Espaces vectoriels

Extrait du programme officiel :

A - Espaces vectoriels

Dans tout le cours d'algèbre linéaire, le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Les objectifs du chapitre « Espaces vectoriels » sont les suivants :
- *acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire ;*
- *définir la notion de dimension, qui interprète le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; il convient d'insister sur les méthodes de calcul de dimension, de faire apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentations : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires ;*

Il convient de souligner, à l'aide de nombreuses figures, comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à la dimension quelconque.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$.
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels.	
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$.
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Sous-espaces $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	
Sous-espace vectoriel engendré par une partie X.	Notations $\mathrm{Vect}(X)$, $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace contenant X contient $\mathrm{Vect}(X)$.
c) Familles de vecteurs	
Familles et parties génératrices.	
Familles et parties libres, liées.	
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Somme d'un nombre fini de sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	
Somme d'un nombre fini de sous-espaces.	
Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces. Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.	La somme $F_1+\cdots+F_p$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F_1+\cdots+F_p$ sous la forme $x_1+\cdots+x_p$ avec $x_i \in F_i$ est unique.

B - Espaces de dimension finie

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\dots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\dots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice on peut extraire une base. Théorème de la base incomplète : toute famille libre peut être complétée en une base.
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimensions de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
En dimension n, une famille de n vecteurs est une base si et seulement si elle est libre, si et seulement si elle est génératrice.	
Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	Sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire.	Dimension commune des supplémentaires.
Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe d'un nombre fini de sous-espaces.	
Dimension d'une somme de deux sous-espaces; formule de Grassmann. Caractérisation des couples de sous-espaces supplémentaires.	
Si $F_1,\dots,F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors : $\dim \sum_{i=1}^{p} F_i \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.	

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ au programme).

I Structure d'espace vectoriel

1 Définition

Définition : Loi de composition externe

Soit E un ensemble et $\mathbb{K}$ un corps. On appelle **loi de composition externe** sur E toute application

$$\cdot : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda\cdot x \end{array}\right.$$

Définition : $\mathbb{K}$-espace vectoriel

On appelle **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** ou **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** tout triplet $(E,+,\cdot)$ tel que

- E est un ensemble, $+$ est une loi de composition interne sur E et $\cdot$ est une loi de composition externe sur E.
- $(E,+)$ est un groupe abélien d'élément neutre noté $\vec{0}$ ou 0_E.
- *Pseudo-distributivité à droite* :
$$\forall\, \lambda,\mu\in\mathbb{K},\quad \forall\, \vec{x}\in E,\quad (\lambda+\mu)\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x}.$$
- *Pseudo-distributivité à gauche* :
$$\forall\, \lambda\in\mathbb{K},\quad \forall\, \vec{x},\vec{y}\in E,\quad \lambda\cdot\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=\lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}.$$
- *Pseudo-associativité* :
$$\forall\, \lambda,\mu\in\mathbb{K},\quad \forall\, \vec{x}\in E,\quad (\lambda\times\mu)\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\left(\mu\cdot\vec{x}\right).$$
- *Pseudo-élément neutre* : $\forall\, \vec{x}\in E,\quad 1_{\mathbb{K}}\cdot\vec{x}=\vec{x}.$

Remarques

R1 – Les éléments de E s'appellent **vecteurs** (et ne se notent pas nécessairement avec des flèches) et les éléments de $\mathbb{K}$ sont les **scalaires**.

R2 – Un espace vectoriel n'est jamais vide $\vec{0}\in E$. Si $\mathbb{K}$ est infini et si $E\neq\{\vec{0}\}$, alors E est infini.

Exemple

Les vecteurs du plan ou de l'espace forment des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Définition : Famille presque nulle, combinaison linéaire

On appelle **famille presque nulle** de scalaire tout famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $\lambda_i \neq 0$ pour un nombre fini de vecteurs seulement. On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles de scalaires presque nulles.

Si $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$ sont des vecteurs de E, on appelle **combinaison linéaire** de $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$, tout vecteur de la forme $\lambda_1\vec{x}_1+\cdots+\lambda_n\vec{x}_n$ où $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$.

La définition s'étend aux familles infinies de vecteurs en n'ayant qu'un nombre fini de scalaires non nuls : toute combinaison linéaire est nécessairement finie (d'où l'intérêt des familles presque nulles de scalaires).

Si $\mathscr{F}=(\vec{x}_i)_{i\in I}$, les combinaisons linéaires d'éléments de $\mathscr{F}$ sont les $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i\vec{x}_i$ où $(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^{(I)}$.

Propriété : Stabilité par combinaison linéaire

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est stable par combinaisons linéaires : toute combinaison linéaire de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est encore dans E.

Propriété : Produit cartésien de $\mathbb{K}$-ev

Si $\left(E,\underset{E}{+},\underset{E}{\cdot}\right)$ et $\left(F,\underset{F}{+},\underset{F}{\cdot}\right)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors $(E\times F,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec les lois coordonnée à coordonnée : si $\lambda\in\mathbb{K}$ et $(\vec{x},\vec{y}),(\vec{x}',\vec{y}')\in E\times F$,

$$(\vec{x},\vec{y})+(\vec{x}',\vec{y}')=\left(\vec{x}\underset{E}{+}\vec{x}',\vec{y}\underset{F}{+}\vec{y}'\right)$$

$$\lambda\cdot(\vec{x},\vec{y})=\left(\lambda\underset{E}{\cdot}\vec{x},\lambda\underset{F}{\cdot}\vec{y}\right)$$

Remarque

Se généralise, par récurrence, au produit de n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E_1\times\cdots\times E_n$.

Démonstration

Les propriétés sont héritées directement de celles de E et de F : il suffit de les écrire.
On a en particulier $0_{E\times F}=(0_E,0_F)$. □

Propriété : Fonctions à valeurs dans un $\mathbb{K}$-ev

Si X est un ensemble non vide et $\left(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{\cdot}\right)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $(F^X, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec les lois habituelles sur les fonctions : si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in F^X$, alors

$$f + g : x \mapsto f(x) \underset{F}{+} g(x)$$

$$\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda \underset{F}{\cdot} f(x)$$

Démonstration

De nouveau, les propriétés sont héritées directement de celles de F : il suffit de les écrire. On a en particulier 0_{F^X} est la fonction constamment égale à 0_F. □

Propriété : Espaces vectoriels classiques

Sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

- $(\mathbb{K}, +, \times)$,
- $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
- $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$,
- $(\mathbb{K}^X, +, \cdot)$ *pour tout ensemble* X,
- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$,
- $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$.

$(\mathbb{C}, +, \times)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel, et, plus généralement, si* $\mathbb{K}$ *est un sous-corps de* $\mathbb{L}$*, alors* $(\mathbb{L}, +, \times)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

2 Premières propriétés

Propriétés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $\vec{x}, \vec{y} \in E$.

(i) $\lambda \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} - \lambda \cdot \vec{y}$.

(ii) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

(iii) $(\lambda - \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} - \mu \cdot \vec{x}$.

