Probabilités sur un univers fini

Extrait du programme officiel :

Ce chapitre a pour objectif de consolider les connaissances relatives aux probabilités sur un univers fini et aux variables aléatoires définies sur un tel univers présentées dans les classes antérieures. Il s'appuie sur le chapitre consacré au dénombrement.

Ce chapitre a vocation à interagir avec l'ensemble du programme. Il se prête également à des activités de modélisation de situations issues de la vie courante ou d'autres disciplines.

Les définitions sont motivées par la notion d'expérience aléatoire. La modélisation de situations aléatoires simples fait partie des capacités attendues des étudiants.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Expérience aléatoire et univers	
L'ensemble des issues (ou résultats possibles ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé univers.	On se limite au cas où cet univers est fini.
Événement, événement élémentaire (singleton), événement contraire, événement « A et B », événement « A ou B », événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.	
b) Espaces probabilisés finis	
Une probabilité sur un univers fini Ω est une application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ telle que $P(\Omega)=1$ et, pour toutes parties disjointes A et B, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.	Un espace probabilisé fini est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω.
Détermination d'une probabilité par les images des singletons.	
Probabilité uniforme.	
Propriétés des probabilités : probabilité de la réunion de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance.	
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B)>0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par : $P(A\|B)=P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.	On justifiera cette définition par une approche heuristique fréquentiste. L'application $\mathbb{P}_B$ est une probabilité.
Formule des probabilités composées.	
Formule des probabilités totales.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Formules de Bayes : 1. si A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A)>0$ et $\mathbb{P}(B)>0$, alors $$P(A\,\|\,B)=\frac{P(B\,\|\,A)\,P(A)}{P(B)}$$ 2. si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle, alors $$P(A_j\,\|\,B)=\frac{P(B\,\|\,A_j)\,P(A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B\,\|\,A_i)\,P(A_i)}$$	On donnera plusieurs applications issues de la vie courante.

d) Événements indépendants

Couple d'événements indépendants.	Si $P(B)>0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B)=P(A)$.
Famille finie d'événements mutuellement indépendants.	L'indépendance deux à deux des événements $A_1,\dots,A_n$ n'implique pas l'indépendance mutuelle si $n\geqslant 3$.

Table des matières

I EXPÉRIENCE ALÉATOIRE ET UNIVERS

1 Expérience aléatoire

Une expérience est dite **aléatoire** lorsque l'on ne peut pas prédire de manière certaine son résultat. Autrement dit, il s'agit d'une expérience renouvelable et dont le résultat ne sera a priori pas toujours le même.

Exemple

Lancer de dé, lancer de pièce, tirage d'une carte, tirage d'une chaussette dans un tiroir, etc.

À chaque expérience aléatoire, on va associer un **résultat** (on dit aussi une **issue** ou une **réalisation**), dépendant de ce que l'on souhaite observer.

Exemple

La face sur laquelle retombe la pièce ou le dé, la couleur ou la valeur d'une carte (ou les deux !), la couleur d'une chaussette, ou sa taille, ou pied gauche/pied droit, etc.

2 Univers et événements

Définition : Univers

L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **univers** (ou univers des possibles), souvent noté Ω.

Remarques

R1 – Un élément de l'univers est un résultat (ou issue, ou réalisation) de l'expérience aléatoire.

R2 – Pour une même expérience aléatoire, on peut définir plusieurs univers. Celui-ci dépend de ce que l'on souhaite observer. Il est donc a priori indispensable de le préciser !!!

R3 – Dans notre programme, les univers seront toujours finis et non vide. En classe de spéciale, ils pourront aussi être infinis, mais dénombrables.

R4 – Les résultats, éléments de l'univers Ω, sont en général notés ω.

Exemples

E1 – Deux joueurs lancent simultanément deux dés à 6 faces pour obtenir la meilleure somme. L'expérience aléatoire peut être modélisée par

$$\Omega = [\![1,6]\!]^4$$

en s'intéressant au résultat de chaque dé, ou encore par

$$\Omega = [\![2,12]\!]^2$$

si on ne s'intéresse qu'à la somme obtenue, sans discerner la façon de l'obtenir.

E2 – Soient $n, N \in \mathbb{N}^*$.

- On effectue n tirages successifs **avec remise** d'une boule dans une urne de N boules numérotées de 1 à N. On choisit $\Omega = [\![1, N]\!]^n$. Un résultat est une n-liste d'éléments de $[\![1, N]\!]$.
- On effectue n tirages successifs **sans remise** d'une boule dans une urne de N boules numérotées de 1 à N. On choisit $\Omega = \mathscr{A}_n([\![1, N]\!])$. Un résultat est un n-arrangement d'éléments de $[\![1, N]\!]$.
- On effectue un tirage de n boules **simultanément** dans une urne de N boules numérotées de 1 à N. On choisit $\Omega = \mathscr{P}_n([\![1, N]\!])$. Un résultat est une n-combinaisons d'éléments de $[\![1, N]\!]$.

Exemples génériques : à moduler suivant le résultat à observer !

E3 – On mélange n cartes numérotées de 1 à n. On choisit $\Omega = \mathfrak{S}_n$ où $\omega \in \mathfrak{S}_n$ représente une permutation des cartes.

Définition : Événement

On appelle **événement aléatoire** tout ensemble de résultats d'une expérience aléatoire modélisée observable. C'est donc une partie de l'univers Ω des possibles.

Exemples

E1 – On lance deux dés à 6 faces distinguables : $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.
L'événement « Obtenir un double » est la partie $A = \{(i, i) \mid i \in [\![1, 6]\!]\}$ de Ω.

E2 – On mélange un jeu de n cartes : $\Omega = \mathfrak{S}_n$.
L'événement « La première carte se trouve dans la première moitié du paquet » est la partie $A = \left\{\omega \in \mathfrak{S}_n \mid \omega(1) \leqslant \frac{n}{2}\right\}$ de Ω.

Remarques

R1 – Pour un univers fini, on supposera que l'ensemble des événements est $\mathscr{P}(\Omega)$. Ce n'est pas toujours le cas pour un univers infini.

R2 – En réalité, les probabilistes confondent usuellement dans le vocabulaire la réalisation d'un événement $\omega \in A$ et l'événement lui-même.

