Analyse asymptotique

Extrait du programme officiel :

L'objectif de ce chapitre est de familiariser les étudiants avec les techniques asymptotiques de base, dans les cadres discret et continu. Les suites et les fonctions y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant.

On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison.

Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir rapidement mener à bien des calculs asymptotiques simples. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Relations de comparaison : cas des suites	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$. On définit ces relations à partir du quotient $\frac{u_n}{v_n}$ sous l'hypothèse que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées des suites de termes généraux $\ln^\beta(n), n^\alpha, e^{\gamma n}$.
Liens entre les relations de comparaison.	Équivalence des relations $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$.
Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances.	
Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	
b) Relations de comparaison : cas des fonctions	
Adaptation aux fonctions des définitions et résultats précédents.	
c) Développements limités	
Développement limité, unicité des coefficients, troncature.	Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire.
Forme normalisée d'un développement limité : $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\big(a_0+a_1h+\ldots+a_nh^n+o(h^n)\big)$ avec $a_0 \neq 0$.	Équivalence $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0h^p$; signe de f au voisinage de a.

Contenus	Capacités & Commentaires
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	Utilisation de la forme normalisée pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible. La division selon les puissances croissantes est hors programme.
Primitivation d'un développement limité.	
Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre n en un point d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	La formule de Taylor-Young peut être admise à ce stade et justifiée dans le chapitre « Intégration ».
Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan, et de tan à l'ordre 3.	
Utilisation des développements limités pour préciser l'allure d'une courbe au voisinage d'un point.	Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local.

d) Exemples de développements asymptotiques

	La notion de développement asymptotique est présentée sur des exemples simples. La notion d'échelle de comparaison est hors programme.
Formule de Stirling.	La démonstration n'est pas exigible.

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I RELATIONS DE COMPARAISON

1 Cas des suites

a Définition

Définition

Si $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et si v_n n'est jamais nul à partir d'un certain rang, on dit que

- u est **dominée** par v et on note $u = \mathrm{O}(v)$ lorsque $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_n$ est bornée.
- u est **négligeable** devant v et on note $u = \mathrm{o}(v)$ ou $u_n \ll v_n$ lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \to 0$.
- u est **équivalente** à v et on note $u \sim v$ lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$.

Remarques

R1 – La définition se généralise au cas où $(v_n)_n$ est quelconque en écrivant $u_n = v_n \times w_n$ avec $(w_n)_n$ bornée (respectivement $\to 0, 1$).

R2 – ⚠ $u = \mathrm{o}(v)$ et $u = \mathrm{O}(v)$ traduisent une **appartenance**.

Exemple

$n = \mathrm{o}(n^3)$ et $n^2 = \mathrm{o}(n^3)$ mais $n \neq n^2$!

R3 – $u = \mathrm{O}(v)$ signifie qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que à partir d'un certain rang, $|u_n| \leqslant K|v_n|$.

$u = \mathrm{o}(v)$ signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel $|u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$.

R4 – Il n'y a pas unicité de l'équivalent d'une suite. En général, on choisit le plus simple.

Exemple

$$1 + \frac{1}{n} \sim 1 \sim 1 + \frac{1}{n^2} \sim 1 + \frac{36}{n^{247}} \dots$$

R5 – Cela ne donne que des informations asymptotiques sur les suites : au voisinage de $+\infty$, donc à partir d'un certain rang.

Exemples

E 1 – Si $p<q$, $n^p = o\left(n^q\right)$.

E 2 – $\dfrac{\sin n}{n} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$

E 3 – $n^2+1 \sim n^2$.

Propriété

Si $\alpha>0$, $\beta>0$, $q>1$,

$$\ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll \frac{1}{q^n} \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \frac{1}{\ln^\beta n}.$$

Exemple

$\ln n \ll n \ll n\ln n \ll n^2$.