(iv) $0_{\mathbb{K}} \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

(v) $\lambda \cdot (-\vec{x}) = -\lambda \cdot \vec{x} = (-\lambda) \cdot \vec{x}$.

(vi) $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0} \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } \vec{x} = \vec{0}$.

Démonstration

(i) $\lambda \vec{x} = \lambda(\vec{x} - \vec{y} + \vec{y}) = \lambda(\vec{x} - \vec{y}) + \lambda \vec{y}$.

(ii) $\lambda \vec{0} = \lambda(\vec{x} - \vec{x}) = \lambda \vec{x} - \lambda \vec{x} = \vec{0}$.

(iii) $\lambda \vec{x} = (\lambda - \mu + \mu)\vec{x} = (\lambda - \mu)\vec{x} + \mu \vec{x}$.

(iv) $0_{\mathbb{K}} \cdot \vec{x} = (\lambda - \lambda)\vec{x} = \lambda \vec{x} - \lambda \vec{x} = \vec{0}$.

(v) $\vec{0} = 0_{\mathbb{K}} \vec{x} = (\lambda - \lambda)\vec{x} = \lambda \vec{x} + (-\lambda)\vec{x}$
et $\vec{0} = \lambda \vec{0} = \lambda(\vec{x} - \vec{x}) = \lambda \vec{x} + \lambda(-\vec{x})$.

(vi) ($\Leftarrow$) déjà vu et ($\Rightarrow$) : si $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$ et $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors λ est inversible et $\vec{0} = \lambda^{-1}(\lambda \vec{x}) = (\lambda^{-1}\lambda)\vec{x} = \vec{x}$. □

3 Sous-espace vectoriel

Définition : Sous-espace vectoriel

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E.

On dit que $(F,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de E lorsque $\left(F,+_{|F^2},\cdot_{|\mathbb{K}\times F}\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété : Caractérisation des sous-espaces vectoriels

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff \begin{cases} F \neq \varnothing \ (0_E \in F) \\ \forall \vec{x},\vec{y} \in F, \quad \vec{x}+\vec{y} \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{x} \in F, \quad \lambda \vec{x} \in F \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F \neq \varnothing \ (0_E \in F) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{x},\vec{y} \in F, \quad \vec{x}+\lambda\vec{y} \in F \\ (F \text{ stable par combin. linéaires}) \end{cases}$$

Démonstration

Comme pour les sous-groupes et les sous-anneaux : les propriétés sont hérités de celles sur E, seule la stabilité de F par combinaisons linéaires est nécessaire. □

Exemples

E1 – $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E appelés **sous-espaces triviaux** de E.

E2 – $\mathscr{C}^k(X,\mathbb{K})$, $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^X$.

E3 – $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y-4z=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$: c'est un plan vectoriel.

Remarque

Représentation des sous-espaces vectoriels : On représente les sous-espaces en petite dimension par des points, plans ou droites. Ils contiennent les extrémités des vecteurs dont l'origine est toujours prise au même point (représentant $\vec{0}$). Le seul point est $\vec{0}$.

Propriété : Les sous-espaces vectoriels $\mathbb{K}_n[X]$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

C'est en effet une partie non vide de $\mathbb{K}[X]$ stable par combinaison linéaire. □

4 Intersection de sous-espace vectoriel

Propriété : Intersection de sous-espaces vectoriels

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

C'est en effet une partie non vide de E (continent 0_E) stable par combinaison linéaire (car les F_i le sont). □

Remarque

$\boxed{F\cup G \text{ est un sous-espace de } E \text{ si et seulement si } F\subset G \text{ ou } G\subset F.}$

Si $F\cup G$ est un sous-espace de E et si $F\not\subset G$, alors on a $\vec{x}\in F$ tel que $\vec{x}\notin G$ et si $\vec{y}\in G$, $\vec{x}+\vec{y}\in F\cup G$ car sous-espace et comme $\vec{x}=(\vec{x}+\vec{y})-\vec{y}\notin G$, $\vec{x}+\vec{y}\notin G$ donc $\vec{x}+\vec{y}\in F$ et $\vec{y}=(\vec{x}+\vec{y})-\vec{x}\in F$ donc $G\subset F$.

5 Sous-espaces vectoriel engendré par une partie

Définition : Sous-espaces vectoriel engendré par une partie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $A\subset E$.

On appelle **sous-espace vectoriel engendré** par A le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

On le note $\operatorname{Vect} A$ ou $\operatorname{Vect}_{\mathbb{K}} A$.

Si $F=\operatorname{Vect} A$, on dit que A **engendre** F ou que F est une **partie génératrice** de F.

Remarques

R1 – On définit aussi, pour une famille $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ de vecteurs, $\operatorname{Vect}(\vec{x}_i)_{i\in I}=\operatorname{Vect}\{\vec{x}_i\ ;\ i\in I\}$.

R2 – $\operatorname{Vect}\varnothing=\{\vec{0}_E\}$.

Propriété : Caractérisation d'un Vect

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $A \subset E$.

(i) $\operatorname{Vect} A = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subset F}} F$.

(ii) $\operatorname{Vect} A$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de* A *:*

$$\operatorname{Vect} A = \left\{\lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in A, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\right\}.$$

Démonstration

(i) $\bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subset F}} F$ est bien un sous-espace vectoriel contenant A.

Réciproquement, si F est un sous-espace vectoriel contenant A alors il contient $\bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subset F}} F$.

Il s'agit bien du plus petit sus-espace vectoriel contenant A.

(ii) On vérifie facilement que $\{\lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in A, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$ est un sous-espace vectoriel contenant A par caractérisation.

Réciproquement, tout sous-espace vectoriel contenant A contient nécessairement $\{\lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in A, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$. □

Remarque

Si A est finie, $A = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$, alors

$$\operatorname{Vect} A = \operatorname{Vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p) = \left\{\sum_{i=0}^{p} \lambda_i \vec{x}_i \ ; \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\right\} = \mathbb{K}\vec{x}_1 + \cdots + \mathbb{K}\vec{x}_p.$$

Exemples

E1 – Dans $\mathbb{R}^2$, $\operatorname{Vect}(1,1) = \operatorname{Vect}\big((1,1)\big) = \operatorname{Vect}\{(1,1)\} = \{(x,x) \ ; \ x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(1,1)$: on parle de **droite vectorielle** engendrée par $(1,1)$.

E2 – $\mathbb{R}^2$ est engendré par $\big((0,1),(1,0)\big)$.

E3 – Dans $\mathbb{R}^3$, $\vec{u} = (1,2,1)$ et $\vec{v} = (-1,0,3)$, $P = \operatorname{Vect}(u,v) = \left\{(\lambda-\mu, 2\lambda, \lambda+3\mu) \ ; \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Il s'agit d'un **plan vectoriel**.