Définition

Terminologie probabiliste	Terminologie ensembliste
Résultat possible	$\omega \in \Omega$
Événement	$A \in \mathscr{P}(\Omega)$
A est réalisé	$\omega \in A$
A implique B	$A \subset B$
Événement élémentaire	Singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$
Événement « A ou B »	$A \cup B$
Événement « A et B »	$A \cap B$
Contraire de A (A n'est pas réalisé)	$\overline{A} = \Omega \setminus A$
Événement impossible	$\varnothing$
Événement certain	Ω
A et B sont incompatibles	A et B sont disjoints : $A \cap B = \varnothing$

Définition

On dit que $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un **système complet d'événements** (sce) lorsque les événements sont deux à deux incompatibles et que $\bigsqcup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} A_i$ est l'événement certain.

Autrement dit, si de plus il n'y a aucun événement impossible, lorsque $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ forme une partition de Ω : $\forall\, i \neq j,\quad A_i \cap A_j = \varnothing$ et $\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} A_i = \Omega$.

Remarques

R1 – Il s'agit de la disjonction de cas classique. Par exemple, si on lance un dé à 6 faces, A_1 : « Obtenir un nombre pair » et A_2 : « Obtenir un nombre impair » forment un sce.

R2 – Si (A_i) est un sce, tout événement B s'écrit $B = \bigsqcup\limits_{i}(B \cap A_i)$.

Propriétés

Soit Ω un univers fini.

(i) Pour tout événement A, la famille $\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements de Ω.

(ii) La famille $\left(\{\omega\}\right)_{\omega\in\Omega}$ formée des événements élémentaires est un système complet d'événements de Ω.

II ESPACES PROBABILISÉS FINIS

Lorsque l'on s'intéresse à un phénomène aléatoire, on cherche naturellement à quelle fréquence intervient un événement : si on répète n fois l'expérience, combien de fois l'événement sera réalisé ?

1 Probabilité

Définition : Probabilité

Soit Ω un univers fini. On appelle **probabilité** sur Ω toute application $\mathbb{P}$ définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ à valeurs réelles telle que

- Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$.
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- $\mathbb{P}$ est **additive** : si A, B sont incompatibles, $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Exemple

$\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$ définit une probabilité sur Ω.

Définition

On appelle **espace probabilisé fini** tout couple $(\Omega, \mathbb{P})$ où Ω est fini et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω.

Remarque

En général, un espace probabilisé est de la forme $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ où $\mathscr{A}$ est l'ensemble des événements. Lorsque Ω est fini, on prend systématiquement $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$.

2 Propriétés

Propriétés

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ deux événements.

(i) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

(ii) $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

(iii) ***Croissance*** *: Si $A \subset B$ (A implique B), $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.*

(iv) $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$

(v) $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ *et donc si $A \subset B$, $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.*

(vi) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

(vii) Si $A_1, \dots, A_n$ sont des parties de Ω deux à deux disjointes (ie des événements deux

à deux incompatibles),

$$\mathbb{P}(A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

(viii) $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$.

Démonstration

(i) Par additivité, $\mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing \sqcup \varnothing) = 2\mathbb{P}(\varnothing)$.

(ii) $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(A \sqcup \overline{A}\right) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$.

(iii) $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \sqcup B \setminus A) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant \mathbb{P}(A)$.

(iv) $\varnothing \subset A \subset \Omega$ et croissance.

(v) $(B \setminus A) \sqcup (A \cap B) = B$.

(vi) $A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$.

(vii) Récurrence. □

Propriété : Inégalité de Boole

Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) \leqslant \sum_i \mathbb{P}(A_i)$.

Remarque

Souvent, $\sum_i \mathbb{P}(A_i) \geqslant 1$ et ce n'est pas très intéressant.

Démonstration

Par récurrence sur n : ok si $n = 1$ ou 2.
Si c'est vrai pour $n-1$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + \mathbb{P}(A_n)$ par le cas $n = 2$. □

Exercices

Ex 1 – Montrer que si A, B, C sont des événements,

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Ex 2 – Formule de Poincaré : Pour toute famille $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

Par récurrence, comme la formule de crible.

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cap A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\big((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})\big)$$

puis on applique deux fois HR et on regroupe les termes.

Propriété

Si $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini et $A_1, \dots, A_n$ un système complet d'événements, alors pour tout événement B,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

Démonstration

$$B = \bigsqcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i).$$

□

Corollaire

Si $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini et A un événement, alors pour tout événement B,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}\left(B \cap \overline{A}\right)$$

3 Détermination par image des événements élémentaires

Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω et pour tout ω, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$, alors on a bien $p_\omega \geqslant 0$ et

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

La réciproque est vraie :

Propriété

Si Ω fini et si on a pour tout $\omega \in \Omega$ des réels $p_\omega \geqslant 0$ tels que $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que $\forall\, \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$.

Remarque

Ainsi, dans la pratique, il suffit de donner la probabilité de chaque événement élémentaire pour définir une probabilité.

Démonstration

Raisonnons par analyse-synthèse :

- **Analyse** : Si $\mathbb{P}$ est une probabilité telle que $\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$, alors, pour tout événement A, $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega$ par additivité d'où l'unicité.
- **Synthèse** : Si on pose P tel que pour tout partie A de Ω, $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$, alors $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$ et si A, B sont incompatibles,

$$\mathbb{P}(A \sqcup B) = \sum_{\omega \in A \sqcup B} p_\omega = \sum_{\omega \in A} p_\omega + \sum_{\omega \in B} p_\omega = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Donc P est bien une probabilité.

□

Exemples

E 1 – Si on lance un dé **équilibré**, on note p_i la probabilité de l'événement élémentaire « obtenir i » pour $i \in [\![1,6]\!]$. Alors pour tout i $p_i = \frac{1}{6}$ et si A est l'événement « obtenir un nombre pair » ie $A = \{2,4,6\}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

E 2 – Si on lance un dé **truqué**, on note p_i la probabilité de l'événement élémentaire « obtenir i » pour $i \in [\![1,6]\!]$. avec $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{12}$ et $p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{7}{12}$.

E 3 – même question si $p_i = C \cdot i$ avec C fixé.

Exercice : Formule de Poincaré

On retrouve la formule en utilisant les événements élémentaires : $\mathbb{P}(\bigcup A_i) = \sum\limits_{\omega \in \bigcup A_i} p_\omega$.

Soit p le nombre d'ensembles parmi $A_1, \dots, A_n$ contenant ω. On calcule le cœfficient de p_ω dans

$$\sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ |I|=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \right).$$

Or $\omega \in \bigcap_{i \in I} A_i$ lorsque I ne contient que des indices des ensembles contenant ω : il y a $\binom{p}{k}$ possibilités pour I de cardinal k (donc 0 si $k > p$ ou $p = 0$).

