Calcul matriciel

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces de matrices	
Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.	
Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	Dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
b) Produit matriciel	
Bilinéarité, associativité.	
Produit d'une matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	
Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro et de matrices nilpotentes.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
c) Transposition	
Transposée d'une matrice.	Notations ${}^tA$, A^T.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit, inverse.	

Table des matières

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif infini, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ au programme.

I Espaces de matrices

1 Définition

Définition : Matrice

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice à n lignes et p colonnes à cœfficients dans** $\mathbb{K}$ toute famille de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$ représentée sous la forme

$$M = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \dots & m_{i,j} & \dots & m_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ j \end{array} & \end{array}$$

On note $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.

- Lorsque $n = 1$, $M = \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_p \end{pmatrix}$, on parle de **matrice ligne**.
- Lorsque $p = 1$, $M = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$, on parle de **matrice colonne**.
- Lorsque $p = n$, $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix}$, on parle de **matrice carrée**.

  On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Remarque

On peut voir une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ comme un np-uplet de $\mathbb{K}^{np}$ noté de manière différente : il y a une bijection évidente entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^{np}$.

Ainsi, on confond usuellement :

- vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ et matrices lignes $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,
- vecteurs $(x_1, \dots, x_p)$ de $\mathbb{K}^p$ et matrices colonnes $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$,
- scalaires λ de $\mathbb{K}$ et matrices (carrées !) $\begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$.

2 Quelques matrices carrées particulières

Définition : Matrice triangulaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice triangulaire supérieure** (respectivement **inférieure**) tout matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall\, i > j,\ \ m_{i,j} = 0$ (respectivement $\forall\, i < j,\ \ m_{i,j} = 0$.)

C'est donc une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \star & \dots & \dots & \star \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \star \end{pmatrix} \quad \text{(respectivement } \begin{pmatrix} \star & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \star & \dots & \dots & \star \end{pmatrix}\text{).}$$

On note $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble de ces matrices.

Lorsque les cœfficients diagonaux sont également tous nuls, on parle de **matrice triangulaire stricte.**

Exemples

E1 – $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

E2 – $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure stricte.

Remarque

La définition s'étend aux matrices rectangulaires.

Définition : Matrice diagonale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice diagonale** tout matrice carrée $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall\, i \neq j,\ \ m_{i,j} = 0$.

C'est donc une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \star & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \star \end{pmatrix}$.

On note $\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}$.

On note $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.

Remarque

$\mathscr{D}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Définition : Matrices scalaires

$I_n = \mathrm{diag}(1,\dots,1) = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$ est appelée **matrice identité**.

On appelle **matrice scalaire** toute matrice de la forme $\mathrm{diag}(\lambda,\dots,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

3 Structure d'espace vectoriel

On a vu qu'il y avait une bijection canonique entre $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^{np}$. On va ainsi transporter la structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de ce dernier en définissant des lois $+$ et $\cdot$ semblables sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition

Pour $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \dots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \dots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix} \qquad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \dots & \lambda a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \dots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Ainsi, tout naturellement,

Propriétés

(i) $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ *a une structure de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, d'élément nul* $0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

Remarque

$\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$ (et non $n!$)

Définition

On appelle **base canonique** $(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,p})$ où $E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow i \\ \uparrow & \\ j & \end{array}$

$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix}$ s'écrit de manière unique $\sum_{i,j} m_{i,j} E_{i,j}$.

Propriété

$\forall\, i,k \in [\![1,n]\!],\ \ \forall\, j,\ell \in [\![1,p]\!],\ \ \left(E_{i,j}\right)_{k,\ell} = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}.$

Exemple

Base canonique de $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ et décomposition d'une matrice dans cette base.

Propriétés

(i) $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *de dimension* n.

