Ensembles finis et Dénombrement

Extrait du programme officiel :

Ce chapitre est introduit essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique. Il permet de modéliser certaines situations combinatoires et offre un nouveau cadre à la représentation de certaines égalités.

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- *parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;*
- *l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\lvert A\rvert$, $\mathrm{Card}(A)$, $\#A$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.	
Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis.	
Cardinal de la réunion de deux ensembles finis.	La formule du crible est hors programme.
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre.	
Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Table des matières

I ENSEMBLES FINIS

1 Définition, cardinal

On note $\mathbb{N}_n$ l'ensemble $[\![1,n]\!]=\{1,\dots,n\}$ si $n\in\mathbb{N}^*$ et $\varnothing$ si $n=0$.

Lemme

S'il existe une bijection de $\mathbb{N}_p$ sur $\mathbb{N}_n$ (où $n,p\in\mathbb{N}^*$), alors $p=n$.
(S'il existe une injection de $\mathbb{N}_p$ sur $\mathbb{N}_n$ (où $n,p\in\mathbb{N}^*$), alors $p\leqslant n$.)
(Toute injection de $\mathbb{N}_n$ dans lui-même est une bijection.)

Remarque

Les propriétés entre parenthèses servent à faire des démonstrations non présentées en classe.

Démonstration : Admis en classe.

Pour f bijective, on démontre que $p\leqslant n$ en utilisant la seule injectivité de f, et on obtient $n\leqslant p$ en utilisant le même résultat appliqué à f^{-1}.

On démontre par récurrence sur n que pour tout p, si $f:\mathbb{N}_p\to\mathbb{N}_n$ injective, alors $p\leqslant n$ et si $p=n$ alors f bijective.

- Si $n=1$ et $f:\mathbb{N}_p\to\{1\}$ une injection,
  - ⋆ $f(1)=1=f(p)$ donc $p=1$ par injectivité.
  - ⋆ si $p=1$, alors $f:1\to 1$ est bijective.
- Si, le résultat est vrai pour un $n\in\mathbb{N}$, et si $f:\mathbb{N}_p\to\mathbb{N}_{n+1}$ est injective
  - ⋆ Si $f(p)=n+1$, alors f induit une injection $\tilde{f}:\mathbb{N}_{p-1}\to\mathbb{N}_n$, donc $n\geqslant p-1$ par hypothèse

de récurrence, donc $n+1 \geqslant p$.
Si $p = n+1$, alors l'injection $\tilde{f} : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ est bijective par hypothèse de récurrence, donc f est bijective.

- ⋆ Si $f(p) \neq n+1$, alors si $\varphi : \mathbb{N}_{n+1} \to \mathbb{N}_{n+1}$ est la bijection échangeant $f(p)$ et $n+1$ (involution), alors $\varphi \circ f : \mathbb{N}_p \to \mathbb{N}_{n+1}$ est une injection telle que $\varphi \circ f(n+1) = n+1$. D'après le cas précédent, $n+1 \geqslant p$.
Si $p = n+1$, le cas précédent nous dit que $\varphi \circ f$ est bijective donc $f = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f)$ l'est aussi.

La récurrence est établie. □

Définition

Un ensemble E est dit **fini** si et seulement si E est vide ou on peut trouver un entier naturel n et une bijection f entre $\mathbb{N}_n$ et E.

Remarque

On a $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}_n & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & f(i) \end{array} \right.$ bijection.
Si on note $x_i = f(i)$, alors $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ où les x_i sont distincts.
Un ensemble est fini si on arrive à compter ses éléments (et en un temps fini !)

Propriété

Si E est un ensemble fini, le n de la définition précédente est unique.

