Fractions rationnelles

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
h) Fractions rationnelles	
Corps $\mathbb{K}(X)$.	La construction de $\mathbb{K}(X)$ n'est pas exigible.
Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle.	
Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.	
i) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$	
Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.	La démonstration est hors programme. On évitera toute technicité excessive. La division selon les puissances croissantes est hors programme.
Si λ est un pôle simple, coefficient de $\dfrac{1}{X-\lambda}$.	
Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.	

TABLE DES MATIÈRES

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (voire éventuellement $\mathbb{Q}$. En fait tout corps convient, mais pour certaines propriétés, on a besoin qu'il soit de caractéristique nulle, c'est-à-dire tel que $n_{\mathbb{K}} = n \cdot 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} + \cdots + 1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ convient.)

1 Définition

On définit sur $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ la relation d'équivalence

$$(A,B) \sim (C,D) \iff AD = BC.$$

Le classe d'équivalence de (A,B) est notée $\frac{A}{B}$ de telle sorte que

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC.$$

(Comme pour $\mathbb{Q}$).

Définition

On parle de **fraction rationnelle** et on note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble quotient :

$$\mathbb{K}(X) = \left\{ \frac{A}{B} \ ; \ (A,B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}) \right\}.$$

Si $F \in \mathbb{K}(X)$ et $(A,B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ tel que $F = \frac{A}{B}$, on dit que (A,B) est un représentant de la fraction rationnelle F.

Définition : Opérations sur $\mathbb{K}(X)$

Si $F, G \in \mathbb{K}(X)$, $A, B, C, D \in \mathbb{K}[X]$ tels que $F = \frac{A}{B}$ et $G = \frac{C}{D}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose

- $F + G = \frac{A}{B} + \frac{C}{D} \overset{\text{def}}{=} \frac{AD + BC}{BD}$
- $F \times G = \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} \overset{\text{def}}{=} \frac{AC}{BD}$
- $\lambda F = \lambda \frac{A}{B} \overset{\text{def}}{=} \frac{\lambda A}{B}$

Pour que ces définitions soient cohérentes, il faut démontrer que les opérations ne dépendent pas des choix des représentants de F et G.

Par exemple, si $F = \frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1}$, a-t-on $\frac{AD+BC}{BD} = \frac{A_1 D + B_1 C}{B_1 D}$?

$(AD+BC)B_1 D = AB_1 D^2 + BB_1 CD = A_1 BD^2 + BB_1 CD = (A_1 D + B_1 C)BD$. Oui. Idem pour les autres.

Propriété : Le corps et l'algèbre $\mathbb{K}(X)$

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ *est un corps commutatif appelé corps des fractions rationnelles.*
$(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie.*
$(\mathbb{K}(X), +, \times, \cdot)$ *est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.*

Démonstration

On vérifie que $(\mathbb{K}(X), +)$ est un groupe abélien, d'élément neutre $\frac{0}{1}$ noté 0, que $(\mathbb{K}(X) \setminus \{0\}, \times)$ groupe commutatif d'élément neutre $\frac{1}{1}$ noté 1, avec, si $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X) \setminus \{0\}$, $F^{-1} = \frac{B}{A}$, et $\times$ est distributive sur $+$, ainsi que toutes les propriétés nécessaires pour avoir une $\mathbb{K}$-algèbre. □

Remarque

On définit aussi la composée de deux fractions rationnelles $F(G) = \frac{A(G)}{B(G)} = A(G)(B(G))^{-1}$, lorsque cela a un sens.

2 Plongement de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$

L'application $\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \dfrac{P}{1} \end{array} \right.$ est un morphisme d'anneaux injectif (et même mieux, compatibilité avec $\cdot$, la dérivée, la composée, etc).

Pour l'injectivité, on a $P \in \operatorname{Ker}\psi \Longleftrightarrow \dfrac{P}{1} = \dfrac{0}{1} \Longleftrightarrow P = 0$.

On peut donc confondre polynôme P et fraction rationnelle $\dfrac{P}{1}$.

3 Dérivée d'une fraction rationnelle

Définition : Fraction rationnelle dérivée

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tel que $F = \dfrac{A}{B}$. On appelle **fraction rationnelle dérivée** de F la fraction rationnelle $F' = \dfrac{A'B - AB'}{B^2}$.