Il faut savoir passer de famille génératrice à équation : on résout le système :

$$\begin{cases} \lambda - \mu = x \\ 2\lambda = y \\ \lambda + 3\mu = z \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = y/2 \\ \mu = -x + y/2 \\ z = 2y - 3x \end{cases}$$

Donc $P = \left\{(\lambda-\mu, 2\lambda, \lambda+3\mu) \ ; \ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(x,y,z) \ ; \ 3x-2y+z=0\right\}$.
On dit que $3x-2y+z=0$ est une **équation** de P.

E4 – Il faut savoir passer d'équation à famille génératrice :
Soit $P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 2x-y+3z=0\right\}$.

$(x,y,z)\in P \Longleftrightarrow (x,y,z)=x(1,2,0)+z(0,3,1)$ donc $P=\mathrm{Vect}\big((1,2,0),(0,3,1)\big)$.

E5 – Équations de $D=\mathrm{Vect}(1,2,3)$ et vecteur générateur de $D'=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 4y-z=0 \text{ et } x-2y+3z=0\big\}$.

E6 – $\big\{x\mapsto ax+bx^2\ ;\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\big\}=\mathrm{Vect}\big(\mathrm{id},x\mapsto x^2\big)$.
$\big\{x\mapsto a\cos x+b\sin x+c\mathrm{e}^x\ ;\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\big\}=\mathrm{Vect}\big(\cos,\sin,\exp\big)$.

E7 – $\mathbb{C}=\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(1)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1,\mathrm{i})$.

E8 – $\mathbb{K}_n[X]=\mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^n)$ et $\mathbb{K}[X]=\mathrm{Vect}\big(X^k\big)_{k\in\mathbb{N}}$.
On remarque que $\mathbb{K}[X]=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{K}_n[X]$: réunion **infinie** de sous-espaces vectoriels **imbriqués.**

E9 – Par la décomposition en éléments simples,

$$\mathbb{C}(X)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\big\{X^n\ ;\ n\in\mathbb{N}\big\}\cup\left\{\frac{1}{(X-a)^n}\ ;\ a\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N}\right\}\right)$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{R}(X)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\Bigg(\big\{X^n\ ;\ n\in\mathbb{N}\big\}&\cup\left\{\frac{1}{(X-a)^n}\ ;\ a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\right\}\\ &\cup\left\{\frac{1}{(X^2+pX+q)^n}\ ;\ p,q\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N},\ p^2<4q\right\}\\ &\cup\left\{\frac{X}{(X^2+pX+q)^n}\ ;\ p,q\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N},\ p^2<4q\right\}\Bigg)\end{aligned}$$

E10 – **Solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1** : $ay'+by=0$. $\mathscr{S}_H=\mathrm{Vect}\left(x\mapsto \mathrm{e}^{-\int\frac{b}{a}}\right)$ (droite vectorielle).

Solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à cœfficients constants : $ay''+by'+cy=0$. $\mathscr{S}_H=\mathrm{Vect}(x\mapsto\mathrm{e}^{r_1x},x\mapsto\mathrm{e}^{r_2x})$ ou $\mathrm{Vect}(x\mapsto x\mathrm{e}^{rx},x\mapsto\mathrm{e}^{rx})$ ou $\mathrm{Vect}(x\mapsto\cos(\omega x)\mathrm{e}^{\alpha x},x\mapsto\sin(\omega x)\mathrm{e}^{\alpha x})$.

E11 – **Suite récurrentes vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 1 à cœfficients constants** : $u_{n+1}=au_n$. Plus simplement : **suites géométriques.** $\mathscr{S}=\mathrm{Vect}((a^n)_{n\in\mathbb{N}})$ (droite vectorielle).

Suite récurrentes vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à cœfficients constants : $u_{n+1}=au_n+bu_{n-1}$. $\mathscr{S}=\mathrm{Vect}\big((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}},(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ ou $\mathrm{Vect}((r^n)_{n\in\mathbb{N}},(nr^n)_{n\in\mathbb{N}})$ ou $\mathrm{Vect}\big((\cos(n\theta)\rho^n)_{n\in\mathbb{N}},(\sin(n\theta)\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$.

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F sous-espace vectoriel de E, $A, B \in \mathscr{P}(E)$.

(i) $\operatorname{Vect} A \subset F \iff A \subset F \iff \forall \vec{x} \in A, \quad \vec{x} \in F$.

(ii) $\operatorname{Vect} A = A \iff A$ *sous-espace vectoriel de* E.

(iii) *Si* $A \subset B$, *alors* $\operatorname{Vect} A \subset \operatorname{Vect} B$.

Démonstration

Tout cela repose sur le fait que $\operatorname{Vect} A$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A. □

Corollaire : Égalité de Vect

$$\operatorname{Vect} A = \operatorname{Vect} B \iff A \subset \operatorname{Vect} B \text{ et } B \subset \operatorname{Vect} A$$

Remarque

Ainsi, $\operatorname{Vect}(\vec{x}, \vec{y}) = \operatorname{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont combinaisons linéaires de $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

Exemple

$\operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}\left(x \mapsto e^{ix}, x \mapsto e^{-ix}\right) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(\cos, \sin)$.

6 Familles de vecteurs

Définition : Familles liées, libres, génératrices, bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$.

- La famille $\mathscr{F}$ est dite **liée** (ses vecteurs sont dit **linéairement dépendants**) lorsqu'il existe une combinaison linéaire non triviale de ses vecteurs égale au vecteur nul :
$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0}$$
- La famille $\mathscr{F}$ est dite **libre** (ses vecteurs sont dit **linéairement indépendants**) lorsqu'elle n'est pas liée, c'est-à-dire que toute combinaison linéaire de ses vecteurs égale au vecteur nul est triviale :
$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0} \Longrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i = 0.$$
- La famille $\mathscr{F}$ est dite **génératrice** de E (ou **engendre** E) lorsque tout vecteur de E est combinaison linéaire de ces vecteurs :
$$\forall \vec{x} \in E, \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i$$
c'est-à-dire $E = \operatorname{Vect} \mathscr{F}$.

- La famille $\mathscr{F}$ est une **base** de E lorsqu'elle est libre et génératrice dans E.

Toutes ces définitions s'étendent aux familles infinies, les combinaisons linéaires restant toujours finies (les suites de cœfficients $(\lambda_i)_i$ sont presque nulles).

Remarques

R1 – Les couples de vecteurs liés sont les couples de vecteurs colinéaires, les triplets de vecteurs liés sont les triplets de vecteurs coplanaires.
⚠Non colinéaires deux à deux ne suffit pas !
Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\vec{x} = (1,0,0)$, $\vec{y} = (0,1,0)$ et $\vec{z} = (1,1,0)$ sont non colinéaires deux à deux et pourtant, ils sont coplanaires donc linéairement dépendant.

R2 – ⚠Dire que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaire, c'est dire qu'il existe $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ tel que $\lambda\vec{x}+\mu\vec{y} = \vec{0}$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{y} = \lambda\vec{x}$ **OU** que $\vec{x} = \vec{0}$.

R3 – Une famille contenant $\vec{0}$ est toujours liée.