Démonstration

Si on a n et m et deux bijections $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow E$ et $g : \mathbb{N}_m \longrightarrow E$,
Alors $\mathbb{N}_m \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{N}_n$: $f^{-1} \circ g$ est une bijection de $\mathbb{N}_m$ sur $\mathbb{N}_n$, donc d'après le lemme, $n = m$. □

Définition

Si E est en bijection avec $\mathbb{N}_n$, n est appelé **cardinal** de E, noté $\operatorname{Card} E$, $|E|$ ou $\#E$.
Par convention, on pose $|\varnothing| = 0$.

Remarque

La notion de cardinal coïncide avec la notion intuitive de *nombre d'éléments* d'un ensemble.

Propriétés

(i) Deux ensembles finis équipotents ont même cardinal.

(ii) Un ensemble est fini si et seulement s'il est équipotent à un ensemble fini.

2 Résultats sur les ensembles finis

a Partie d'un ensemble fini

Propriété

Toute partie A d'un ensemble fini E est finie et $|A| \leqslant |E|$, avec égalité si et seulement si $A = E$.

Remarque

Si A partie d'un ensemble fini E, $|A| = \sum\limits_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$.

Démonstration : Admis.

Si $A = \varnothing$, le résultat est immédiat.

Sinon, appelons n le cardinal de E et soit g une bijection de $\mathbb{N}_n$ sur E.

Il faut trouver une bijection de A vers $\mathbb{N}_p$ pour un certain p.

L'application $A \longrightarrow g(A)$ induite par g est une bijection (injective et surjective). Comme $g(A) \subset \mathbb{N}_n$, c'est une partie majorée de $\mathbb{N}$, donc finie (on peut construire une bijection strictement croissante de $g(A)$ vers $\mathbb{N}_p$ « à la main » en considérant les éléments de $g(A)$ par ordre strictement croissant, avec des minimums successifs) : on note p son cardinal : A est une partie finie de cardinal p. On se donne f une bijection de $\mathbb{N}_p$ sur A.

Si l'on note $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$ l'injection canonique, on a alors

$$\mathbb{N}_p \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\Phi} E \xrightarrow{g} \mathbb{N}_n$$

Comme f, Φ et g sont injective, $g \circ \Phi \circ f$ l'est aussi et donc $p \leqslant n$.

Cas d'égalité, (le sens indirect est immédiat) si $p = n$, alors $g \circ \Phi \circ f$ est un injection de $\mathbb{N}_p$ dans lui-même. D'après le lemme 1, c'est une bijection. Donc $\Phi = g^{-1} \circ (g \circ \Phi \circ f) \circ f^{-1}$ est surjective et $A = \Phi(A) = E$. $\square$

b Intersection d'ensembles finis

Propriété

Si A et B deux parties d'un ensemble dont l'une au moins est finie, $A \cap B$ est fini, et, lorsqu'ils existent,

$$|A \cap B| \leqslant \min(|A|, |B|).$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer la propriété précédente à $A \cap B$ et un ensemble fini parmi A et B. Si les deux le sont, on obtient successivement $|A \cap B| \leqslant |A|$ et $|A \cap B| \leqslant |B|$. $\square$

C Réunion d'ensembles finis

Propriété

*Soit A et B sont des parties finies **disjointes** d'un ensemble E. Alors $A \sqcup B$ est fini et*

$$|A \sqcup B| = |A| + |B|$$

Démonstration

Soient $n = |A|$, $p = |B|$. Soient $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow A$ et $g : \mathbb{N}_p \longrightarrow B$ deux bijections (il en existent bien).
Alors $A \sqcup B = \{f(1), f(2), \dots, f(n), g(1), g(2), \dots, g(p)\}$: on définit

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}_{n+p} & \longrightarrow & A \sqcup B \\ k & \longmapsto & \begin{cases} f(k), & \text{si } k \leqslant n\,; \\ g(k-n), & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$$

Comme f et g sont surjectives, φ l'est (tout élément de $A \sqcup B$ a un antécédent).
Comme f et g sont injectives et A et B disjoints (on ne peut pas avoir $f(k) = g(k')$), φ est injective. □

Corollaire

Soit E un ensemble fini, A une partie de E et $\bar{A}$ son complémentaire dans E.

$$|A| + \left|\overline{A}\right| = |E|$$

Démonstration

$A \sqcup \overline{A} = E$. □

Propriété

*Si $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille de parties finies **deux à deux disjointes** de E,*

$$\left| \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Démonstration

Par récurrence sur n. □

Remarque

C'est ce résultat qui est utilisé lorsque l'on dénombre tous les cas possibles en faisant une disjonction de cas **disjoints** (« ou » = +.)