(ii) $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ *et* $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *de dimension* $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(iii) L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) strictes est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *de dimension* $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration

Il s'agit de $\mathrm{Vect}(E_{i,i})_i$, $\mathrm{Vect}(E_{i,j})_{i\leqslant j}$, $\mathrm{Vect}(E_{i,j})_{i\geqslant j}$, $\mathrm{Vect}(E_{i,j})_{i<j}$ et $\mathrm{Vect}(E_{i,j})_{i>j}$ respectivement $\square$

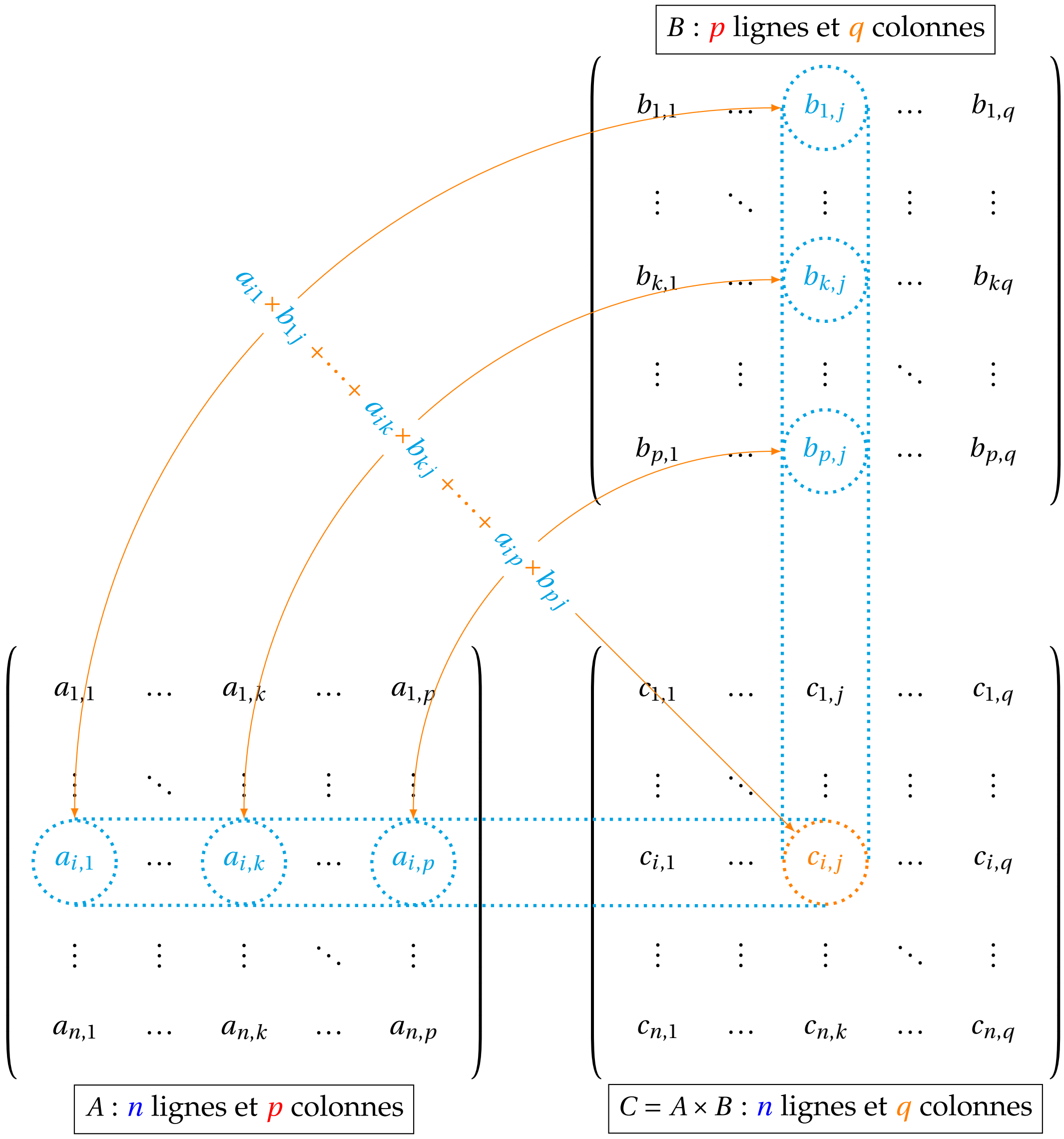
II PRODUIT MATRICIEL

1 Définition

Définition : Produit matriciel

Soient $n,p,q \in \mathbb{N}^*$. On définit $\times : \begin{array}{|lcl} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \longmapsto & C = A\times B \end{array}$ avec $\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \ \forall\, j \in [\![1,q]\!],\ \ c_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$

Calcul pratique :



Remarques

R1 – Si $L_1, \dots, L_n$ sont les lignes de A et $C_1, \dots, C_q$ les colonnes de B :
- $c_{i,j} = L_i \times C_j$.
- Les lignes de $A \times B$ sont $L_1 \times B, \dots, L_n \times B$.
- Les colonnes de $A \times B$ sont $A \times C_1, \dots, A \times C_q$.