Exemples

E1 – Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\big((1,1,0),(0,1,1)\big)$ est libre. La famille $\big((1,1,0),(0,1,1),(0,1,0)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

E2 – La famille $(1,\cos,\sin,\cos(2\cdot),\sin(2\cdot))$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

E3 – La famille $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Propriété : Famille de polynômes à degrés étagés

*Toute famille de polynômes **non nuls** et à **degrés étagés** (c'est-à-dire deux à deux distincts) est libre.*

Démonstration

Si $F = (P_1,\dots,P_n)$ famille de polynômes non nuls à degrés étagés, avec $\deg P_i < \deg P_{i+1}$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = 0_{\mathbb{K}[X]}$.
Si, par l'absurde, l'un des λ_i n'est pas nul, soit $p = \max\{i \in [\![1,n]\!] \mid \lambda_i \neq 0\}$. Alors

$$-\lambda_p P_p = \underbrace{\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_{p-1}P_{p-1}}_{\deg < \deg P_p}$$

avec $\lambda_p \neq 0$, ce qui est contradictoire. Donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et la famille est libre.

La démonstration s'étend au cas des familles infinies, les combinaisons linéaires étant toujours finies. □

Exemple

$(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et plus généralement $((X-a)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont libres et même des bases de $\mathbb{K}[X]$ d'après la formule de Taylor.

Définition - Propriété : Coordonnées dans une base

$\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E si et seulement si

$$\forall\, \vec{x} \in E,\quad \exists!\,(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n.$$

Le triplet $(x_1, \dots, x_n)$ est appelé n-uplet des **coordonnées** de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Cette définition s'étend au cas où $\mathscr{B}$ est infinie, les famille des coordonnées étant presque nulles.

Remarque

Unicité = libre, existence = génératrice

Démonstration

Le caractère générateur équivaut à l'existence.
S'il y a unicité, pour $\vec{x} = \vec{0}$, on trouve que $\mathscr{B}$ est libre.
Si, réciproquement, $\mathscr{B}$ est libre, et si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(x'_1, \dots, x'_n)$ conviennent, alors $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x'_i)\vec{e}_i = \vec{0}$ donc pour tout i, $x_i = x'_i$ car $\mathscr{B}$ est libre. □

Définition - Propriété : Bases canonique de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$

On a appelle **bases canoniques** de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ les familles $\big((0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k^e}}{1}, 0, \dots, 0)\big)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $\left(1, X, X^2, \dots, X^n\right)$.

Remarque

L'existence et l'unicité de la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles fournissent des bases de $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$.

Propriété : Sur-famille d'une famille liée, génératrice

Toute sur-famille d'une famille liée ou génératrice l'est encore.

Démonstration

Si $\mathscr{F}$ sous-famille de $\mathscr{F}'$, alors

- si $\mathscr{F}$ est liée, on a une combinaison linéaire non triviale de vecteurs de $\mathscr{F}$ donc de $\mathscr{F}'$ égale au vecteur nul.
- si $\mathscr{F}$ est génératrice, tout vecteur de E est combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{F}$ donc de $\mathscr{F}'$. □

Propriété : Sous-famille d'une libre

Toute sous-famille d'une famille libre l'est encore.

Démonstration

Si $\mathscr{L}$ est libre et $\mathscr{L}'$ est une sous-famille de $\mathscr{L}$, alors si $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$ sont des vecteurs de $\mathscr{L}$,

$$\lambda_1\vec{x}_1+\dots+\lambda_n\vec{x}_n=\vec{0}\Longrightarrow\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$$

donc en particulier, si $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$ sont des vecteurs de $\mathscr{L}'$,

$$\lambda_1\vec{x}_1+\dots+\lambda_n\vec{x}_n=\vec{0}\Longrightarrow\lambda_1=\dots=\lambda_n=0.\quad\square$$

Propriété : Complétion d'une famille libre

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n\in\mathbb{N}^*$, $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n,\vec{y}\in E$.

$$(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n,\vec{y})\ \textit{libre}\Longleftrightarrow\begin{cases}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\ \textit{libre}\\ y\notin\mathrm{Vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\end{cases}$$

Démonstration

- $(\Longrightarrow)$ si $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n,\vec{y})$, alors la sous-famille $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ l'est aussi et $y\notin\mathrm{Vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ sinon la famille serait liée.
- $(\Longleftarrow)$ si $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ est libre et $y\notin\mathrm{Vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$, alors si $\lambda_1\vec{x}_1+\dots+\lambda_n\vec{x}_n+\mu\vec{y}=\vec{0}$, $\mu=0$ sinon $\vec{y}\in\mathrm{Vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$, puis $\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$ car $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ est libre. $\square$

Propriété : Caractérisation des familles liées

Soit $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\in E^n$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Alors $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ liée si et seulement s'il existe $i_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $\vec{x}_{i_0}\in\mathrm{Vect}\big((\vec{x}_i)_{i\neq i_0}\big)$.
Lorsque c'est le cas, on a alors $\mathrm{Vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)=\mathrm{Vect}(\vec{x}_i)_{i\neq i_0}$.

Démonstration

S'il existe $i_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $\vec{x}_{i_0}\in\mathrm{Vect}(\vec{x}_i)_{i\neq i_0}$, la contraposée de la propriété précédente nous dit que $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ est liée.

Réciproquement, si $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ est liée, on a une combinaison linéaire non triviale des $\vec{x}_i$ égale à $\vec{0}$, ce qui permet d'écrire l'un des $\vec{x}_i$ comme combinaison linéaire des autres.

Enfin, on a évidemment que $\mathrm{Vect}(\vec{x}_i)_{i\neq i_0}\subset\mathrm{Vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ et réciproquement, si on a $\vec{x}_{i_0}\in\mathrm{Vect}(\vec{x}_i)_{i\neq i_0}$, alors pour tout i, $\vec{x}_i\in\mathrm{Vect}\big((\vec{x}_i)_{i\neq i_0}\big)$ donc $\mathrm{Vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\subset\mathrm{Vect}(\vec{x}_i)_{i\neq i_0}$. $\square$

7 Sommes de sous-espaces vectoriels

Définition : Sommes de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

On note $F_1+\ldots+F_n=\sum_{i=1}^{n}F_i=\{\vec{x}_1+\dots+\vec{x}_n\mid\forall\, i,\ \ \vec{x}_i\in F_i\}$.

Ainsi, $\vec{x}\in\sum_{i=1}^{n}F_i\Longleftrightarrow\exists\,(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\in F_1\times\dots\times F_n,\ \ \vec{x}=\vec{x}_1+\dots+\vec{x}_n$.

Exemple

Si $F_1 = \mathrm{Vect}\,(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, $F_1 = \mathrm{Vect}\,(\vec{x}_1) + \mathrm{Vect}\,(\vec{x}_2) = \mathbb{K}\,\vec{x}_1 + \mathbb{K}\,\vec{x}_2$.
Si $F_2 = \mathrm{Vect}\,(\vec{x}_3)$, $F_1 + F_2 = \mathbb{K}\,\vec{x}_1 + \mathbb{K}\,\vec{x}_2 + \mathbb{K}\,\vec{x}_3 = \mathrm{Vect}\,(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$.

