\mathbb{K}\vec{x}_0$ est un supplémentaire de H et $\varphi_1 = \dfrac{\varphi_1(\vec{x}_0)}{\varphi_2(\vec{x}_0)}\varphi_2$. □

Remarque : Équation d'un hyperplan

Si $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E et $H = \operatorname{Ker}\varphi$ un hyperplan.
Pour tout $\vec{x} \in E$, $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$ donc $\varphi(\vec{x}) = x_1\varphi(\vec{e}_1) + \cdots + x_n\varphi(\vec{e}_n)$.

Si on note $a_i = \varphi(\vec{e}_i)$, on obtient $\vec{x} \in H \iff a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$.
Réciproquement, toute équation de H donne une telle forme linéaire φ.

La propriété précédente nous dit que toutes les équations de H sont colinéaires.

Propriété : Dimension d'une intersection d'hyperplans

Si $H_1, \dots, H_m$ *sont des hyperplans de* E *de dimension* n, *alors*

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) \geqslant n - m.$$

Remarque

La dimension de l'espace des solutions d'un système linéaire à m équations et n inconnues est au moins égal à $n - m$.

Démonstration

Par récurrence sur m avec la formule de Grassmann. □

Propriété : Système d'équations d'un sous-espace

Si F *est un sous-espace vectoriel de* E *avec* $\dim E = n$ *et* $\dim F = p$ *tels que* $p < n$, *alors* F *est l'intersection de* $n - p$ *hyperplans distincts.*

Démonstration

On complète une base de F en une base de E et on s'intéresse à la base duale. □

Remarque

Cela traduit le fait que le sous-espace puisse être décrit par un système de $n - p$ équations indépendantes.

Exemple

Droites et plans de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.