Propriété

Soit A et B des parties finies de A. Alors $A\cup B$ est fini et

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

Démonstration

$A\cup B = (A\setminus B)\sqcup B$ donc $|A\cup B| = |A\setminus B| + |B|$ $(*)$
Mais $(A\setminus B)\sqcup(A\cap B) = A$ donc $|A| = |A\setminus B| + |A\cap B|$ $(**)$
$(*)$ et $(**)$ donnent le résultat.
On peut aussi écrire $|A\cup B| = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x) + \sum_{x\in E} \mathbb{1}_B(x) - \sum_{x\in E} \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = |A| + |B| - |A\cap B|$. □

Remarque

⚠ En général, $|A\setminus B| = |A| - |A\cap B|$.

Exercice

Montrer que si A, B, C sont finis,

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|.$$

En effet

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C| &= |A\cup B| + |C| - |(A\cup B)\cap C|\\ &= |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|\end{aligned}$$

Remarque

Plus généralement, la **formule du crible** dit que

$$|A_1\cup\cdots\cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} |A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}|.$$

(Voir TD)

d Produit cartésien

Propriété

Soient E et F des ensembles finis. $E\times F$ l'est aussi, et

$$|E\times F| = |E|\times|F|$$

Démonstration

Notons $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ où les x_i sont deux à deux distincts.

Alors $E\times F=\bigsqcup_{i=1}^{n}\{x_i\}\times F$ et donc $|\{x_i\}\times F|=p=|F|$ pour tout i, et

$$|E\times F|=\sum_{i=1}^{n}|\{x_i\}\times F|=np=|E|\times|F|.$$

□

Propriété

Si $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille d'ensembles finis,

$$\left|\prod_{i=1}^{n}E_i\right|=\prod_{i=1}^{n}|E_i|.$$

Démonstration

Par récurrence sur n. □

Remarque

C'est ce résultat qui est utilisé lorsque l'on dénombre tous les cas possibles en cherchant tous les cas possibles pour un premier objet, puis pour un second, puis etc. (« et » = ×.)

Exemple

Combien de mot de p lettres peut-on former avec un alphabet qui en contient n ?

e Fonctions entre ensembles finis

Propriété

Soient E et F des ensembles finis. $\mathscr{F}(E,F)=F^E$ l'est aussi, et

$$\left|F^E\right|=|F|^{|E|}$$

Démonstration

On note $E=\{x_1,x_2,\dots,x_p\}$.
Remarquons que, d'après la proposition précédente, $|F^p|=|F|^p$.
On définit alors l'application

$$\varphi:\left|\begin{array}{ccc}F^E & \longrightarrow & F^n\\ f & \longmapsto & \big(f(x_1),f(x_2),\dots,f(x_p)\big)\end{array}\right.$$

C'est une bijection d'inverse

$$\psi:\left|\begin{array}{ccc}F^n & \longrightarrow & F^E\\ (y_1,y_2,\dots,y_n) & \longmapsto & f\ /\ \forall i,\ f(x_i)=y_i\end{array}\right.$$

(on a bien $\varphi\circ\psi = id_{F^n}$ et $\psi\circ\varphi = id_{F^E}$) Donc $\left|F^E\right| = |F^p| = |F|^p = |F|^{|E|}$. □

Remarque

Cela se retrouve en remarquant que pour chacun des $|E|$ éléments de E, il y a $|F|$ images possibles.