Le cœfficient de p_ω dans cette somme est donc

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{p}{k} = -\left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} - 1 \right) = 1 - 0^p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \geqslant 1 \text{ ie si } \omega \in \bigcup A_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Finalement,

$$\sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ |I|=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \right) = \sum_{p_\omega \in \bigcup A_i} p_\omega = \mathbb{P}\left(\bigcup A_i\right).$$

Remarquons qu'on retrouve la formule du crible pour les cardinaux en prenant la probabilité uniforme.

4 Exemples de probabilités

a Probabilité uniforme

Définition : Probabilité uniforme

Soit Ω un ensemble fini. L'unique probabilité telle que tous les événements élémentaires soient équiprobables est appelée **probabilité uniforme**.

Propriété

Soit Ω un ensemble fini muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Alors

(i) Pour tout $\omega \in \Omega$, $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{|\Omega|}$.

(ii) Pour tout événement A, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.

Remarque

Quand on parle de choix « au hasard » sur un ensemble fini, on sous-entend souvent que ce choix est fait avec la probabilité uniforme : chaque élément a les mêmes chances d'être choisi.

Exemple

Lancer de dés non truqués, tirages de boules semblables dans une urne, lancer de pièces, etc.

Exercices

Ex 1 – Dans un jeu de 52 cartes, on en tire 5. On définit les événements A : « Avoir exactement trois carreaux » et B : « Avoir au moins une paire ».
Univers : $\Omega = \mathscr{P}_5(C)$ où C est l'ensemble des cartes, probabilité uniforme. $|\Omega| = \binom{52}{5}$.
$\mathbb{P}(A) = \dfrac{\binom{13}{3}\binom{39}{2}}{\binom{52}{5}} \approx 8~\%$, $\mathbb{P}(B) = 1 - \dfrac{\binom{13}{5}\cdot 4^5}{\binom{52}{5}} \approx 49~\%$.

Ex 2 – Probabilité d'avoir k fois le chiffre 6 dans un lancer de n dés équilibrés. Univers $\Omega = \{1,2,\dots,6\}^n$, muni de la probabilité uniforme,

$$A_k = \left\{(k_1,\dots,k_n) \mid 6 \text{ apparaît exactement } k \text{ fois}\right\}$$

$|A_k| = \binom{n}{k}5^{n-k}$ et $|\Omega| = 6^n$, donc $\mathbb{P}(A_k) = \dbinom{n}{k}\dfrac{5^{n-k}}{6^n}$.

Si $n = 6$, probabilité d'obtenir tous les chiffres de 1 à 6 ? $\dfrac{6!}{6^6} \approx 1{,}5~\%$.

Ex 3 – On vérifie sur un exemple qu'un tirage simultané ou qu'un tirage sans remise donnent, pour des événements ne faisant pas intervenir l'ordre, les mêmes résultats pour la probabilité uniforme.

On considère une urne contenant 5 boules blanches, 4 boules noires et 3 boules bleues. On tire trois boules. Déterminer la probabilité des événements A « Les trois boules sont de la même couleur. » et B « Il y a une boule de chaque couleur. » si on suppose que les boules sont tirées :

1. **simultanément**,
   $\Omega = \mathscr{P}_3(\mathscr{B})$ où $\mathscr{B}$ est l'ensemble des boules, muni de la probabilité uniforme.
   $|\Omega| = \binom{12}{3} = 220$.
   $|A| = \binom{5}{3} + \binom{4}{3} + 1 = \binom{5}{2} + \binom{4}{1} + 1 = 15$ donc $\mathbb{P}(A) = \frac{15}{220} = \frac{3}{44} \approx 6,8$ %.
   $|B| = 5 \times 4 \times 3 = 60$ donc $\mathbb{P}(B) = \frac{60}{220} = \frac{3}{11} \approx 27,3$ %.
2. **successivement, avec remise**,
   $\Omega = \mathscr{B}^3$, muni de la probabilité uniforme.
   $|\Omega| = 12^3 = 1728$.
   $|A| = 5^3 + 4^3 + 3^3 = 216$ donc $\mathbb{P}(A) = \frac{216}{1728} = \frac{1}{8} = 12,5$ %.
   $|B| = (5 \times 4 \times 3) \times 3! = 360$ donc $\mathbb{P}(B) = \frac{360}{1728} = \frac{5}{24} \approx 20,8$ %.
3. **successivement, sans remise**.
   $\Omega = \mathscr{A}_3(\mathscr{B})$, muni de la probabilité uniforme.
   $|\Omega| = A_{12}^3 = 1320$.
   $|A| = A_5^3 + A_4^3 + A_3^3 = 90$ donc $\mathbb{P}(A) = \frac{90}{1320} = \frac{3}{44}$.
   $|B| = (5 \times 4 \times 3) \times 3! = 360$ donc $\mathbb{P}(B) = \frac{360}{1320} = \frac{3}{11}$.

Ex 4 – Un lac contient N poissons dont m malades. On effectue un prélèvement (simultané) de n poissons. Quel est la probabilité d'en avoir exactement k malades ?
Sur Ω l'ensemble des poissons muni de la probabilité uniforme, si A_k est l'événement « obtenir exactement k poissons malades », $\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

b Probabilité de Bernoulli

On réalise un lancer de pièce pas nécessairement équilibrée (ou toute autre expérience aléatoire ayant deux issues possibles), on pose $\Omega = \{0,1\}$. On note $p \in [0,1]$ la probabilité d'obtenir 1 (pile, par exemple) et $q = 1 - p \in [0,1]$ la probabilité d'obtenir 0 (face).

On définit ainsi une probabilité dite **de Bernoulli** de paramètre p :

- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$,
- $\mathbb{P}(\{1\}) = p$,
- $\mathbb{P}(\{0\}) = q = 1 - p$,
- $\mathbb{P}(\{0,1\}) = 1$.

Si $p = \frac{1}{2}$, on retrouve une probabilité uniforme.

c Probabilité binomiale

On réalise un lancer de n dés équilibrés à 6 faces, et on s'intéresse au nombre k de 6 obtenus.

On définit l'univers $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$ des nombres k de 6 que l'on peut obtenir et on trouve comme on l'a vu précédemment

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \binom{n}{k} \frac{5^{n-k}}{6^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}.$$

Définition

On parle de **probabilité binomiale** de paramètre (n, p) sur $\Omega = \{0, \dots, n\}$ lorsque $\mathbb{P}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ avec $p \in [0, 1]$ et $q = 1 - p$.

Elle est notée $\mathscr{B}(n, p)$.

d Probabilité hypergéométrique (HP)

On prélève n poissons dans un lac qui en contient N poissons dont m malades et on s'intéresse au nombre de poissons k malades obtenus.