Remarque

On vérifie de nouveau que cette notion de dépend pas du choix du représentant et qu'elle coïncide avec la dérivée polynomiale lorsque la fraction rationnelle est un polynôme.

4 Degré d'une fraction rationnelle

Définition : Degré

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tel que $F = \dfrac{A}{B}$.
On définit le **degré** de F par $\deg F = \deg A - \deg B \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Remarque

On vérifie de nouveau que cette notion de dépend pas du choix du représentant et qu'elle coïncide avec la dérivée polynomiale lorsque la fraction rationnelle est un polynôme.

Propriété

Soient $F, G \in \mathbb{K}(X)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(i) $\deg(\alpha F + \beta G) \leqslant \max(\deg F, \deg G)$.

(ii) $\deg(F \times G) = \deg F + \deg G$.

(iii) *Si* $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\deg(\lambda F) = \deg F$.

(iv) $\deg F' \leqslant \deg F - 1$.

Démonstration

Par exemple, pour (i), si $F = \dfrac{A}{B}$ et $G = \dfrac{C}{D}$,

$$\begin{aligned} \deg(\alpha F + \beta G) &= \deg(\alpha AD + \beta BC) - \deg(BD) \\ &\leqslant \max(\deg A + \deg D, \deg B + \deg C) - \deg B - \deg D \\ &= \max(\deg A - \deg B, \deg C - \deg D) = \max(\deg F, \deg G). \quad \square \end{aligned}$$

Remarque

Pas de formule générale pour $\deg(F \circ G)$. On peut avoir $\deg F' < \deg F - 1$ sans que $F' = 0$. Exemple : $F = \dfrac{X}{X+1}$.

Exercice

Montrer que $\deg F' < \deg F - 1$ si et seulement si $\deg F = 0$.

5 Forme irréductible

Propriété

Toute fraction rationnelle $F \in \mathbb{K}(X)$ s'écrit de manière unique sous la forme $F = \dfrac{A}{B}$ avec $A, B \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux et B unitaire. On parle de ***forme irréductible de*** *F.*

Démonstration

Comme pour $\mathbb{Q}$. □

Exemple

$$F = \frac{X^n - 1}{3(X^2 - 1)}.$$

6 Racines et pôles

Définition : Racines et pôles

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $F = \dfrac{A}{B}$ sous forme irréductible.
On appelle **racine d'ordre** m de F toute racine de A d'ordre m.
On appelle **pôle d'ordre** m de F toute racine de B d'ordre m.

Exemple

$$F = \frac{X^2 + X + 1}{(X^2+1)^2}.$$

Remarque

Si F n'est pas sous forme irréductible, il faut faire la différence des ordres au numérateur et au dénominateur. Si c'est positif, c'est une racine, sinon c'est un pôle.

7 Fonctions rationnelles

Définition : Fonction rationnelle associée

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ sous forme irréductible.
On définit la **fonction rationnelle associée à** F par

$$\tilde{F} : \left| \begin{array}{ccc} D_F & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \frac{\tilde{A}(x)}{\tilde{B}(x)} \end{array} \right.$$

définie sur $D_F = \mathbb{K} \setminus \{\text{pôles de } F\}$.

Propriété

Si $F, G \in \mathbb{K}(X)$ et $\tilde{F}(x) = \tilde{G}(x)$ pour une infinité de $x \in \mathbb{K}$, alors $F = G$.

Démonstration

Avec $F = \frac{A}{B}$ et $G = \frac{C}{D}$, $AD - BC$ a une infinité de racines et est donc le polynôme nul. D'où $F = G$. □

8 Décomposition en éléments simples

a Partie entière

Définition - Propriété

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. On note $\mathbb{K}^-(X) = \{F \in \mathbb{K}(X) \mid \deg F < 0\}$. Il existe un unique couple $(Q, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}^-(X)$ tel que $F = Q + G$. Q est appelé **partie entière** de F.

Démonstration

L'existence provient de la division euclidienne.
Si (Q, G) et (Q_1, G_1) conviennent, $Q_1 - Q = G - G_1 \in \mathbb{K}[X] \cap \mathbb{K}^-(X) = \{0\}$ donc $Q_1 = Q$ puis $G_1 = G$. □

Remarques

R 1 – La partie entière est le quotient de la division euclidienne du numérateur par la dénominateur.