Remarques

R 1 – ⚠ $\mathbb{K}\,\vec{x} + \mathbb{K}\,\vec{y} \neq \mathbb{K}\,(\vec{x} + \vec{y})$, en général.

R 2 – ⚠ $F + F = F$, $F - F = F$, si G est un sous-espace de F, $F + G = F$.

R 3 – si $\lambda \neq 0$, $\lambda F = F$.

R 4 – ⚠ En général, $(F + G) \cap H \neq F \cap H + G \cap H$. Exemple : trois droites coplanaires.

Propriétés

(i) Une somme de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

(ii) Si A, B sont des parties de E, alors $\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}\,A + \mathrm{Vect}\,B$.

(iii) $\mathrm{Vect}\,(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \mathbb{K}\,\vec{x}_1 + \cdots + \mathbb{K}\,\vec{x}_n$.

Démonstration

Caractérisation des sous-espaces et vérifications directes. □

8 Somme directe

Définition : Somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que $F_1,\dots,F_n$ sont en somme directe lorsque pour tout $\vec{x}\in F_1+\cdots+F_n$, l'écriture $\vec{x}=\vec{x}_1+\cdots+\vec{x}_n$ où $\forall\, i,\ \ \vec{x}_i\in F_i$ est unique.

On note alors $F_1+\cdots+F_n=F_1\oplus\cdots\oplus F_n=\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n}F_i$.

Remarque

Comme pour des ensembles disjoints, il n'y a pas de notation pour dire que des sous-espaces sont en somme directe. La notation désigne la somme des sous-espaces, en rappelant que celle-ci est directe.

Propriété : Caractérisation par l'unique écriture de $\vec{0}$

$F_1,\dots,F_n$ sont en somme directe si et seulement si
$\forall\ (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\in F_1\times\cdots\times F_n$,

$$\vec{x}_1+\cdots+\vec{x}_n=\vec{0}\Longrightarrow\vec{x}_1=\cdots=\vec{x}_n=\vec{0}.$$

Démonstration

Le sens $\Longrightarrow$ et immédiat (et sans intérêt), pour l'autre sens, si $\vec{x}_1+\cdots+\vec{x}_n=\vec{x}'_1+\cdots+\vec{x}'_n$ avec pour tout i, $\vec{x}_i,\ \vec{x}'_i\in F_i$, alors $\underbrace{\left(\vec{x}_1-\vec{x}'_1\right)}_{\in F_1}+\cdots+\underbrace{\left(\vec{x}_n-\vec{x}'_n\right)}_{\in F_n}=\vec{0}$ donc $\left(\vec{x}_1-\vec{x}'_1\right)=\cdots=\left(\vec{x}_n-\vec{x}'_n\right)=\vec{0}$. □

Propriété : Cas de deux sous-espaces

Deux sous-espaces F et G sont en somme directe si et seulement si $F\cap G=\{\vec{0}\}$.
⚠ *Le résultat est faux pour plus de deux sous-espaces.*

Démonstration

Si F et G sont en somme directe et si $\vec{x}\in F\cap G$, $\vec{x}=\vec{x}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{x}\in F\oplus G$ donc $\vec{x}=\vec{0}$ par unicité. On a aussi $\vec{0}\in F\cap G$ car c'est un sous-espace.

Réciproquement, si $F\cap G=\{\vec{0}\}$ et si $\vec{x}+\vec{y}=\vec{0}$ avec $\vec{x}\in F$ et $\vec{y}\in G$, alors $\vec{x}=-\vec{y}\in F\cap G=\{\vec{0}\}$ donc $\vec{x}=\vec{y}=\vec{0}$ donc F et G sont en somme directe. □

Exemples

E 1 – Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}(0,1)\oplus\mathbb{R}(1,0)$.

E 2 – Dans $\mathbb{R}^3$, $A=((1,0,1),(0,1,1))$ et $B=((1,1,2))$. $\mathrm{Vect}\,A+\mathrm{Vect}\,B$ n'est pas directe.

E 3 – Dans $\mathbb{R}^3$, $P\ :\ 2x+y-z=0$. Chercher $\vec{u}$ tel que $\mathbb{R}^3\oplus\mathbb{R}\vec{u}$.

E 4 – Dans $\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}(1,0)$, $G=\mathbb{R}(0,1)$ et $H=\mathbb{R}(1,1)$ sont tels que $(1,0)+(0,1)-(1,1)=(0,0)$. La somme n'est pas directe et pourtant $F\cap G=G\cap H=H\cap F=F\cap G\cap H=\{0\}$.

Exercice

Si F et G sont en somme directe et si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des familles de vecteurs de F et G respectivement, montrer que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont libres si et seulement si leur concaténation l'est.

9 Sous-espaces supplémentaires

Définition

Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

F et G sont dits **supplémentaires** dans E si et seulement si $E = F \oplus G$ c'est-à-dire $\forall\, \vec{x} \in E,\ \ \exists!\, (\vec{x}_F, \vec{x}_G) \in F \times G \mid \vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$.

Remarque

⚠Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire ! Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'en est **jamais** un ! (Pourquoi ?)

Propriété

(i) F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F + G = E$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

(ii) Il n'y a pas unicité du supplémentaire en général.

Exemples

- **E 1 –** Dans $\mathbb{R}^3$, $P\ :\ x = 0$, $D = \mathbb{R}(1,0,0)$ et $D' = \mathbb{R}(1,1,0)$. Alors D et D' sont des supplémentaires de P dans $\mathbb{R}^3$ (fonctionne avec tout $\mathbb{R}\vec{v}$ tel que $\vec{v} \notin P$.
- **E 2 –** Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ les sous-espaces des fonctions paires et impaires sont supplémentaires.
- **E 3 –** $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}^-(X)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}(X)$ (partie entière).
- **E 4 –** Les sous-espaces $B\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_{\deg B - 1}[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$ (division euclidienne).

Définition

Soient $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que $F_1,\dots,F_n$ sont supplémentaires dans E lorsque

$$F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = E$$

c'est-à-dire

$$\forall \vec{x} \in E,\quad \exists !\, (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n \mid \vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n.$$

Exemple

$\mathscr{B} = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ est une base de E si et seulement si les $\mathbb{K}\vec{e}_i$ sont supplémentaires dans E.

II Structure d'algèbre

Définition : Structure d'algèbre

On dit que $(\mathscr{A},+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre lorsque
- $(\mathscr{A},+,\cdot)$ est une $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
- $(\mathscr{A},+,\times)$ est un anneau,
- *Pseudo-associativité* : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ \forall x,y \in \mathscr{A},\ \ \lambda\cdot(x\times y) = (\lambda\cdot x)\times y = x\times(\lambda\cdot y)$.