Propriété

$$u \sim v \Longleftrightarrow u = v + o(v)$$

Démonstration

$$\frac{u_n}{v_n} \to 1 \Longleftrightarrow \frac{u_n - v_n}{v_n} \to 0.$$

□

b Propriétés

Propriété : Propriétés de o et O

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v, w, b ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(i) *Si $\alpha \neq 0$, $u = \mathrm{o}(\alpha v) \Longrightarrow u = \mathrm{o}(v)$ et $u = \mathrm{O}(\alpha v) \Longrightarrow u = \mathrm{O}(v)$.*

(ii) *$u = \mathrm{o}(1) \Longleftrightarrow u \to 0$ et $u = \mathrm{O}(1) \Longleftrightarrow u$ bornée.*

(iii) *Si $u = \mathrm{o}(v)$ ou $u \sim v$, alors $u = \mathrm{O}(v)$ et la réciproque est fausse.*

(iv) ***Transitivité***

$$u = \mathrm{o}(v) \text{ et } v = \mathrm{o}(w) \Longrightarrow u = \mathrm{o}(w)$$

$$u = \mathrm{O}(v) \text{ et } v = \mathrm{O}(w) \Longrightarrow u = \mathrm{O}(w)$$

(v) ***Combinaison linéaire***

$$u = \mathrm{o}(w) \text{ et } v = \mathrm{o}(w) \Longrightarrow \alpha u + \beta v = \mathrm{o}(w)$$

$$u = \mathrm{O}(w) \text{ et } v = \mathrm{O}(w) \Longrightarrow \alpha u + \beta v = \mathrm{O}(w)$$

(vi) ***Produit***

$$u = \mathrm{o}(v) \text{ et } a = \mathrm{o}(b) \Longrightarrow ua = \mathrm{o}(vb)$$

$$u = \mathrm{O}(v) \text{ et } a = \mathrm{O}(b) \Longrightarrow ua = \mathrm{O}(vb)$$

Démonstration

Toutes ces propriétés se démontrent facilement en passant par le quotient qui doit être bornée/$\to 0$. □

Propriété : Propriétés de ~

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v, w, b ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

(i) *$\sim$ est une relation d'équivalence.*

(ii) *Si $u \sim v$ et $v \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, alors $u \to \ell$.*

(iii) *$u \to \ell \boxed{\neq 0} \Longleftrightarrow u \sim \ell$.*

(iv) *Si $u \sim v$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.*

(v) *Si $u \sim v$ et $a \sim b$, alors $ua \sim vb$ et $\dfrac{u}{a} \sim \dfrac{v}{b}$.*

(vi) *Si $u \sim v$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ **fixé**, ($u_n > 0$ et $v_n > 0$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$, non nuls si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$), $u^\alpha \sim v^\alpha$.*

(vii) *Si $u_n \sim v_n$ et φ extractrice, $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.*

Remarques

R1 – ⚠ $u_n \sim v_n \not\Longleftrightarrow u_n - v_n \to 0$

Exemples

E1 – $n+1 \sim n$ mais $(n+1)-n \not\to 0$.

E2 – $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2} \to 0$ mais $\dfrac{1}{n} \not\sim \dfrac{1}{n^2}$.

R2 – ⚠ Si α n'est pas fixe : $1+\dfrac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \sim \mathrm{e}$ donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \not\sim 1^n = 1$.

R3 – ⚠ On n'ajoute pas les équivalents.

Exemple

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}+\frac{2}{n^2} \text{ mais } \frac{1}{n^2} \not\sim \frac{2}{n^2}.$$

R4 – ⚠ Si on trouve une suite équivalente à 0, on s'est trompé ! (En général, on a ajouté/soustrait des équivalents...)
Cela n'a pas de sens avec la définition du programme, et même avec la généralisation, cela voudrait dire qu'on peut écrire à partir d'un certain rang $u_n = 0 \times w_n = 0$ donc que la suite est nulle à partir d'un certain rang.
En particulier, si $u_n \to 0$, on ne peut pas donner facilement un équivalent en général.

R5 – ⚠ On ne compose pas des équivalent par la gauche avec des fonctions, même continues.

La propriété suivante n'est pas officiellement au programme mais à savoir retrouver :

- $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n} \iff u_n - v_n \to 0$
- Si $u_n \sim v_n$ avec pour tout n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$, à partir d'un certain rang $v_n \neq 1$ et si $v_n \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ avec $\boxed{\ell \neq 1}$, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

En effet,

- $\dfrac{\mathrm{e}^{u_n}}{\mathrm{e}^{v_n}} = \mathrm{e}^{u_n - v_n}$
- $\dfrac{\ln u_n}{\ln v_n} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{u_n}{v_n}\right)}{\ln v_n} \to 1$ car $\ln\left(1+\dfrac{u_n}{v_n}\right) \to 0$ et $\ln v_n \to \ln \ell \neq 0$ ou $\pm\infty$.