Si on se place sur l'univers $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ des nombres k de poissons malades que l'on peut obtenir, il est naturel d'après ce qu'on a vu précédemment de poser $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

Définition

On parle de **probabilité hypergéométrique** de paramètres (N, m, n) sur $\Omega = \{0, \dots, n\}$ lorsque

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

III Probabilités conditionnelles

Si $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme, et on suppose un événement B (non impossible) réalisé.

Pour connaître la probabilité qu'un événement A se réalise sachant que B est réalisé, on s'intéresse au nombre de cas possibles : $|B|$ et au nombre de cas favorable : $|A \cap B|$.

Cela donne donc comme probabilité $\dfrac{|A \cap B|}{|B|} = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Généralisons cela à n'importe quelle probabilité.

1 Définition

Définition

Si A et B sont des événements de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ et si $\mathbb{P}(B) > 0$, on appelle **probabilité de A sachant B** le réel

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarques

R1 – $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$ représente la probabilité de A du point de vue d'un observateur qui arriverait en cours d'expérience, au moment où B vient de se réaliser. Il ne faut surtout pas la confondre avec $\mathbb{P}(A \cap B)$ correspondant à la probabilité que A et B soient réalisés simultanément.

R2 – ⚠ En général, « $A \mid B$ » n'est pas un événement (c'est-à-dire une partie de Ω) ! La notation $\mathbb{P}(A \mid B)$ peut se révéler dangereuse si on ne fait pas attention.

R3 – Si A et B sont incompatibles, $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(B \mid A) = 0$.

Exemple

On considère une famille de deux enfants. On suppose que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille.

On se place donc sur $\Omega = \{F, G\}^2$ avec la probabilité uniforme P (modèle de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$).

Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'aîné est une fille ?

Intuitivement, sachant que l'aîné est une fille, il ne reste que deux possibilités : le deuxième est une fille ou est un garçon. Il y aura donc une chance sur deux. Vérifions :

B : « L'aîné est une fille ». Donc $B = \{F\} \times \{F, G\} = \{(F, G), (F, F)\}$. $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

A : « Les deux sont des filles ». Donc $A \cap B = A = \{(F, F)\}$. $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$ et $\boxed{\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{1}{2}.}$

Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant qu'il y a au moins une fille ?

C : « Il y a au moins une fille ». $C = \{(F, G), (F, F), (G, F)\}$. Donc $\mathbb{P}(C) = \frac{3}{4}$.

$A \cap C = A$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4}$ et $\boxed{\mathbb{P}(A \mid C) = \frac{1}{3}.}$

Propriété

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors l'application

$$\mathbb{P}_B : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B) \end{array} \right.$$

est une probabilité sur Ω.

Démonstration

$\mathbb{P}(A \mid B) \geqslant 0$, $\mathbb{P}(\Omega \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$ et si A et C sont incompatibles,

$$\mathbb{P}(A \sqcup C \mid B) = \frac{\mathbb{P}\big((A \cap B) \sqcup \mathbb{P}(C \cap B)\big)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(C \mid B).$$

□

Remarque

En particulier, toutes les propriétés des probabilités s'appliquent. Par exemple, $\mathbb{P}\left(\overline{A} \mid B\right) = 1 - \mathbb{P}(A \mid B)$ et $\mathbb{P}(A \cup C \mid B) = \mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(C \mid B) - \mathbb{P}(A \cap C \mid B)$.

Propriété

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A, B deux événements.

- *Si $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B) \times \mathbb{P}(B)$*
- *Si $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \mid A) \times \mathbb{P}(A)$*

Remarque

Intuitivement, A et B sont réalisés si B est réalisé, puis A est réalisé sachant que B l'était : on retrouve nos réflexes de dénombrement.

Exemple

Quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres pairs en lançant deux fois un dé à six faces ?

Sur $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme.

- **Première méthode** : Directement, soit A l'événement « Les deux résultats sont pairs. » Alors $A = \{2, 4, 6\}^2$, donc $\mathbb{P}(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.
- **Deuxième méthode** : Soit B l'événement « le premier résultat est pair » et C l'événement « le deuxième résultat est pair ». Alors $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(C \mid B) = \frac{1}{2}$, donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4}$.

2 Formule des probabilités composées

Théorème : Formule des probabilités composées

Soit $n \geqslant 2$, $A_1, \dots, A_n$ des événements de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$.

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \times \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Remarque

À nouveau, cela correspond à notre intuition : on réalise A_1, puis A_2 sachant que A_1 l'est, puis A_3 sachant que A_1 et A_2 le sont, etc. On se sert donc en général de cette formule lorsque l'on a des événements successifs, **chronologiques**.

Démonstration

Remarquons que comme pour tout $k < n$, $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap \cdots \cap A_k$, pour tout k, $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k) > 0$ et donc tous les termes ont un sens.

$$\mathbb{P}(A_1) \times \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(A_{i+1} \mid A_1 \cap \cdots \cap A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\mathbb{P}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_{i+1}\right)}{\mathbb{P}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_i\right)} = \mathbb{P}(A_1) \times \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_1)}$$

car le produit est télescopique. □

Exemple

On tire successivement (et sans remise) 4 cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer les 4 as ?

Sur l'univers $\Omega = \mathscr{A}_4(C)$ où $\mathscr{C}$ est l'ensemble des cartes, muni de la probabilité uniforme.

On note A_i l'événement « la i^e carte tirée est un as ». On cherche $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$.

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \times \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \mathbb{P}(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Or $\mathbb{P}(A_1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, $\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) = \frac{3}{51}$, $\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \frac{2}{50}$ et $\mathbb{P}(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{49}$.

Donc $\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\right) = \frac{4!}{52 \times 51 \times 50 \times 49} \approx 0,0004\ \%$.

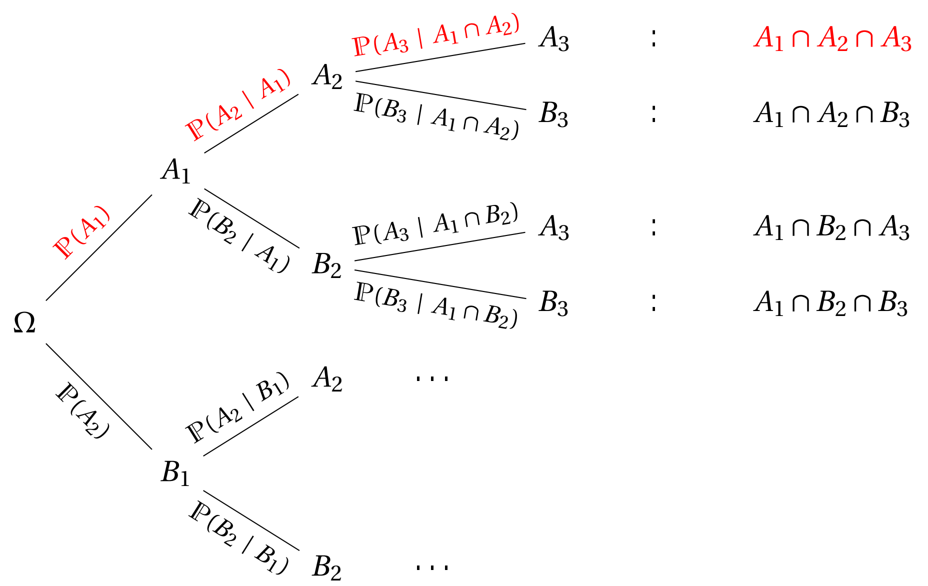
(On peut aussi obtenir ce résultat par un raisonnement direct !)