R2 – On retiendra que la multiplication à gauche agit sur les lignes, et la multiplication à droite sur les colonnes (comme les indices).

R3 – ⚠ Il faut que les tailles soient compatibles pour multiplier des matrices.
Même si les matrices sont carrées, **le produit n'est pas commutatif** (sauf si $n = 1$!).

Exemples

E1 – $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 22 & 33 \end{pmatrix}$.

E 2 – $\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&5\\4&8\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2&4\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&2\\5&3\end{pmatrix}$.

E 3 – $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$ et plus généralement, avec des notations évidentes $(AX)_i=\sum_{j=1}^{p}a_{i,j}x_j$.

E 4 – $\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ (pas d'intégrité).

$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

E 5 – $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\8&10&12\\21&24&27\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&9\\4&10&18\\7&16&27\end{pmatrix}$

2 Propriétés

Propriétés : Produit de matrices diag., triang., triang. str.

(i) *Multiplier à gauche (respectivement à droite) par une matrice diagonale revient à multiplier les lignes (respectivement colonnes) par le cœfficient diagonal correspondant.*

(ii) $\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)\times\mathrm{diag}(b_1,\dots,b_n)=\mathrm{diag}(a_1b_1,\dots,a_nb_n)$

id est $\begin{pmatrix}a_1&&(0)\\&\ddots&\\(0)&&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&&(0)\\&\ddots&\\(0)&&b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1&&(0)\\&\ddots&\\(0)&&b_nb_n\end{pmatrix}$.

(iii) $\begin{pmatrix}a_1&&(\star)\\&\ddots&\\(0)&&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&&(\star)\\&\ddots&\\(0)&&b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1&&(\star)\\&\ddots&\\(0)&&a_nb_n\end{pmatrix}$.

(iv) $\begin{pmatrix}a_1&&(0)\\&\ddots&\\(\star)&&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&&(0)\\&\ddots&\\(\star)&&b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1&&(0)\\&\ddots&\\(\star)&&a_nb_n\end{pmatrix}$.

(v) *Si* $0\leqslant\ell\leqslant n$, $\begin{pmatrix}0&&(\star)\\&\ddots&\\(0)&&0\end{pmatrix}^{\ell}=\begin{array}{c}\leftarrow\ell\rightarrow\\ \begin{pmatrix}0&\dots&0&&(\star)\\&\ddots&&\ddots&\\&&\ddots&&0\\(0)&&&\ddots&\vdots\\&&&&0\end{pmatrix}\end{array}$

Idem avec les matrices triangulaires inférieures strictes.

Démonstration

Il suffit de poser les produits pour s'en convaincre. □

Propriétés : Bilinéarité, associativité, neutre

(i) ***Associativité*** *: Soient* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

(ii) ***Bilinéarité*** *: Soient* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

$$A \mapsto A \times B \quad \text{et} \quad B \mapsto A \times B$$

sont linéaires.

(iii) ***Neutre*** *: Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A \times I_p = I_n \times A = A$.

Démonstration

(i)

$$\begin{aligned}[A\times(B\times C)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}[B\times C]_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\left(\sum_{\ell=1}^{q} b_{k,\ell}c_{\ell,j}\right)\\ &= \sum_{\ell=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,\ell}\right)c_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{q}[A\times B]_{i,\ell}c_{\ell,j}\\ &= [(A\times B)\times C]_{i,j}\end{aligned}$$

(ii)

$$[(A+\lambda A')\times B]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p}(a_{i,k}+\lambda a'_{i,k})b_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j} + \lambda\sum_{k=1}^{p} a'_{i,k}b_{k,j} = [A\times B + \lambda A'\times B]_{i,j}.$$

idem à droite.
(iii) Multiplication par une matrice diagonale. □

Propriété : $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$

Lorsque les tailles sont compatibles,

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$$

Remarque

⚠ Les différentes $E_{\circ,\circ}$ ne vivent pas dans les mêmes espaces de matrices (ne sont pas de mêmes tailles.)