Exemple

Détermination d'un équivalent de l'intégrale I_n de Wallis : relation de récurrence, décroissance, $I_n \sim I_{n-1}$ puis nI_nI_{n-1} constant, et conclusion.

Propriété : Formule de Stirling

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Démonstration

Admis provisoirement. Les séries permettent de montrer que $n! \sim K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ et les intégrales de Wallis permettent de voir que $K = \sqrt{2\pi}$. □

Exemple

$u_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.

2 Cas des fonctions

a Définition

Définition

Si $f, g : I \to \mathbb{K}$, a élément ou borne de I, et si au voisinage de a, $g(x) \neq 0$, on dit que

- f est **dominée** par g au voisinage de a et on note $f = \underset{a}{\mathrm{O}}(g)$ ou $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g(x))$ lorsque $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.
- f est **négligeable** devant g au voisinage de a et on note $f = \underset{a}{\mathrm{o}}(g)$ ou $f \underset{a}{\ll} g$ ou $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\ll} g(x)$ lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
- f est **équivalente** à g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$, c'est-à-dire $f = g + \underset{a}{\mathrm{o}}(g)$.

Remarques

R1 – La définition s'étend aux cas où les fonctions sont définies sur des réunions d'intervalles, a étant élément ou borne d'un des intervalles.

R2 – Les remarques faites et les propriétés données pour les suites sont encore valables : on remplace « à partir d'un certain rang » par « au voisinage de a ».

R3 – En particulier, les définitions se généralise au cas où g s'annule trop souvent près de a par l'existence d'une fonction h bornée (respectivement convergeant vers 0 ou 1 lorsque $x \to a$) tel que au voisinage de a, $f(x) = g(x)h(x)$.

R4 – En particulier, $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$ signifie qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ et un voisinage V de a tel que si $x \in I \cap V$, $|f(x)| \leqslant K|g(x)|$.
$f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que si $x \in I \cap V$, $|f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$.

R5 – De nouveau, cela renseigne seulement sur le comportement local d'une fonction : au voisinage de a, mais pas sur le comportement global des fonctions.

b Propriétés

Toutes les propriétés vues sur les suites restent valable.

Propriété : Changement de variable

Si $f : J \to \mathbb{K}$, $g : J \to \mathbb{K}$, a élément ou borne de I, b élément ou borne de J, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ tel que $\varphi(J) \subset I$ et $\varphi(t) \xrightarrow[t\to b]{} a$, alors

- *Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $f(\varphi(t)) \underset{t\to b}{=} \mathrm{o}(g(\varphi(t)))$.*
- *Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$, alors $f(\varphi(t)) \underset{t\to b}{=} \mathrm{O}(g(\varphi(t)))$.*
- *Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $f(\varphi(t)) \underset{x\to a}{\sim} g(\varphi(t))$.*

Les pièges sont les mêmes que pour les suites : pas de somme ou de différence d'équivalents, pas « $f - g \to 0$ », pas d'équivalent à 0, pas de composition par des fonctions à gauche.

- $e^{f(x)} \sim e^{g(x)} \iff f(x) - g(x) \to 0$
- Si $f(x) \sim g(x)$ avec pour tout x, $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$, au voisinage de a, $g(x) \neq 1$ et si $g(x) \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ avec $\boxed{\ell \neq 1}$, alors $\ln(f(x)) \sim \ln(g(x))$.

En effet,

- $\dfrac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^{f(x)-g(x)}$
- $\dfrac{\ln f(x)}{\ln g(x)} = 1 + \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln g(x)} \to 1$ car $\ln\left(1 + \dfrac{f(x)}{g(x)}\right) \to 0$ et $\ln g(x) \to \ln \ell \neq 0$ ou $\pm\infty$.

Propriété

Si $\alpha, \beta, \gamma > 0$,

$$\ln^{\gamma}(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} x^{\alpha} \underset{x\to+\infty}{\ll} e^{\beta x}$$

Remarque

On a facilement que si $\alpha<\beta$, alors $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$ et $x^\beta \underset{x\to 0}{=} o(x^\alpha)$.