Représentation sur un arbre : On peut représenter sur un arbre les événements successifs, par ordre chronologique et indiquer sur une arrête reliant deux événements A_i et A_{i+1} la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}\left(A_{i+1} \mid A_1 \cap \cdots \cap A_i\right).$$

Alors $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$ s'obtient en multipliant les entre elles les probabilités placées sur chaque arrête.

⚠ Un dessin d'arbre n'est pas une démonstration !



3 Formule des probabilités totales

Théorème

Si $(\Omega,\mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini et $A_1,\dots,A_n$ un système complet d'événements tel que, pour tout i, $\mathbb{P}(A_i)>0$, alors pour tout événement B,

$$\mathbb{P}(B)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(B\mid A_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B).$$

Démonstration

Immédiat. □

Remarques

R1 – La formule peut s'appliquer s'il existe i tel que $\mathbb{P}(A_i)=0$ en donnant une valeur quelconque à $\mathbb{P}(B\mid A_i)$ car $\mathbb{P}(B\cap A_i)=0$.

On peut toujours écrire $\mathbb{P}(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B\cap A_i)=\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ \mathbb{P}(A_i)\neq 0}}\mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(B\mid A_i)$

R2 – La formule des probabilités totales est utile lorsque l'on fait une expérience aléatoire en plusieurs étapes. Elle permet de raisonner par disjonction de cas, suivant le résultat de la première étape.

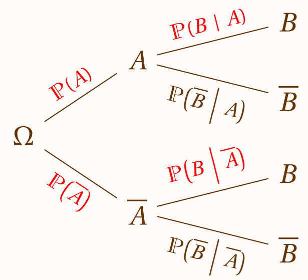
Corollaire

Si $(\Omega,\mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini et A un événement tel que $0<\mathbb{P}(A)<1$, alors pour tout événement B,

$$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B\mid A)+\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\times\mathbb{P}\left(B\,\middle|\,\overline{A}\right)$$

Remarque

La formule des probabilités totales se lit sur un arbre rempli avec des systèmes complets d'événements en disant que la probabilité d'un événement est la « somme de tous les chemins » y menant.



$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) \times \mathbb{P}\left(B \,\middle|\, \overline{A}\right)$$

Exemples

E1 – **Une compagnie d'assurance estime que ses clients se divisent en deux catégories : ceux qui ont beaucoup d'accidents (20 %) et ceux qui n'en ont pas beaucoup. Pour la première, la probabilité d'avoir un accident par an est $0,5$, pour la seconde cette probabilité est $0,1$.**

Quelle est la probabilité qu'un nouvel assuré soit victime d'un accident la première année ?

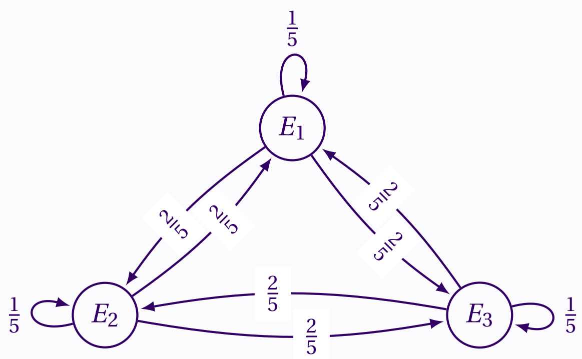
Ω est l'ensemble des assurés. A est l'ensemble des assurés ayant beaucoup d'accidents et B celui des assurés ayant un accident la première année.

On cherche

$$P(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) \times \mathbb{P}\left(B \,\middle|\, \overline{A}\right) = 0,2 \times 0,5 + 0,8 \times 0,1 = 0,18 = 18\ \%.$$

E2 – On parle de **processus de Markov** lorsque l'on fait une série d'expériences aléatoires donnant plusieurs états possibles tel que la probabilité de passer dans un autre état ne dépend que de l'état dans lequel on est et non de tous les états par lesquels on est passés (absence de mémoire).

Si, par exemple, on a 3 états possibles E_1, E_2 et E_3 et qu'en étant dans un état donné, on passe à un autre état avec une probabilité $\frac{2}{5}$ et on reste dans le même état avec une probabilité $\frac{1}{5}$, on peut résumer la situation avec un diagramme de transition :



Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les événements :

- $A_1^{(n)}$: « Après n étapes, on est dans l'état E_1 » de probabilité $p_1^{(n)}$,

- $A_2^{(n)}$: « Après n étapes, on est dans l'état E_2 » de probabilité $p_2^{(n)}$,
- $A_3^{(n)}$: « Après n étapes, on est dans l'état E_3 » de probabilité $p_3^{(n)}$.

Pour tout n, la formule des probabilités totales donne

$$\begin{pmatrix} p_1^{(n+1)} \\ p_2^{(n+1)} \\ p_3^{(n+1)} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_1^{(n)} \\ p_2^{(n)} \\ p_3^{(n)} \end{pmatrix}$$

où $A^\intercal$ est appelée **matrice de transition** : $a_{i,j} = \mathbb{P}(E_i \mid E_j)$ donc $(A^\intercal)_{i,j} = \mathbb{P}(E_j \mid E_i)$. Ici, $A = A^\intercal = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

La matrice $A^\intercal$ est une matrice dite **stochastique** : les cœfficients sont dans $[0,1]$ et la somme de toutes les lignes vaut 1. (Logique, non ?)

On obtient alors $\begin{pmatrix} p_1^{(n)} \\ p_2^{(n)} \\ p_3^{(n)} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \\ p_3^{(0)} \end{pmatrix}$.

Si A^n a une limite, on peut même obtenir la probabilité asymptotique d'être dans l'un des trois états (on trouve $1/3$ pour les trois, ici, quel que soit l'état de départ.).