Exemples

E 1 – $(\mathbb{C},+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

E 2 – $(\mathbb{K}^X,+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

E 3 – $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

E 4 – $(\mathbb{K}[X],+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

E 5 – $(\mathbb{K}(X),+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Remarque

On a aussi une notion de sous-algèbre : c'est simultanément un sous-espace vectoriel et un sous-anneau, donc stable par combinaisons linéaires et par produit et contenant l'unité.

Exemples

E 1 – $\mathbb{K}[X]$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}(X)$.

E 2 – $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^I$.

E 3 – L'ensemble des suites convergentes est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Remarque

L'intérêt principal des algèbres est de pouvoir évaluer un polynôme à cœfficients dans $\mathbb{K}$ en un élément d'une $\mathbb{K}$-algèbre.

Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ et $x \in \mathscr{A}$, $P(x) = a_0 1_{\mathscr{A}} + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Attention à ne pas oublier l'unité de $\mathscr{A}$!

III Dimension finie

1 Espace de dimension finie

Définition : Espace de dimension finie

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est dit de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.

Dans le cas contraire, il est dit de **dimension infinie**.

Exemples

E 1 – $\{\vec{0}\}$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimension finie.

E 2 – $\mathbb{K}[X]$ ne l'est pas car si on avait une famille génératrice finie, tout polynôme aurait un degré au plus égal au plus grand des degrés de ces polynômes.

Lemme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une famille génératrice contenant $n \in \mathbb{N}^*$ vecteurs.

(i) Toute famille libre de n vecteurs est une base de E.

(ii) Toute famille libre a au plus n vecteurs.

(iii) Toute famille d'au moins $n+1$ vecteurs est liée.

Démonstration

(i) $E = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ et $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ famille libre.

On a $\vec{w}_1 \in E = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$, donc on a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\vec{w}_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \neq \vec{0}$ car vecteur d'une famille libre.

Donc on a au moins un i_0 tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. Quitte à réordonner $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, on peut supposer $i_0 = 1$.

Alors $\vec{v}_1 = \frac{1}{\lambda_1} \vec{w}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{v}_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \vec{v}_n \in \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n)$, et ainsi,

$$E = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \subset \mathrm{Vect}(\vec{w}_1, \dots, \vec{v}_n) \subset E,$$

donc $E = \mathrm{Vect}(\vec{w}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$.

Et on poursuit par récurrence (finie), si on a obtenu $E = \mathrm{Vect}(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k, \vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_n)$ quitte à réordonner $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, alors $\vec{w}_{k+1} \in \mathrm{Vect}(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k, \vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_n)$, donc on a $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels

que $\vec{w}_{k+1} = \mu_1 \vec{w}_1 + \cdots + \mu_k \vec{w}_k + \mu_{k+1} \vec{v}_{k+1} + \cdots + \mu_n \vec{v}_n$ et comme la famille $(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k)$ est libre $(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_n) \neq (0, \ldots, 0)$, et quitte à réordonner $\vec{v}_{k+1}, \ldots, \vec{v}_n$, on peut supposer $\mu_{k+1} \neq 0$.
Alors $\vec{v}_{k+1} \in \mathrm{Vect}(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{k+1}, \vec{v}_{k+2}, \ldots, \vec{v}_n)$, et ainsi,

$$E = \mathrm{Vect}(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k, \vec{v}_{k+1}, \ldots, \vec{v}_n) \subset \mathrm{Vect}(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{k+1}, \vec{v}_{k+2}, \ldots, \vec{v}_n) \subset E,$$

donc $E = \mathrm{Vect}(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{k+1}, \vec{v}_{k+2}, \ldots, \vec{v}_n)$.
À la fin du procédé, on obtient $E = \mathrm{Vect}(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)$ et donc $(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)$ est une base de E.

(ii) Si on a une famille libre $(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_p)$ avec $p > n$, alors $(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)$ est une base de E d'après ce qui précède, donc $\vec{w}_{n+1} \in \mathrm{Vect}(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)$ ce qui contredit l'indépendance linéaire de $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_p$.

(iii) Contraposée de ce qui précède. □

2 Dimension, bases extraites et incomplètes

Théorème : Théorème de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{\vec{0}\}$.
De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

Démonstration

Soit $\mathscr{G}_0 = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ une famille génératrice de E.
- Soit $\mathscr{G}_0$ est libre et c'est une base de E, c'est terminé.
- Soit $\mathscr{G}_0$ est liée, et on a i_0 tel que $\vec{v}_{i_0} \in \mathrm{Vect}(\vec{v}_i)_{i \neq i_0}$. Quitte à réordonner, on suppose $i_0 = n$. Soit $\mathscr{G}_1 = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p-1})$. Alors $E = \mathrm{Vect}\,\mathscr{G}_0 = \mathrm{Vect}\,\mathscr{G}_1$. On peut donc recommencer le raisonnement.

Le procédé s'arrête et on finit toujours par obtenir une base de E. □

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{\vec{0}\}$.
- *E possède des bases.*
- *Toutes les bases de E ont même nombre d'éléments.*

Démonstration

- Un espace de dimension finie possède une famille génératrice finie et donc une base d'après le théorème précédent.
- Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, de taille n et n' respectivement. Comme $\mathscr{B}$ est libre et $\mathscr{B}'$ est génératrice, le lemme nous dit que $n \leqslant n'$. Par symétrie, $n = n'$. □

Définition : Dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Si $E = \{\vec{0}\}$, on pose $\dim E = 0$.
Sinon, on note $\dim E$ (ou $\dim_{\mathbb{K}} E$) le nombre de vecteurs de toute base de E.

Exemples

E 1 – $\dim \mathbb{K}^n = n$, $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$.

E 2 – $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ et $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

E 3 – $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_n[X] = 2(n+1)$: $(1, \mathrm{i}, X, \mathrm{i}X, \dots, X^n, \mathrm{i}X^n)$ en est une base.
On peut démontrer que si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ et que $\mathbb{L}$ est de dimension finie en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors tout espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{L}$ est un espace de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \times \dim_{\mathbb{L}} E$.

E 4 – L'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 (resp. 2) est de dimension 1 (resp. 2).

E 5 – L'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène à cœfficients constants d'ordre 1 (resp. 2) est de dimension 1 (resp. 2).

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs, toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.

Démonstration

Conséquence du lemme en considérant une base comme une famille libre puis comme une famille génératrice. □

Corollaire

Toute famille d'au moins $n+1$ vecteurs en dimension n est liée.

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $\mathscr{B}$ une famille finie de vecteurs de E.

$\mathscr{B}$ est une base de E si et seulement si elle contient $n = \dim E$ vecteur et elle est libre ***ou*** *génératrice.*

Démonstration

On pose $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Le sens direct ne pose pas de problème.

Si $\mathscr{B}$ est libre et contient $n = \dim E$ vecteurs, elle contient autant de vecteurs qu'une famille génératrice de E donc est une base d'après le lemme.