C Équivalents usuels

Propriété

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est dérivable en $a \in I$ et si $f'(a) \neq 0$, alors

$$f(x)-f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a).$$

Démonstration

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a) \in \mathbb{K}^*.$$ □

Propriété : Équivalents usuels

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé.

- $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$
- $\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\operatorname{Arcsin} x \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\operatorname{th} x \underset{x\to 0}{\sim} x$

Si $f(x) = a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_n x^n$ avec $p \leqslant n$, $a_p \neq 0$ et $a_n \neq 0$, alors

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n.$$

Démonstration

Conséquences de la propriété précédente.
$\cos x - 1 = -2\sin^2 \dfrac{x}{2}$. □

Remarque

Lorsque l'on est au voisinage de a, on se ramène en général au voisinage de 0 en posant $x = a+h$ si a est fini et $x = \frac{1}{h}$ si a est infini.

Exemples

E 1 – Limite de $u_n = n\left(\left(1-\sin\dfrac{1}{n^2}\right)^n - 1\right)$.

E2 – Limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{\left((x+1)^{1/x} - x^{1/x}\right)(x\ln x)^2}{x^{\left(x^{1/x}\right)} - x}$.

II Développements limités

1 Définition

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{R}$ élément ou borne de I.

On dit que f admet un **développement limité d'ordre n en a** (abrégé en $\mathrm{DL}_n(a)$) lorsque l'on a $(a_0,\ldots,a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n}_{\text{partie régulière}} + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right)$$

ie

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^n\right)$$

ie on a une fonction ε telle que $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + h^n \varepsilon(h)$$

Remarques

R1 – Quitte à poser $x = a+h$ c'est-à-dire $h = x-a$, un $\mathrm{DL}_n(a)$ peut toujours se ramener à un $\mathrm{DL}_n(0)$.

R2 – Les termes sont toujours écrits par négligeabilité croissante :

$$a_0 \underset{h\to 0}{\gg} h \underset{h\to 0}{\gg} h^2 \underset{h\to 0}{\gg} \cdots \underset{h\to 0}{\gg} h^n \underset{h\to 0}{\gg} \mathrm{o}\left(h^n\right)$$

On rappelle au passage que si $n > p$, $h^n = \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^p)$.

R3 – Cela permet d'avoir des renseignements sur le comportement local de f, au voisinage de a. Cela ne dit absolument rien sur le comportement global de la fonction.

Définition : Forme normalisée du développement limité

On appelle **forme normalisée** du $\mathrm{DL}_n(a)$ de f l'écriture

$$f(a+h) = h^p\left(b_0 + b_1 h + \cdots + b_{n-p} h^{n-p} + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^{n-p}\right)\right)$$

avec $(b_0,\ldots,b_{n-p}) \in \mathbb{K}^{n-p+1}$ et $b \neq 0$.

Remarque

Cela revient donc à factoriser par le terme de plus bas degré dans le développement limité.

Exemples

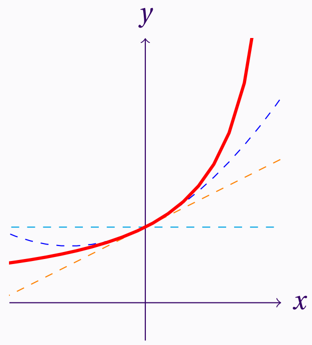
E1 – $\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$ donc $\cos x = 1 - \dfrac{x}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^2\right)$ est un $\mathrm{DL}_3(0)$ de cos.

E2 – Si $|x|<1$, $1+x+\cdots+x^n = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x}{1-x}x^n$ donc $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+\cdots+x^n + \underbrace{\underbrace{\dfrac{x}{1-x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} \times x^n}_{= \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)}$.

À connaître parfaitement : les $\mathrm{DL}_n(0)$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^n\right)$$



E3 – $\mathrm{DL}_n(2)$ de $\dfrac{1}{x}$.

2 Unicité et troncature

Propriété

(i) Si f admet un développement limité à l'ordre n en a avec au moins un terme non nul dans la partie régulière, alors f est équivalente en a au premier terme non nul de celle-ci.

(ii) Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, les cœfficients de celui-ci sont uniques.

(iii) Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, alors pour tout $p \leqslant n$, f admet un développement limité à l'ordre p en a de mêmes cœfficients.