R 2 – C'est l'analogue de la partie entière sur $\mathbb{Q}$.

R 3 – Si $\deg F < 0$, alors sa partie entière est nulle.

R 4 – Si $F \in \mathbb{K}[X]$, sa partie entière est F elle-même.

R 5 – $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}^-(X)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}(X)$.

Exemple

$F = \frac{X^2 + X}{X + 2} = X - 1 + \frac{2}{X + 2}$.

b Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Théorème : Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$, $F = \dfrac{A}{B}$ sous forme irréductible, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ pôles de F d'ordre $m_1, \dots, m_n$: $F = \dfrac{A}{\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)^{m_k}}$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ la partie entière de F.
Alors il existe une unique famille $(\lambda_{k,j})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m_k}}$ de nombres complexes telle que

$$F = \underbrace{Q}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\frac{\lambda_{1,1}}{X-\alpha_1} + \dots + \frac{\lambda_{1,m_1}}{(X-\alpha_1)^{m_1}}}_{\text{partie polaire associée à } \alpha_1} + \dots + \underbrace{\frac{\lambda_{n,1}}{X-\alpha_n} + \dots + \frac{\lambda_{n,m_n}}{(X-\alpha_n)^{m_n}}}_{\text{partie polaire associée à } \alpha_n}$$

Démonstration

Admis. □

Remarque

Les $\dfrac{1}{(X-a)^n}$ pour $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ forment une base de $\mathbb{C}^-(X)$.

Propriété : Partie polaire relative à un pôle simple

Si α pôle simple de $F = \dfrac{A}{B}$ sous forme irréductible, $\dfrac{\lambda}{X-\alpha}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ la partie polaire associée à α. Alors $F = \dfrac{A}{(X-\alpha)B_1}$ avec $B_1(\alpha) \neq 0$ et

$$\lambda = [\widetilde{(X-\alpha)F}](\alpha) = \frac{A(\alpha)}{B_1(\alpha)} = \frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}.$$

Démonstration

- $F = \frac{\lambda}{X-\alpha} + G$ avec G n'admettant pas α comme pôle. Alors $(X-\alpha)F = \lambda + (X-\alpha)G$ puis on évalue en α.
- $B = (X-\alpha)B_1$ donc $B' = B_1 + (X-\alpha)B_1'$ donc $B_1(\alpha) = B'(\alpha)$.

□

Exemples

E 1 – $F = \dfrac{1}{(X-1)(X+2)} = \dfrac{-1/3}{X-1} + \dfrac{-1}{X+2}$.

E 2 – *Très classique*

$F = \dfrac{1}{X^n - 1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X-\omega_k}$ avec $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ et $\lambda_k = \dfrac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \dfrac{\omega_k}{n}$.

Ainsi, $F = \dfrac{1}{X^n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k/n}{X-\omega_k}$

Propriété : Partie polaire relative à un pôle d'ordre $\geqslant 2$

Si α pôle d'ordre $m \geqslant 2$ de $F = \dfrac{A}{B}$ sous forme irréductible,

$$F = \frac{A}{B} = \frac{A}{(X-\alpha)^m B_1} = \frac{\lambda_1}{X-\alpha} + \dots + \frac{\lambda_m}{(X-\alpha)^m} + G$$

où $B_1(\alpha) \neq 0$ et α n'est pas pôle de G.

Alors $\lambda_m = [\widetilde{(X-\alpha)^m F}](\alpha) = \dfrac{A(\alpha)}{B_1(\alpha)}$ et $F - \dfrac{\lambda_m}{(X-\alpha)^m}$ admet α comme pôle d'ordre au plus $m-1$ ce qui permet de réitérer le processus.

Remarque

Lorsqu'il reste peu de cœfficients à calculer, on peut aussi essayer d'évaluer la fraction rationnelle en des points bien choisis ou utiliser des méthodes d'analyse réelle (limite en ∞ de $x^m F(x)$...)

Exemple

$$F = \frac{2X+1}{X^3-2X^2+X} = \frac{2X+1}{(X-1)^2 X} = 0 + \frac{-1}{X-1} + \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{1}{X}.$$

Remarque

Exploiter la parité !