E3 – **Un laboratoire pharmaceutique réalise un test clinique à partir d'un médicament et d'un placebo. Voici les résultats :**

	Guéris	**Non guéris**
Hommes		
Médicament	18	12
Placebo	7	3
Femmes		
Médicament	2	8
Placebo	9	21

Soient H l'événement « la personne est un homme », M l'événement « la personne a pris le médicament » et G l'événement « la personne est guérie. »

Calculer la probabilité d'être guéri sachant qu'on ait pris ou non le médicament pour les hommes, pour les femmes, puis pour tout le monde.

$$\mathbb{P}(G \mid M \cap H) = \frac{18}{30} = 60\ \% \text{ et } \mathbb{P}\left(G \,\middle|\, \overline{M} \cap H\right) = \frac{7}{10} = 70\ \%.$$

$$\mathbb{P}\left(G \,\middle|\, M \cap \overline{H}\right) = \frac{2}{10} = 20\ \% \text{ et } \mathbb{P}\left(G \,\middle|\, \overline{M} \cap \overline{H}\right) = \frac{9}{30} = 30\ \%.$$

$$\mathbb{P}(G \mid M) = \frac{20}{40} = 50\ \% \text{ et } \mathbb{P}\left(G \,\middle|\, \overline{M}\right) = \frac{16}{40} = 40\ \%.$$

Si on extrapole à toute la population, que deviennent ces dernières probabilités ?

Pour toute la population, $\mathbb{P}(H \mid M) = \mathbb{P}\left(H \,\middle|\, \overline{M}\right) = \frac{1}{2}$.

Alors

$$\mathbb{P}(G \mid M) = \mathbb{P}(H \mid M)\mathbb{P}(G \mid M \cap H) + \mathbb{P}\left(\overline{H} \,\middle|\, M\right)\mathbb{P}\left(G \,\middle|\, M \cap \overline{H}\right) = \frac{60\ \%}{2} + \frac{20\ \%}{2} = 40\ \%$$

et

$$\mathbb{P}\left(G \,\middle|\, \overline{M}\right) = \mathbb{P}\left(H \,\middle|\, \overline{M}\right)\mathbb{P}\left(G \,\middle|\, \overline{M} \cap H\right) + \mathbb{P}\left(\overline{H} \,\middle|\, \overline{M}\right)\mathbb{P}\left(G \,\middle|\, \overline{M} \cap \overline{H}\right) = \frac{70\ \%}{2} + \frac{30\ \%}{2} = 50\ \%$$

Conclusion ?

E4 – **Soit $p > 0$. Une urne $\mathscr{U}$ contient des jetons numérotés de 1 à p : i jetons portent le numéro i.**
On dispose de p urnes numérotées de 1 à p telles que l'urne numéro i contient i boules blanches et $p - i$ boules noires.
On tire un jeton numéro i dans $\mathscr{U}$ puis une boule dans l'urne numéro i. Quelle est la probabilité que la boule soit blanche ?
On se place sur $\Omega = [\![1,p]\!] \times \{b,n\}$ muni naturellement de la probabilité $\mathbb{P}$ tel que si on note B l'événement « la boule prélevée est blanche » et J_i l'événement « l'urne choisie est la numéro i », alors $\mathbb{P}(J_i) = \frac{i}{\frac{p(p+1)}{2}} = \frac{2i}{p(p+1)}$ et $\mathbb{P}_{J_i}(B) = \frac{i}{p}$ construite à partir des probabilités uniformes.
Les U_i forment un sce dont les probabilités sont non nulles. La formule des probabilités totales s'écrit :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(J_i)\mathbb{P}(B \mid J_i) = \sum_{i=1}^{p} \frac{2i}{p(p+1)}\frac{i}{p} = \frac{2p+1}{3p}.$$

4 Formule de Bayes

On reprend l'expérience précédente : on cherche la probabilité qu'une boule ait été tirée dans l'urne numéro 1 sachant qu'elle est blanche. On cherche donc à « remonter le temps » en quelques sortes.

On utilise pour cela la **formule de probabilité des causes** :

Propriété : Formule de probabilité des causes

Si A, B sont des événements de probabilité non nulle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, alors

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\ \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Démonstration

$\mathbb{P}(A \mid B)\ \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \mid A)\ \mathbb{P}(A)$. □

Exemple

Ainsi, dans l'exemple précédent,

$$\mathbb{P}(J_1 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid J_1)\mathbb{P}(J_1)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{2}{p(p+1)} \times \frac{1}{p}}{\frac{2p+1}{3p}} = \frac{6}{p(p+1)(2p+1)}.$$

En remplaçant $\mathbb{P}(B)$ par la formule des probabilités totales, on obtient

$$\boxed{\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\ \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B \mid A)\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(B \mid \overline{A}\right)\ \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)}.}$$

Cela se généralise en la **formule de Bayes** :

Théorème : Formule de Bayes

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, B un événement de probabilité non nulle et $j \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$\mathbb{P}\left(A_j \mid B\right) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_j)\ \mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\ \mathbb{P}(A_i)}$$

Démonstration

On applique la propriété précédente à A_j et B et on utilise la formule des probabilités totales. □

Exemples

E 1 – Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille.
On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de $99\ \%$ lorsqu'elle est effectivement présente.
Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour $0,1\ \%$ des personnes saines testées.
Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade sachant qu'elle a été testée positive ? Commenter.

Sur Ω l'ensemble des personnes testées, avec la probabilité uniforme. Soit M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».
D'après les informations dont on dispose, $\mathbb{P}(T \mid M) = 0,99$ et $\mathbb{P}\left(T \,\middle|\, \overline{M}\right) = 10^{-3}$, $\mathbb{P}(M) = 10^{-4}$. Donc

$$\mathbb{P}(M \mid T) = \frac{\mathbb{P}(T \mid M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T \mid M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}\left(T \,\middle|\, \overline{M}\right)\mathbb{P}\left(\overline{M}\right)} = \frac{0,99 \cdot 10^{-5}}{0,99 \cdot 10^{-4} + (1 - 10^{-4})10^{-3}} \approx 9\ \%.$$

Cela est dû au fait que il est rare que le test soit positif (le dénominateur vaut $\mathbb{P}(T)$) mais très très rare que l'on ait un malade ($\mathbb{P}(M)$ est très petit devant $\mathbb{P}(T)$). Proportionnellement, il y a beaucoup plus de non malades testés positifs.