Démonstration

(i) Si le premier terme non nul en celui de degré i_0, alors on peut écrire $f(a+h) = a_{i_0}h^{i_0} + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^{i_0}\right)$ avec $a_{i_0} \neq 0$ donc $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_{i_0}h^{i_0}$ donc $f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_{i_0}(x-a)^{i_0}$.

(ii) Si $f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \mathrm{o}(h^n) = b_0 + b_1 h + \cdots + b_n h^n + \mathrm{o}(h^n)$ alors $(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)h + \cdots + (a_n - b_n)h^n = h^n \varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

En faisant $h \to 0$, on obtient $a_0 = b_0$ et donc $(a_1 - b_1) + \cdots + (a_n - b_n)h^{n-1} = h^{n-1}\varepsilon(h)$. Et ainsi de suite, par récurrence finie, on obtient que $a_i = b_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

(iii) $a_{p+1}h^{p+1} + \cdots + a_n h^n + \mathrm{o}(h^n) = \mathrm{o}(h^p)$ et unicité du DL. □

3 Parité

Propriété

Si f est paire (respectivement impaire), les DL$_n(0)$ de f n'ont que des termes de degrés pairs (respectivement impairs).

Remarque

Ce n'est valable qu'en 0 et la réciproque est fausse.

Démonstration

Unicité du DL en développant $f(x)$ et $f(-x)$ au voisinage de 0. □

Remarque

Si f est paire, les DL$_{2n}(0)$ et DL$_{2n+1}(0)$ de f ont même partie régulière. Il suffit de changer $\mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$ en $\mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$.

4 Primitivation

Propriété : Primitivation de DL

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant un $DL_n(a)$ avec $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Toute primitive F de f sur I admet un $DL_{n+1}(a)$

$$F(x) = \boldsymbol{F(a)} + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

obtenu par primitivation terme à terme du DL de f.

Démonstration

On peut supposer $a=0$ quitte à poser $g(x) = f(a+x)$.

$$f(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Soit $\varphi(x) = F(x) - F(a) - a_0 x - \frac{a_1}{2}x^2 - \cdots - \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$.

On veut montrer que $\varphi(x) = \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)$.

Or φ est dérivable sur I et $\varphi' : x \mapsto f(x) - a_0 - \cdots - a_n x^n = \mathrm{o}(x^n)$.
Soit $\varepsilon > 0$. On a $\eta > 0$ tel que si $|t| \leqslant \eta$, $\left|\varphi'(t)\right| \leqslant \varepsilon |t|^n$.
En particulier, si $x \neq 0$ et $|x| \leqslant \eta$, alors $\left|\varphi'(t)\right| \leqslant \underbrace{\varepsilon |x|^n}_{\text{indépendant de } t}$ sur $]0 \,\overleftrightarrow{,}\, x[$.

Par inégalité des accroissements finis, $\left|\varphi(x) - \varphi(0)\right| = \left|\varphi(x)\right| \leqslant \varepsilon |x|^n |x-0| = \varepsilon |x|^{n+1}$
Donc $\varphi(x) = \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)$. □

Corollaire : Dérivation de DL

Si f dérivable sur I admet un DL_n en $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

*et **si f' admet un DL_{n-1} en** a alors il s'obtient en dérivant terme à terme.*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n-1}\right).$$

Démonstration

Il suffit de primitiver le DL_{n-1} de f' avec la propriété précédente et d'invoquer l'unicité du DL. □

Remarque

⚠ Il est possible que f' n'admette pas de DL ! Voir contre-exemple ci-après.

5 Existence et calculs de développements limités

a Conditions nécessaires et suffisantes

Propriété

(i) f admet un $DL_0(a)$ de partie régulière a_0 si et seulement si f admet une limite en a (éventuellement à gauche/à droite lorsque f est définie à gauche/à droite de a) et cette limite vaut a_0.
En particulier, si f est définie en a, f admet un DL_0 en a si et seulement si f est continue en a et $a_0 = f(a)$.

(ii) Si f est définie en a, f admet un DL_1 en a si et seulement si f est dérivable en a et alors $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$.
Si f n'est pas définie en a, f admet un DL_1 en a si et seulement si f est prolongeable en a en une fonction $\tilde{f}$ dérivable en a et alors $a_0 = \tilde{f}(a)$ et $a_1 = \tilde{f}'(a)$.