Exemple

Quel est le nombre de façons de ranger p chaussettes dans n tiroirs ? n^p !

Propriété

Soit f une application d'un ensemble fini E dans un ensemble F.
Alors $f(E)$ est fini et $\left|f(E)\right| \leqslant |E|$ avec égalité si et seulement si f est injective.

Démonstration

- $f : E \longrightarrow F$.
  L'application $\tilde{f} : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & f(E) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right.$ est surjective, mais n'est pas injective. On va s'arranger pour qu'elle le devienne.
  Soit, pour $y \in f(E)$, x_y **un** antécédent de y : $f(x_y) = y$, et soit $E' = \{x_y,\ y \in f(E)\}$.
  Alors, si l'on note $g : \left|\begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & g(E') \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right.$, $g(E') = \{f(x_y),\ y \in f(E)\} = \{y,\ y \in f(E)\} = f(E)$, et g est injective car chaque y a un unique antécédent x_y dans E' par construction.
  De plus, $E' \subset E$ donc E' est fini et $\left|E'\right| \leqslant |E|$. Comme g est bijective, $f(E)$ est fini et $\left|f(E)\right| = \left|E'\right| \leqslant |E|$.
- S'il y égalité, $E' = E$ donc f est injective.

□

Théorème

*Soient E et F des ensembles finis **de même cardinal**. Si f est une application de E dans F, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f est injective, *(ii) f est surjective,* *(iii) f est bijective.*

Démonstration

Comme *(i)* et *(ii)* ⇔ *(iii)*, il suffit de montrer que *(i)* ⇔ *(ii)*.

- *(i)* ⇒ *(ii)* : f est injective, donc d'après le corollaire précédent, $\left|f(E)\right| = |E| = |F|$. Mais comme $f(E) \subset F$, d'après la proposition a, $f(E) = F$: f est surjective.
- *(ii)* ⇒ *(i)* : Si f est surjective, $f(E) = F$. Alors, d'après le corollaire, $\left|f(E)\right| \leqslant |E| (= |F|)$.
  Comme $f(E) = F$, il y a égalité, donc, d'après le corollaire, f est injective.

□

f Lemme des bergers

Propriété : Lemme des Bergers

Si on dispose d'une partition de E en p parties ayant toutes le même nombre n d'éléments, alors $|E| = p \cdot n$.

Autre formulation : Soient E et F des ensembles finis et f une application de E dans F.

Si tous les sous-ensembles $f^{-1}(\{y\})$ pour $y \in F$ ont même cardinal p, c'est-à-dire si tout $y \in E$ possède exactement p antécédents, alors $|E| = p|F|$.

Remarque

Pour connaître le nombre de pattes, il suffit de compter le nombre de moutons et de multiplier par quatre.

Démonstration

Les $f^{-1}(y)$ pour $y \in F$ constituent une partition de E : $E = \bigsqcup_{y \in F} f^{-1}(y)$. □

g Nombre de parties

Propriété

Le nombre de parties d'un ensemble fini E est

$$|\mathscr{P}(E)| = 2^{|E|}$$

Démonstration

On définit

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right.$$

Alors Φ est injective, car si $\Phi(A) = \Phi(B)$, $A = B$.
Et Φ est surjective, car si $f \in \{0,1\}^E$, alors $f = \Phi\left(f^{-1}(\{1\})\right)$
Donc Φ est bijective et $|\mathscr{P}(E)| = \left|\{0,1\}^E\right| = 2^{|E|}$ □

Remarque

Déterminer une partie de E, c'est déterminer pour chaque élément de E, s'il est dans la partie ou non. Cela donne donc indépendamment 2 possibilités pour chacun des $|E|$ éléments de E, soit $2^{|E|}$ parties. C'est en fait exactement ce que l'on a fait dans cette démonstration.

II LISTES ET COMBINAISONS

1 p-listes

Définition

Soit E un ensemble. On appelle **p-liste** d'éléments de E tout p-uplet d'éléments de E.