Démonstration

- **Première méthode** : poser le produit.

- **Deuxième méthode** : N étant le nombre de colonnes de $E_{i,j}$ et de lignes de $E_{k,\ell}$,

$$\begin{aligned}[E_{i,j}\times E_{k,\ell}]_{p,q} &= \sum_{m=1}^{N}[E_{i,j}]_{p,m}[E_{k,\ell}]_{m,q} = \sum_{m=1}^{N}\delta_{i,p}\delta_{j,m}\delta_{k,m}\delta_{\ell,q} = \left(\sum_{m=1}^{N}\delta_{j,m}\delta_{k,m}\right)\delta_{i,p}\delta_{\ell,q}\\ &= \left(\sum_{m=1}^{N}\delta_{j,m}\delta_{k,m}\right)[E_{i,\ell}]_{p,q}\end{aligned}$$

avec $\sum_{m=1}^{N}\delta_{j,m}\delta_{k,m}=0$ si $j\neq k$ et 1 si $j=k$. D'où le résultat. □

3 Produit par blocs

Théorème : Produit par blocs

Soient $n,m,p,q,r,s\in\mathbb{N}^*$.
Soit les matrices définies par blocs

$$M=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overset{p}{\leftrightarrow} & \overset{q}{\leftrightarrow} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\updownarrow n\\ \updownarrow m\end{array}\end{array}\in\mathcal{M}_{n+m,p+q}(\mathbb{K})\quad\text{et}\quad N=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overset{r}{\leftrightarrow} & \overset{s}{\leftrightarrow} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} E & F\\ G & H\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\updownarrow p\\ \updownarrow q\end{array}\end{array}\in\mathcal{M}_{p+q,r+s}(\mathbb{K})$$

où A,B,C,D,E,F,G,H sont des matrices de format correspondant. Alors

$$M\times N=\begin{pmatrix} AE+BG & AF+BH\\ CE+DG & CF+DH\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n+m,r+s}(\mathbb{K}).$$

Démonstration

Simple vérification. □

Remarque

Se généralise à plus de quatre blocs.

Exemple

$$\begin{pmatrix} I_n & 2I_n\\ 3I_n & 4I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A+2C & B+2D\\ 3A+4C & 3B+4D\end{pmatrix}$$

Exercice

Calculer A^n où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ 0 & 1 & & (0) \\ & & 1 & -1 \\ & (0) & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis, plus généralement, $A = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{pmatrix}$

4 La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

a Structure

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, ni commutatif ni intègre dès que $n \geqslant 2$, d'élément unité I_n. Ainsi, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une K-algèbre de dimension n^2.

Démonstration

- $\mathbb{K}$-espace vectoriel : ok.
- Anneau :
  - ⋆ $(\mathcal{M}_n(K), +)$ est un groupe abélien.
  - ⋆ $\times$ est une lci sur $\mathcal{M}_n(K)$.
  - ⋆ $\times$ est associative.
  - ⋆ $\times$ est distributive sur $+$ (par bilinéarité).
  - ⋆ I_n est neutre pour $\times$.
- Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda(M \times N) = (\lambda M) \times N = M \times (\lambda N)$ par bilinéarité.
- $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & & \\ & (0) & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & & \\ & (0) & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & & \\ & (0) & \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & & \\ & (0) & \\ & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & & \\ & (0) & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \dots & -1 \\ & & \\ & (0) & \end{pmatrix}$ non commutatif.
- $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & (0) & \\ & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & & 1 \\ & (0) & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & (0) & \\ & & \end{pmatrix}$ non intègre. □

Propriété

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b Conséquences

On peut en particulier appliquer :

Propriété : Formules du Binôme et $A^m - B^m$

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *tels que* $\boxed{A \times B = B \times A}$, $m \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

$$A^m - B^m = (A-B)\left(A^{m-1} + A^{m-2}B + \cdots + AB^{m-2} + B^{m-1}\right)$$

Exemple

Puissances de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition : Polynôme en une matrice

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d \in \mathbb{K}[X]$, on pose

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d$$

Si $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ on dit que A **annule** P ou que P est un **polynôme annulateur** de A.