E 2 – Dans un célèbre jeu américain des années 70, un candidat devait choisir une porte parmi trois sachant que derrière ces portes étaient dissimulées deux chèvres et une Ferrari. Une fois le choix effectué, l'animateur qui sait où est la Ferrari ouvre l'une des portes non choisies par le candidat, derrière laquelle il y a une chèvre. Il propose ensuite au candidat de changer de porte. A-t-il intérêt à le faire ?

Soit F_i l'événement « La Ferrari est derrière la porte numéro i ».
Supposons par exemple, que le candidat ait choisi la porte 1.
On a $\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(F_2) = \mathbb{P}(F_3) = \frac{1}{3}$. (F_1, F_2, F_3) est un système complet d'événements.
Soit A l'événement « l'animateur ouvre la porte numéro 3 ».

On cherche $\mathbb{P}(F_2 \mid A)$ pour savoir si le candidat a intérêt à changer de porte. (Si l'animateur ouvre la porte 2, le raisonnement est le même).
D'après la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(F_2 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(A \mid F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(A \mid F_2)\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(A \mid F_3)\mathbb{P}(F_3)}$$

Or
- $\mathbb{P}(A \mid F_1) = \frac{1}{2}$ car les deux portes restantes contiennent une chèvre.
- $\mathbb{P}(A \mid F_2) = 1$ car si la Ferrari est derrière la deuxième porte, l'animateur ne peut ouvrir que la troisième porte.
- $\mathbb{P}(A \mid F_3) = 0$ car l'animateur ne dévoile pas la Ferrari.

Finalement, on trouve $\mathbb{P}(F_2 \mid A) = \frac{2}{3}$ et le candidat a deux fois plus de chances de gagner en changeant de porte qu'en la gardant.

En y réfléchissant bien, si on décide de changer de porte, on a au départ 2 chances de gagner (les portes où il y a les chèvres) et 1 de perdre, alors que si on décide de ne pas changer de portes, on a au départ 2 chances de perdre et 1 de gagner !

IV ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

1 Couple d'événements indépendants

Motivation : On réalise deux fois une expérience aléatoire aux résultats équiprobables (par exemple un lancer de dé à 6 faces équilibré) et on s'intéresse aux résultats. On modélise naturellement le phénomène avec, comme univers, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ (où $\Omega_1 = \Omega_2 = [\![1,6]\!]$ dans l'exemple), muni de la probabilité uniforme.

On considère un événement A relatif au premier jet uniquement, il est de la forme $A = A_1 \times \Omega_2$, et un événement B relatif au second jet uniquement, il est de la forme $B = \Omega_1 \times B_2$.

Il n'y a aucun lien entre les deux événements, ils sont *indépendants*.

On a facilement

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A_1|}{|\Omega_1|} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{|B_2|}{|\Omega_2|}.$$

Calculons la probabilité que l'événement A et B se réalise :

$$A \cap B = A_1 \times B_2$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A_1||B_2|}{|\Omega_1||\Omega_2|}.$$

On remarque qu'alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Définition : Indépendance de deux événements

Deux événements A et B d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ sont dits **indépendants** lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

On note parfois $A \perp\!\!\!\perp B$ lorsque A et B sont indépendants.

Remarque

Si B est de probabilité nulle, alors B est indépendant de tout autre événement A.

Propriété

Deux événements A et B d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(B) > 0$ sont ***indépendants*** *si et seulement si $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$.*

Remarques

R1 – Cela traduit bien notre intuition : que B soit réalisé ou non, la probabilité de A ne change pas.

R2 – Bien sûr, si $\mathbb{P}(A) > 0$, cela s'écrit aussi $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$.

R3 – ⚠ Ne pas confondre l'indépendance de deux événements et le fait qu'ils soient incompatibles. Ces notions s'excluent en général. En effet, si A et B sont incompatibles, $A \cap B = \varnothing$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. Si A et B sont de probabilité non nulle, ils ne sont pas indépendants. (Ce qui se comprend car $A \subset \overline{B}$ par exemple).

R4 – Contrairement à l'incompatibilité qui est une notion ensembliste, l'indépendance est une notion probabiliste : elle dépend de la probabilité dont est muni Ω.

Exemple

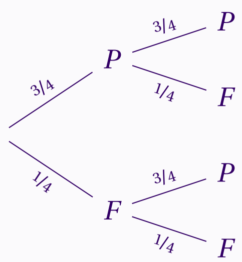
On lance une pièce deux fois et on choisit $\Omega = \{P, F\}^2 = \big\{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\big\}$. On considère les événements A « les deux lancers ne donnent pas le même résultat » et B « le deuxième lancer donne face ».

- Si la pièce est équilibrée, $\mathbb{P}$ probabilité uniforme, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$: A et B sont indépendants.
- Si la pièce tombe sur pile avec une probabilité de $p_P = \frac{3}{4}$ et sur face avec une probabilité de $p_F = \frac{1}{4}$ et qu'on pose $\mathbb{P}\big(\{(X, Y)\}\big) = p_X p_Y$ (ce qui revient à considérer raisonnablement que les deux lancers sont indépendants),

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\big(\{(P, F)\}\big) + \mathbb{P}\big(\{(F, P)\}\big) = \frac{3}{8}$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\big(\{(F, F)\}\big) + \mathbb{P}\big(\{(P, F)\}\big) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}\big(\{(P, F)\}\big) = \frac{3}{16} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$



Donc A et B ne sont pas indépendants.

Remarque

Il n'est pas toujours facile de prédire si deux événements sont indépendants (sauf si on a construit l'espace probabilisé pour qu'ils le soient.)

Naturellement, si deux événements sont indépendants, leurs complémentaires le sont. Plus précisément :

Propriété

Si deux événements A et B d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ sont indépendants, alors

- *A et $\overline{B}$ sont indépendants,*
- *$\overline{A}$ et B sont indépendants,*
- *$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

Démonstration

- $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$.
- Idem.
- d'après les deux premières. □

Remarque

Si A, B sont indépendant et A, C aussi, on ne peut rien dire en général de A et $B \cap C$ et de A et $B \cup C$.

Exercice

On lance deux dés équilibrés et l'on considère les événements A « le premier dé amène un nombre pair », B « le second dé amène un nombre pair » et C « les deux dés amènent des nombres de même parité ».

Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants mais que A n'est indépendant ni de $B \cap C$, ni de $B \cup C$.

$\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, probabilité uniforme.

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4}$,

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cap C).$$

$\mathbb{P}(B \cup C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$,

$$\mathbb{P}\big(A \cap (B \cup C)\big) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup C).$$

2 Famille d'événements indépendants

Définition

Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ une famille d'événements de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dit **deux à deux indépendants** lorsque pour tout $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendant, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.