Remarques

R1 – L'ensemble des p-listes est E^p, de cardinal $|E^p| = |E|^p$.

R2 – On utilise les p-listes lorsque l'ordre est important et que les répétitions sont possibles.

2 Arrangements

Définition

On appelle **p-arrangement** de E toute p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.
Le nombre de p-arrangements d'un ensemble de cardinal n est noté A_n^p.
On pose $A_n^0 = 1$.

Propriété

Si $n, p \in \mathbb{N}$,

$$A_n^p = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } 1 \leqslant p \leqslant n \\ 1 & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration

Il est clair que $A_n^p = 0$ si $p > n$ ou si $p < 0$.
Sinon, il y n choix pour le premier élément, puis $n-1$ pour le deuxième, etc. jusqu'à $(n-p+1)$ pour le p^e. D'où le résultat. □

Remarque

On utilise les arrangements lorsque l'on veut dénombrer des objets dont l'ordre est important.

Exemples

E1 – Combien de mots peux-t-on former avec p lettres distinctes d'un alphabet qui en comporte n ?

E2 – Dans une compétition avec n athlètes, combien de podiums différents peut-on obtenir ?

Propriété

Le nombre d'injections d'un ensemble E de cardinal p dans un ensemble F de cardinal p est A_n^p.

Démonstration

Soit $\mathscr{A}_p(F)$ l'ensemble des p-arrangements de F, $E = \{x_1, \dots, x_p\}$.

Alors $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Inj}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{A}_p(F) \\ f & \longmapsto & (f(x_1), \dots, f(x_p)) \end{array} \right.$ est bien définie et bijective. □

Remarque

Cela se retrouve en disant que l'on a n choix pour le premier élément de E, $(n-1)$ pour le second, jusqu'à $(n-p+1)$ pour le dernier.

Propriété

Le nombre de permutations d'un ensemble fini E, i.e. de bijections de E dans E est

$$|\mathfrak{S}(E)| = |E|!$$

Démonstration

Conséquence du résultat précédent et d'un fait qu'une injection de E dans E est automatiquement une permutation de E. □

Remarque

Cela se retrouve en disant que pour choisir une bijection de $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, on choisit l'image de x_1 (n possibilités), puis, de manière indépendante l'image de x_2 ($n-1$ possibilité), etc. jusqu'à l'image de de x_{n-1} (2 possibilités), l'image de x_n étant alors déterminée.

On obtient au total $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 = n!$.

Exercice

Un groupe de $2n$ personnes comprend n hommes et n femmes.

1. Combien y a-t-il de manière de les disposer autour d'une table ronde, en ne tenant compte que de leurs positions relatives (même voisin de gauche, même voisin de droite) ?

   $(2n)!$ en tout, chacune revenant $2n$ fois par permutation circulaire. soit $(2n-1)!$.
   Ou : on fixe une personne. Il reste donc $(2n-1)!$ placements possibles.

2. Même question si l'on veut respecter l'alternance homme-femme.

$(n-1)!n!$.

3. Même question si l'on veut respecter l'alternance homme-femme et que de plus Madame X soit à côté de Monsieur Y.

On fixe Madame X, deux places possibles pour Monsieur Y, puis $(n-1)!^2$ pour les autres soit $2(n-1)!^2$.

3 Combinaisons

a Parties à p éléments

Définition

On note $\binom{n}{p}$ (prononcer p parmi n, jadis noté C_n^p) le nombre de parties à p éléments, appelées p-**combinaisons**, d'un ensemble qui en contient n, i.e. le nombre de parties de cardinal p d'un ensemble de cardinal n.

$$|E| = n \Longrightarrow \left|\mathscr{P}_p(E)\right| = \binom{n}{p}$$

Remarques

R 1 – $\binom{n}{0} = 1$ car la seule partie à 0 élément est $\varnothing$.

R 2 – $\binom{n}{1} = n$ car il y a n parties à un seul élément.