Remarques

R 1 – Pratique : si P annulateur A et si S polynôme, alors la division euclidienne de S par P sonne $S = PQ + R$ et donc $S(A) = R(A)$. Il suffit de savoir calculer le reste (interpolation de Lagrange, etc.)

R 2 – Deux polynômes en A commutent.

Exercice

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet un polynôme annulateur non nul.
En effet $\left(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\right)$ possède plus d'éléments que $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc est liée.

Définition : Nilpotence

Un matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **nilpotente** lorsqu'il existe un entier k tel que $A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.
Le plus petit k vérifiant cette propriété s'appelle **indice de nilpotence** de A.

Remarque

On peut démontrer que l'indice de nilpotence est toujours $\leqslant n$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente d'indice 3.
Plus généralement, si A est triangulaire stricte, alors A est nilpotente.

c Inversion de matrices

Définition

On appelle **groupe linéaire** l'ensemble $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles (pour $\times$).

$$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A \times B = B \times A = I_n.$$

L'inverse de A est notée A^{-1}.

Remarque

N'a de sens que pour des matrices **carrées** !

Propriétés

(i) $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ *est un groupe.*

(ii) Si $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $A \times B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

(iii) Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $A^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(iv) Sont équivalentes :
- *A est inversible*
- *A est inversible à gauche*
- *A est inversible à droite*
- *les colonnes de A forment une famille libre*
- *les lignes de A forment une famille libre*

(v) Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$ *et* $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $\lambda A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.

Démonstration

(i) Groupe des inversibles.
(ii), (iii) et (v) Facile voire connu.
(iv) Admis provisoirement. □

Calcul pratique : Pour démontrer l'inversibilité d'une matrice et calculer son inverse, on peut :

- Résoudre le système $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$: il admet une unique solution si et seulement si A est inversible et alors on obtient $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Exemple

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- En effectuant des opérations élémentaires (pivot de Gauss) :
  - ⋆ soit exclusivement sur les lignes,
  - ⋆ soit exclusivement sur les colonnes,

  se ramener à I_n et effectuer les mêmes opérations simultanément en partant de I_n qui va devenir A^{-1} si A est inversible.

Exemple

On reprend le même, sur les lignes puis sur les colonnes.

d Inversibilité des matrices triangulaires

Propriété

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si aucun de ses cœfficients diagonaux n'est nul, et alors son inverse est encore triangulaire, d'éléments diagonaux l'inverse des éléments diagonaux.

$$\begin{pmatrix} a_1 & \star & \dots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & a_n \end{pmatrix} \text{ est inversible } \iff \forall\, i \in [\![1, n]\!],\quad a_i \neq 0$$

et alors

$$\begin{pmatrix} a_1 & \star & \dots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & \star & \dots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

(idem pour les matrices triangulaires inférieures.)

Remarque

Dans ce cas, on a même

$$\forall\, k \in \mathbb{Z},\quad \begin{pmatrix} a_1 & \star & \dots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & a_n \end{pmatrix}^{k} = \begin{pmatrix} a_1^{k} & \star & \dots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & a_n^{k} \end{pmatrix}$$

Démonstration

- Si tous les cœfficients diagonaux sont non nuls, les colonnes de A sont facilement libres donc A est inversible.
- Supposons qu'un cœfficient soit nul, soit a_k celui d'indice minimal.
  Alors $C_1, \dots, C_{k-1}$ forment une famille facilement libre donc une base $\mathbb{K}^{k-1} \times \{0\}^{n+1-k}$ et comme $C_k \in \mathbb{K}^{k-1} \times \{0\}^{n+1-k}$ car $a_k = 0$, les colonnes de A forment une famille liée et donc A n'est pas inversible.

Ensuite, la résolution du système triangulaire $y = Ax$ permet d'exprimer chaque x_k en fonction de $y_k, y_{k+1}, \dots, y_n$, le cœfficient devant y_k étant bien a_k^{-1}. D'où la forme voulue pour A^{-1}. □

Corollaire

$$\begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix} \text{ est inversible } \iff \forall\, i \in [\![1, n]\!],\quad a_i \neq 0$$

et alors

$$\begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

III Transposition

1 Définition

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle **transposée** de A la matrice ${}^tA = A^\intercal \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall\, (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!],\quad \left(A^\intercal\right)_{i,j} = \left({}^tA\right)_{i,j} = (A)_{j,i}$$

Remarques

R1 – ${}^tA$ notation française. $A^\intercal$ notation anglo-saxonne, donc internationale. Il faut connaître les deux, mais il semble qu'au concours la première soit plus courante.