Exemple

$$F = \frac{X}{\left(X^2-1\right)^2} = \frac{1/4}{(X-1)^2} - \frac{1/4}{(X+1)^2}$$

c Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Théorème : Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$, $F = \dfrac{A}{B}$ sous forme irréductible, avec la décomposition de B en facteur irréductibles dans $\mathbb{R}$: $F = \dfrac{A}{\prod\limits_{k=1}^{p}(X-x_k)^{m_k}\prod\limits_{i=1}^{r}\left(X^2+p_iX+q_i\right)^{n_i}}$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ la partie entière de F.

Alors il existe d'uniques familles $\left(\lambda_{k,j}\right)_{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant m_k}}$, $\left(\mu_{i,\ell}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant \ell\leqslant n_i}}$ et $\left(\nu_{i,\ell}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant \ell\leqslant n_i}}$ de nombres réels tels que

$$F = \underbrace{Q}_{\text{partie entière}} + \sum_{k=1}^{p} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m_k} \overbrace{\frac{\lambda_{k,j}}{(X-x_k)^j}}^{\substack{\text{élément simple}\\ \text{de 1}^{\text{e}}\text{ espèce}}}\right)}_{\text{partie polaire associée à } x_k} + \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^{n_i} \overbrace{\frac{\mu_{i,\ell}X+\nu_{i,\ell}}{\left(X^2+p_iX+q_i\right)^{\ell}}}^{\substack{\text{élément simple}\\ \text{de 2}^{\text{e}}\text{ espèce}}}\right)}_{\text{partie polaire associée à } X^2+p_iX+q_i}.$$

Démonstration

Admis. □

Remarques

R1 – Les $\dfrac{1}{(X-a)^n}$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et les $\dfrac{1}{(X^2+pX+q)^n}$ pour $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $p^2 < 4q$ et $n \in \mathbb{N}^*$ forment une base de

$\mathbb{R}^-(X)$.

R 2 – Les méthode vues dans $\mathbb{C}$ s'appliquent pour les pôles réels. Pour les μ et ν, on peut appliquer la méthode « du cache » en α racine complexe de X^2+pX+q.
On peut aussi décomposer dans $\mathbb{C}$ et rassembler les pôles complexes non réels et leur conjugué. L'écriture $F=\overline{F}$ et l'unicité des cœfficients donne des relations entre ceux-ci (comme avec la parité).

Exemples

E 1 – $F=\dfrac{X^3-1}{X^3+X}=1-\dfrac{1}{X}+\dfrac{X-1}{X^2+1}$ soit directement, en évaluant en i, soit en passant par $\mathbb{C}$.

E 2 – $F=\dfrac{X^3}{(X-1)^3(X+2)}=\dfrac{19/27}{X-1}+\dfrac{8/9}{(X-1)^2}+\dfrac{1/3}{(X-1)^3}+\dfrac{8/27}{X+2}$ de plusieurs façons, dont divisions euclidiennes successives du numérateur de $F-\dfrac{8/27}{X+2}$ par $X-1$.

E 3 – $F=\dfrac{2X^2}{(X^2+1)^3}=\dfrac{2}{(X^2+1)^2}-\dfrac{2}{(X^2+1)^3}$ en posant $Y=X^2$ ou avec du ± 1.

d Décomposition en éléments simples de P'/P

Propriété : Décomposition en éléments simples de P'/P

*Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ **scindé**, $P=\lambda\prod_{k=1}^{p}(X-x_k)^{m_k}$. Alors la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ est donnée par $\dfrac{P'}{P}=\sum_{k=1}^{p}\dfrac{m_k}{X-x_k}$.*

*Variante : si $P=\lambda\prod_{k=1}^{n}(X-y_k)$ où les y_k sont les racines **comptées avec multiplicité**, alors $\dfrac{P'}{P}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{X-y_k}$.*

Démonstration

Il suffit d'écrire P' directement. □

Remarque

En considérant les ordres, on voit facilement que $\dfrac{P'}{P}$ n'a que des pôles simples.

Exemple

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\frac{1}{2-\omega}=\frac{n2^{n-1}}{2^n-1}.$$