- $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont dit **indépendants**, ou **mutuellement indépendants**, lorsque pour toute partie non vide I de $[\![1,n]\!]$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Propriété

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. La réciproque est fausse si $n \geqslant 3$.

Démonstration

Prendre $|I| = 2$.

Dans l'exemple précédent, A, B, C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants. □

Remarques

R1 – C'est une propriété très forte : elle demande de vérifier $2^n - n - 1$ conditions ! En général, les espaces probabilisés sont construits pour avoir des événements mutuellement indépendants et on n'a donc pas à le vérifier à la main.

R2 – L'indépendance mutuelle est stable par extraction de sous-familles.

R3 – Attention c'est l'inverse des nombres premiers entre eux :

mutuellement ⇒ deux à deux.

R4 – Si les événements A_i sont deux à deux indépendants et si pour tout i on pose $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, alors les B_i sont deux à deux indépendants d'après la propriété vue précédemment. Cela se généralise aux événements mutuellement indépendants :

Propriété

Si les événement $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants et si pour tout i on pose $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, alors les B_i sont mutuellement indépendants.

Démonstration

On suppose que $B_k = \overline{A_k}$ et si $i \neq k$, $B_i = A_i$ (il n'y a qu'un complémentaire).

Alors, si I est une partie non vide de $[\![1,n]\!]$,

- Soit $k \notin I$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(B_i)$.
- Si $k \in I$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I\setminus\{k\}} A_i \cap \overline{A_k}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I\setminus\{k\}} A_i\right) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I\setminus\{k\}} \mathbb{P}(A_i) - \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$
$$= (1 - \mathbb{P}(A_k)) \prod_{i\in I\setminus\{k\}} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right) \prod_{i\in I\setminus\{k\}} \mathbb{P}(A_i) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(B_i).$$

Puis récurrence sur le nombre de complémentaires. □

Exercice

Si $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, Montrer que les événements suivants sont indépendants :

- $\bigcap_{i=1}^{p} A_i$ **et** $\bigcap_{i=p+1}^{n} A_i$,
- $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ **et** $\bigcap_{i=p+1}^{n} A_i$.
- $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ **et** $\bigcup_{i=p+1}^{n} A_i$,

Solution :

- Direct,
- $A_1, \dots, A_p, \overline{A_{p+1}}, \dots, \overline{A_n}$ sont mutuellement indépendants, par le premier point, sont indépendants $\bigcap_{i=1}^{p} A_i$ et $\bigcap_{i=p+1}^{n} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i=p+1}^{n} A_i}$ donc sont indépendants $\bigcap_{i=1}^{p} A_i$ et $\bigcup_{i=p+1}^{n} A_i$.
- idem avec $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_p}, \overline{A_{p+1}}, \dots, \overline{A_n}$.

3 Modélisation d'expériences aléatoires indépendantes

L'indépendance des événements est en général une conséquence de la modélisation choisie. On construit l'espace probabilisé de sorte que deux expériences aléatoires dont les résultats n'ont pas de lien de causalité entre eux (expériences indépendantes) se traduisent par des événements indépendants.

a Cas de deux épreuves successives indépendantes

Par exemple, si on a deux expériences aléatoires modélisées par $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ et $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$, alors on peut modéliser la succession de ces deux expériences par $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{P})$ avec

$$\mathbb{P}(A_1 \times A_2) = \mathbb{P}(A_1 \times \Omega_2)\mathbb{P}(\Omega_1 \times A_2) = \mathbb{P}_1(A_1)\mathbb{P}_2(A_2)$$

par indépendance des deux épreuves aléatoires.

On montre facilement qu'on définit bien une probabilité sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ ainsi, appelée **probabilité produit** tel que

$$\forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2, \ \ \mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = \mathbb{P}_1(\{\omega_1\})\mathbb{P}_2(\{\omega_2\}).$$

On a bien $\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2)\}) \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega_1\times\Omega_2} \mathbb{P}\big(\{(\omega_1, \omega_2)\}\big) = 1$ et

$$\mathbb{P}(A_1 \times A_2) = \sum_{(\omega_1,\omega_2)\in A_1\times A_2} \mathbb{P}\big(\{(\omega_1, \omega_2)\}\big) = \sum_{(\omega_1,\omega_2)\in A_1\times A_2} \mathbb{P}_1(\{\omega_1\})\mathbb{P}_2(\{\omega_2\}) = \mathbb{P}_1(A_1)\mathbb{P}_2(A_2).$$

b Généralisation

Plus généralement, une succession de n expériences aléatoires indépendantes représentées par des espaces probabilisés $(\Omega_i, \mathbb{P}_i)$, sera modélisée par $(\Omega, \mathbb{P})$ avec $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ et P l'unique probabilité telle que

$$\forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega_1) \times \cdots \times \mathscr{P}(\Omega_n), \ \ \mathbb{P}(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mathbb{P}_1(A_1)\cdots\mathbb{P}_n(A_n).$$

c Épreuves répétées

En particulier, si c'est la même expérience qui est répétée n fois, modélisée par $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$, alors la suite des n épreuves sera modélisée par $(\Omega_1^n, \mathbb{P})$ avec

$$\forall (A_1, \ldots, A_n) \in (\mathscr{P}(\Omega_1))^n, \ \ \mathbb{P}(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mathbb{P}_1(A_1)\cdots\mathbb{P}_1(A_n).$$

En particulier, pour $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_1^n$,

$$\mathbb{P}\big(\{(\omega_1, \ldots, \omega_n)\}\big) = \mathbb{P}_1(\{\omega_1\})\cdots\mathbb{P}_1(\{\omega_n\}).$$

L'exemple classique est celui du jeu de pile ou face (ou n'importe qu'elle épreuve à deux issues dite **de Bernoulli**). On répète n fois l'épreuve. Sur $\{0,1\}$, $\mathbb{P}_1(\{1\}) = p$ et $\mathbb{P}_1(\{0\}) = q = 1-p$ avec $p \in [0,1]$, où 1 représente pile et 0 face, par exemple.

La suite de n lancers sera représentée par l'univers $\Omega = \{0,1\}^n$, muni de la probabilité $\mathbb{P}$: pour $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$,

$$\mathbb{P}\big(\{(\omega_1, \ldots, \omega_n)\}\big) = \mathbb{P}_1(\{\omega_1\})\cdots\mathbb{P}_1(\{\omega_n\}).$$

Par exemple :

- Probabilité de « on obtient n pile » : p^n
- Probabilité de « on obtient k piles puis $n-k$ faces » : $p^k(1-p)^{n-k}$
- Probabilité de « on obtient au total k piles et $n-k$ faces » : $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ (loi binomiale).