Si $\mathscr{B}$ est génératrice et contient n vecteurs, alors si $\mathscr{B}$ était liée, on aurait i tel que $\vec{e}_i \in \mathrm{Vect}\,(\vec{e}_k)_{k\neq i}$. Alors $\mathscr{B}' = (\vec{e}_k)_{k\neq i}$ serait encore génératrice et posséderait $n-1 < \dim E$ vecteurs, ce qui est contradictoire. □

Remarque

Dans la pratique, on montre que le famille est libre et possède le bon nombre de vecteurs.

Exemples

E 1 – $(1, X, X(X-1), \dots, X(X-1)\cdots(X-n+1))$ est une famille de polynômes non nuls a degrés étagés donc libre, tous dans $\mathbb{K}_n[X]$ et contient $n+1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$ vecteurs donc est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

E 2 – $\mathscr{B} = ((1,1,1),(1,0,1),(0,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car contient 3 vecteurs non coplanaires de $\mathbb{R}^3$.

Théorème : Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. On peut compléter toute famille libre de vecteurs de E en une base de E.

De plus, les vecteurs pour compléter peuvent être choisis dans n'importe quelle famille génératrice de E.

Démonstration

Soit $\mathscr{L}$ et $\mathscr{G}$ familles libre et génératrice de E respectivement. Soit

$$A = \{\text{taille}(\mathscr{L}') \; ; \; \mathscr{L}' \text{ libre obtenue par complétion de } \mathscr{L} \text{ avec des vecteurs de } \mathscr{G}\}$$

$A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$ (contient la taille de $\mathscr{L}$) et majoré par $n = \dim E$. Donc A admet un plus grand élément. Soit $\mathscr{B}$ une famille libre obtenue par complétion de $\mathscr{L}$ avec des vecteurs de $\mathscr{G}$ réalisant ce maximum.

On a $\operatorname{Vect} \mathscr{B} \subset E = \operatorname{Vect} \mathscr{G}$.

Si on a $\vec{v} \in \mathscr{G}$ tel que $\vec{v} \notin \operatorname{Vect} \mathscr{B}$, alors la famille $\mathscr{L}'$ obtenue en ajoutant $\vec{v}$ à $\mathscr{B}$ est une famille libre obtenue par complétion de $\mathscr{L}$ avec des vecteurs de $\mathscr{G}$ ce qui contredit la maximalité de $\mathscr{B}$.

Donc $\mathscr{G} \subset \operatorname{Vect} \mathscr{B}$ donc $E = \operatorname{Vect} \mathscr{G} \subset \mathscr{B} \subset E$ donc $E = \operatorname{Vect} \mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$ est une base de E. □

Corollaire

Si E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E et $\mathscr{L}$ une sous-famille libre de $\mathscr{G}$.

Alors on peut trouver une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathscr{L}$ soit une sous-famille de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$ soit une sous-famille $\mathscr{G}$.

3 Dimension d'un produit d'espaces vectoriels

Propriété

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de bases $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ et $\mathscr{B}' = \left(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\right)$.

Alors $\mathscr{C} = \left((\vec{e}_1, 0_F), \dots, (\vec{e}_p, 0_F), \left(0_E, \vec{f}_1\right), \dots, \left(0_E, \vec{f}_n\right)\right)$ est une base de $E \times F$.

En particulier, $E \times F$ est de dimension finie et $\dim E \times F = \dim E + \dim F$.

Plus généralement, si $E_1, \dots, E_n$ sont des espaces de dimension finie, $E_1 \times \ldots \times E_n$ l'est encore et $\dim E_1 \times \ldots \times E_n = \dim E_1 + \ldots + \dim E_n$.

Si E est de dimension finie, E^n l'est encore et $\dim E^n = n \dim E$.

Démonstration

Tout couple $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times F$ s'écrit de manière unique

$$x_1 (\vec{e}_1, 0_F) + \cdots + x_p (\vec{e}_p, 0_F) + y_1 \left(0_E, \vec{f}_1\right) + \ldots + y_n \left(0_E, \vec{f}_n\right). \quad \square$$

4 Dimension des sous-espaces

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace de E.

Alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$ avec égalité si et seulement si $F = E$.

*L'entier $\dim E - \dim F$ est appelé **codimension** de F dans E.*

Démonstration

Soit $F = \{\vec{0}\}$ et le résultat est direct.

Sinon, soit $A = \{\text{taille}(\mathscr{L})\ ;\ \mathscr{L}$ famille libre de vecteurs de $F\}$.

$A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$ (contient 1) et majoré par $n = \dim E$. Donc A admet un plus grand élément. Soit $\mathscr{B}$ une famille libre de vecteurs de F réalisant ce maximum.

On a $\operatorname{Vect} \mathscr{B} \subset F$.

Si on a $\vec{v} \in \mathscr{F}$ tel que $\vec{v} \notin \operatorname{Vect} \mathscr{B}$, alors la famille $\mathscr{L}$ obtenue en ajoutant $\vec{v}$ à $\mathscr{B}$ est une famille libre de vecteurs de F ce qui contredit la maximalité de $\mathscr{B}$.

Donc $F \subset \operatorname{Vect} \mathscr{B}$ donc $F = \operatorname{Vect} \mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$ est une base de F.

Comme $\mathscr{B}$ est une famille libre de vecteurs de E, $\dim F \leqslant \dim E$.

S'il y a égalité, alors $\mathscr{B}$ est une base de E, donc $F = \operatorname{Vect} \mathscr{B} = E$. $\square$

Exemple

$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ est engendré par les vecteurs de la forme $(-1, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ qui sont évidemment linéairement indépendants, donc c'est un sous-espace de dimension $n - 1$.

Définition : Droites, plans, hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Un sous-espace de dimension 1 est une **droite vectorielle** de E, un sous-espace de dimension 2 est un **plan vectoriel** de E, un sous-espace de codimension 1, donc de dimension $n-1$ est un **hyperplan** de E.

5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition : Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ une famille d'éléments de E.
On appelle **rang** de $\mathscr{F}$ l'entier $\operatorname{rg}\mathscr{F} = \dim(\operatorname{Vect}\mathscr{F})$.

Remarque

Si E est de dimension finie n, alors $\operatorname{rg}\mathscr{F} \leqslant n$.

Propriétés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ une famille d'éléments de E.

(i) Si $\mathscr{F}'$ est une sous-famille de $\mathscr{F}$, $\operatorname{rg}\mathscr{F}' \leqslant \operatorname{rg}\mathscr{F}$.

(ii) Si $\mathscr{F}$ est finie, $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si elle contient $\operatorname{rg}\mathscr{F}$ vecteurs.

Démonstration

(i) $\operatorname{Vect}\mathscr{F}' \subset \operatorname{Vect}\mathscr{F}$.

(ii) $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si c'est une base de $\operatorname{Vect}\mathscr{F}$ si et seulement si elle contient $\dim(\operatorname{Vect}\mathscr{F}) = \operatorname{rg}\mathscr{F}$ vecteurs (car c'est bien sûr une famille génératrice). □

Exemple

$E = \mathbb{R}^3$, $\vec{v}_1 = (1,-1,1)$, $\vec{v}_2 = (-1,1,-1)$, $\vec{v}_3 = (0,1,1)$, $\vec{v}_4 = (1,0,2)$ et $\mathscr{F} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$.
$(\vec{v}_1, \vec{v}_3)$ libre, $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$ et $\vec{v}_4 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3$, donc $\operatorname{rg}\mathscr{F} = 2$.
On verra plus tard un algorithme pour déterminer le rang (méthode de Gauß).