R 3 – $\binom{n}{n} = 1$ car il y a une seule partie à n éléments : E.

R 4 – Si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$ car il n'y a pas de partie de E qui ait plus d'éléments que E.

Remarque

On utilise les combinaisons lorsque l'on veut dénombrer des objets dont l'ordre n'est pas important et sans répétitions. Il existe aussi des combinaisons avec répétitions, mais elles ne sont pas au programme.

Récapitulatif :

	Avec répétition	**Sans répétition**
Avec ordre	p-listes (p-uplets)	p-arrangements ie p-listes sans rép.
Sans ordre	p-combinaisons ie parties à p élém.	Hors-programme

Exercice

On tire 8 cartes dans un jeu de 32.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ? $\binom{32}{8}$
2. Combien y a-t-il de tirages comportant deux carrés ? $\binom{8}{2}$
3. Combien y a-t-il de tirages comportant au moins un carreau ?
4. Combien y a-t-il de tirages comportant au moins un trèfle ou au moins un as ?
5. Combien y a-t-il de tirages comportant au moins un trèfle et au moins un as ?

b Rappel des propriétés des coefficients binomiaux

Propriété

Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Démonstration

Lorsque l'on prend une partie à p éléments de E, il reste une partie à $n-p$ éléments de E.

Compter le nombre de parties à p élément revient alors à compter le nombre de supplémentaires de ces parties, i.e. de parties à $n-p$ éléments $\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{P}_p(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}_{n-p}(E) \\ A & \longmapsto & \bar{A} \end{array}\right.$ est une bijection.

D'où le résultat. □

Propriété : Formule de Pascal

Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

Démonstration

Pour choisir p éléments parmi $x_1, \dots, x_n$, il y a deux cas de figure (disjoints).

Soit on choisit x_n et $p-1$ autres éléments dans $x_1, \dots, x_{n-1}$: il y a $\binom{n-1}{p-1}$ possibilités.

Soit on ne choisit pas x_n et on choisit donc p éléments parmi $x_1, \dots, x_{n-1}$: il y a $\binom{n-1}{p}$ possibilités.

Au final, on a $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ choix possibles. □

Propriété

Si $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

Démonstration

On cherche, dans E de cardinal n, le nombre de couple (x, A) où $x \in E$, $A \subset E$ de cardinal p tels que $x \in A$.

Si on commence par choisir A, on a $\binom{n}{p}$ choix pour A puis p choix pour x.

Si on commence par choisir x, on a n choix pour x puis $\binom{n-1}{p-1}$ choix pour A. □

Exercice

En considérant des couples (A, B) de parties de E telles que $A \subset B \subset E$, montrer que plus généralement $\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

Propriété

Si $0 \leqslant p \leqslant n$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

Démonstration

Nous allons utiliser le lemme des Bergers.
On note $\mathscr{A}_p(E)$ l'ensemble de ces p-arrangements (on a donc $|\mathscr{A}_p(E)| = A_n^p$.)
Si on considère alors

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{A}_p(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}_p(E) \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & \{x_1, \dots, x_p\} \end{array}\right.$$

C'est une application surjective, et si $A \in \mathscr{P}_p(E)$, le nombre d'antécédents de A est le nombre de permutations possible des p éléments de A : $p!$.

D'après le lemme des Bergers, $|\mathscr{A}_p(E)| = p! \times |\mathscr{P}_p(E)|$. □

Propriété : Formule du binôme de Newton

Si a et b sont des éléments d'un anneau A tels que $ab = ba$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration

Dans le développement de $(a+b)^n = (a+b)\cdots(a+b)$, on trouve des termes de la forme $a^k b^{n-k}$ (car ils commutent) avec $k \in [\![0,n]\!]$, et il y en a exactement $\binom{n}{k}$ (choix des parenthèses où l'on choisit les a). □

Corollaire

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ *et* $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ *si* $n \neq 0$, 1 *sinon.*