R2 – La i^{e} ligne de A est la i^{e} colonne de $A^\intercal$.
On obtient $A^\intercal$ à partir de A par symétrie d'axe $i = j$ ie la diagonale.

Exemples

E1 – $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ donc $A^\intercal = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

E2 – $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

2 Propriétés

Propriétés

Soit $T : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^\intercal \end{array} \right.$

(i) ***Linéarité** : Si $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$(A+B)^\intercal = A^\intercal + B^\intercal \quad \text{et} \quad (\lambda A)^\intercal = \lambda A^\intercal$$

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \quad \text{et} \quad {}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$$

(ii) *T est **involutif** : si $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,*

$$\left(A^\intercal\right)^\intercal = A$$

$${}^t\left({}^tA\right) = A$$

En particulier T est une bijection.

(iii) *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,*

$$(A \times B)^\intercal = B^\intercal \times A^\intercal$$

$${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$$

(iv) *$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $A^\intercal \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et dans ce cas*

$$\left(A^\intercal\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\intercal$$

$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right) = {}^tA^{-1} \textit{(pratique !!!)}$$

3 Matrices symétriques et anti-symétriques

Définition

(i) On dit que $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **symétrique** lorsque $S^\intercal = S$ ie $\forall\, i, j \in [\![1, n]\!], \quad s_{i,j} = s_{j,i}$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid S^\intercal = S\}$.

(ii) On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **antisymétrique** lorsque $A^\intercal = -A$ ie $\forall\, i, j \in [\![1, n]\!], \quad a_{j,i} = -a_{i,j}$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^\intercal = -A\}$.

Exemple

$$S=\begin{pmatrix}1&4&6\\4&2&5\\6&5&3\end{pmatrix} \text{ et } A=\begin{pmatrix}0&1&3\\-1&0&2\\-3&-2&0\end{pmatrix}.$$

Remarque

La diagonale d'une matrice antisymétrique est nécessairement nulle.

Propriété

$\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
De plus, $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration

- **Preuve 1** : $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des parties non vides de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ stables par combinaisons linéaires, donc des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
  - ⋆ **Analyse** : Si $M = S + A$ avec des notations évidentes, $M^\intercal = S - A$ donc $S = \frac{1}{2}(M+M^\intercal)$ et $A = \frac{1}{2}(M-M^\intercal)$.
  - ⋆ **Synthèse** : On a bien $M = \frac{1}{2}(M+M^\intercal) + \frac{1}{2}(M-M^\intercal)$, $\left(\frac{1}{2}(M+M^\intercal)\right)^\intercal = \frac{1}{2}(M+M^\intercal)$ et $\left(\frac{1}{2}(M-M^\intercal)\right)^\intercal = -\frac{1}{2}(M-M^\intercal)$.

  D'où l'existence et l'unicité.
- **Preuve 2** :
  - ⋆ $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(\{E_{i,i}\ ;\ 1\leqslant i\leqslant n\}\cup\{E_{i,j}+E_{j,i}\ ;\ 1\leqslant i<j\leqslant n\}\right)$, la famille correspondante étant facilement libre, donc $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
  - ⋆ $\mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(E_{i,j}-E_{j,i}\right)_{1\leqslant i<j\leqslant n}$, la famille correspondante étant facilement libre, donc $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
  - ⋆ Ainsi $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) + \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
  - ⋆ De plus, $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\}$

□

Remarque

L'inverse d'une matrice (inversible) (anti)symétrique l'est encore, mais c'est faux pour le produit en général.

IV TRACE D'UNE MATRICE CARRÉE

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A le scalaire $\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Propriétés

(i) ***Linéarité*** *: Si* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}\,A + \mathrm{tr}\,B$ *et* $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{tr}\,A$.

(ii) *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

⚠ $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA) \neq \mathrm{tr}(BAC)$ en général. (Permutations circulaires seulement).

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathrm{tr}(ABC) = 2 \neq 1 = \mathrm{tr}(BAC)$.