6 Somme directe et supplémentaire

Propriété : Caractérisation de la supplémentarité avec des bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces de dimension finie, $\mathscr{B}_{F_i}$ une base de F_i, $\mathscr{C}$ la famille obtenue en mettant bout à bout les $\mathscr{B}_{F_i}$ (concaténation).

On a toujours que $\mathscr{C}$ engendre $H = F_1 + \cdots + F_n$, et

Les F_i sont en somme directe si et seulement si $\mathscr{C}$ est libre donc une base de H.

On dit alors que la base $\mathscr{C}$ de H est adaptée à la décomposition $H = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$.

On a alors $\dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

Démonstration

Pour deux sous-espaces, mais valable dans le cas général.

- $F + G = \operatorname{Vect} \mathscr{B}_F + \operatorname{Vect} \mathscr{B}_G = \operatorname{Vect} \mathscr{C}$ donc $\mathscr{C}$ engendre H.
- Si F et G sont en somme directe, alors on a déjà vu que $\mathscr{C}$ est libre : si

$$\underbrace{\lambda_1 \vec{f}_1 + \cdots + \lambda_p \vec{f}_p}_{\in F} + \underbrace{\mu_1 \vec{g}_1 + \cdots + \mu_q \vec{g}_q}_{\in G} = \vec{0}$$

  alors $\lambda_1 \vec{f}_1 + \cdots + \lambda_p \vec{f}_p = \mu_1 \vec{g}_1 + \cdots + \mu_q \vec{g}_q = \vec{0}$ car F et G sont en somme directe, donc tous les cœfficients sont nuls car $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ sont libres. Donc $\mathscr{C}$ l'est.
- Si $\mathscr{C}$ est libre, alors si $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$ avec $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G$, comme $\vec{x}$ et $\vec{y}$ se décomposent dans $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ respectivement et comme $\mathscr{C}$ est libre, on obtient $\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$ et F et G sont en somme directe. □

Corollaire

Soient $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie, alors $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est de dimension finie et $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Démonstration

Avec les même notation que précédemment, $\mathscr{C}$ engendre $\sum_{i=1}^{n} F_i$ donc $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est de dimension finie et $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \leqslant \text{taille}(\mathscr{C}) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

La propriété précédent nous dit qu'il y a égalité si et seulement si la somme est directe. □

Corollaire : Sous-espaces supplémentaires en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces de E.

$F_1,\dots,F_n$ sont supplémentaires dans E (ie $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$) si et seulement si deux des trois propriétés suivantes sont vraies :

1. $E = F_1 + \cdots + F_n$.
2. *La somme est directe.*
3. $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

Remarque

En particulier, pour deux sous-espaces, F et G sont supplémentaires dans E (ie $E = F \oplus G$) si et seulement si deux des trois propriétés suivantes sont vraies :

1. $E = F + G$.
2. $F \cap G = \{\vec{0}\}$
3. $\dim E = \dim F + \dim G$.

Démonstration

- Si 1 et 2 sont vrais, c'est la définition.
- Si 1 et 3 sont vrais, la somme est directe d'après la propriété précédente.
- Si 2 et 3 sont vrais, $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ est un sous-espace de E de même dimension, donc $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = E$. □

Corollaire

Tout sous-espaces vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E admet un supplémentaire dans E.

De plus, si $p = \dim F$ et $n = \dim E$, tout supplémentaire de F est de codimension p, c'est-à-dire de dimension $n - p$.

Démonstration

Il suffit de compléter une base de F (famille libre) en une base de E (Théorème de la base incomplète). □

7 Formule de Grassmann

Propriété : Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G des sous-espaces de dimension finie.

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Remarque

On retrouve le fait que la somme est directe si et seulement si $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$.

Démonstration

On a bien que $F+G$ et $F \cap G$ sont de dimension finie.

- **1ère méthode** : Avec des sommes directes.
  L'idée est de se ramener à une somme directe en remarquant que $\dim G - \dim(F \cap G)$ est la dimension d'un supplémentaire de $F \cap G$ dans G. Soit G' un tel supplémentaire.
  Alors $(F \cap G) \oplus G' = G$ et $\dim G' = \dim G - \dim(F \cap G)$.

  Il reste à montrer que $F+G = F \oplus G'$. Or
  - ⋆ $F+G = F + ((F \cap G) + G') = (F + (F \cap G)) + G' = F + G'$
  - ⋆ $F \cap G' = F \cap (G \cap G') = (F \cap G) \cap G' = \{\vec{0}\}$ car $G' \subset G$ et G' et $F \cap G$ sont en somme directe.

  Donc $\dim(F+G) = \dim(F \oplus G') = \dim F + \dim G' = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.
- **2e méthode** : Avec des bases (c'est en fait la même preuve, formulée différemment).
  Soit $n = \dim F$, $m = \dim G$, $p = \dim F \cap G$, $\mathscr{B}_F = \left(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\right)$ une base de F et $\mathscr{B}_{F\cap G} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de $F \cap G$.
  Cette dernière est une famille libre de vecteurs de G, on peut donc la compléter en une base $\mathscr{B}_G = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{m-p})$ de G.

  Montrons que $\mathscr{B}_{F+G} = \left(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{m-p}\right)$ est une base de $F+G$.
  On aura alors $\dim(F+G) = n+m-p = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ et la formule sera démontrée.

  - ⋆ On a déjà $F+G = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_F) + \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_G) = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_{F+G})$ donc la famille $\mathscr{B}_{F+G}$ engendre $F+G$.
    (On a retiré $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p$ qui sont dans $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_F)$.)
  - ⋆ Reste à voir qu'elle est libre. Or si on a une combinaison linéaire
    $$\lambda_1 \vec{f}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{f}_n + \mu_1 \vec{g}_1 + \cdots + \mu_{m-p} \vec{g}_{m-p} = \vec{0}$$
    alors $\mu_1 \vec{g}_1 + \cdots \mu_{m-p} \vec{g}_{m-p} \in G \cap \mathrm{Vect}\left(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\right) = F \cap G = \mathrm{Vect}\left(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p\right)$.
    Comme $\mathscr{B}_G$ est libre, on en déduit que $\mu_1 = \cdots = \mu_{m-p} = 0$. Il reste $\lambda_1 \vec{f}_1 + \cdots + \lambda_p \vec{f}_n$ et comme $\mathscr{B}_F$ est libre, tous les scalaires sont bien nuls et $\mathscr{B}_{F+G}$ est libre.
  - ⋆ C'est une base de $F+G$ qui a bien la dimension attendue.

□

Remarque

On verra une autre démonstration avec les applications linéaires.