Démonstration

(i) $f(x) = a_0 + \mathrm{o}(1) \Longleftrightarrow f(x) \xrightarrow[x\to a]{} a_0$.

(ii) $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \mathrm{o}(x-a) \Longleftrightarrow f(x) \xrightarrow[x\to a]{} a_0$ et $\dfrac{f(x)-a_0}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} a_1$. □

Exemple

Si $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$, alors $f(x) = \mathrm{o}(x)$ est un $\mathrm{DL}_1(0)$ de f (et au passage f est dérivable en 0).
Or $f'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0 donc f' n'admet pas de $\mathrm{DL}_0(0)$.

b Condition suffisante

Théorème : Formule de Taylor-Young

Si $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in I$ tel que f soit de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors f admet un DL_n en a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$$

ie

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \mathrm{o}\big(h^n\big)$$

⚠ *La réciproque est fausse : l'existence d'un DL_n en a n'implique pas en général que f est n fois dérivable en a si $n \geqslant 2$.*

Remarque

L'hypothèse du programme officielle est f de classe $\mathscr{C}^n$, mais il suffit qu'elle soit $n-1$ fois dérivable et que $f^{(n-1)}$ soit dérivable en a.

Démonstration

On a déjà vu que c'est vrai pour $n=1$.

Si c'est vrai à l'ordre $n-1$, et si f admet une dérivée d'ordre $n \geqslant 1$ en a, alors f' admet une dérivée d'ordre $n-1$ en a et par hypothèse de récurrence,

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n-1}\right).$$

Alors, par primitivation de DL,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

ce qui établit la récurrence.

Pour la réciproque, si $f(x) = x^3 \sin\frac{1}{x}$ prolongé par continuité par 0 en 0, on a $f(x) = \mathrm{o}\left(x^2\right)$ qui est un DL$_2$ de f en 0 et pourtant $f' : x \mapsto 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et 0 sinon n'est pas dérivable en 0. □

C Développements limités usuels

Propriété : DL$_n(0)$ usuels

- $\exp x = 1 + x + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^n\right)$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \left|\begin{array}{l} \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n}\right) \\ \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right) \end{array}\right.$
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \left|\begin{array}{l} \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right) \\ \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right) \end{array}\right.$
- $\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \left|\begin{array}{l} \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n}\right) \\ \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right) \end{array}\right.$
- $\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \left|\begin{array}{l} \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right) \\ \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right) \end{array}\right.$

Démonstration

Formule de Taylor-Young. □

Remarques

R1 – ch et sh sont les parties paire et impaire de $\exp$.

R2 – $\cos = \mathrm{ch}$ alterné $= \mathfrak{Re}\left(e^{ix}\right)$ et $\sin = \mathrm{sh}$ alterné $= \mathfrak{Im}\left(e^{ix}\right)$

Propriété

Si $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}}_{\text{noté } \binom{\alpha}{k}} x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Démonstration

Formule de Taylor-Young. □

Exemples

E1 – $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.

E2 – $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n} = (-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}$.

Propriété

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\mathrm{Arctan}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \left| \begin{array}{l} \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right) \\ \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right) \end{array} \right.$

Démonstration

Les deux premiers ont été vu (somme géométrique), les trois suivants s'obtiennent par primitivation. □

Exemples

E 1 – $\tan^2 x \sim x^2$ donc $\tan'(x) = 1 + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ donc, par imparité, $\tan x = 0 + x + \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$.

$\mathrm{th}^2 x \sim x^2$ donc $\mathrm{th}'(x) = 1 - x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ donc $\mathrm{th}\, x = 0 + x - \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$.

E 2 – $\mathrm{DL}_4(0)$ de Arcsin par primitive : $\mathrm{Arcsin}\, x = x + \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$.

d Opérations algébriques

Propriété

Si f et g admettent des $\mathrm{DL}_n(a)$, toute combinaison linéaire de f et g admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ dont la partie régulière est la combinaison linéaire des parties régulières.

$f \times g$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ de partir régulière la troncature des parties régulières aux termes $(x-a)^k$ avec $k \leqslant n$.

Démonstration

En $a = 0$,

Pour $\alpha f + \beta g$: $\alpha \mathrm{o}\left(x^n\right) + \beta \mathrm{o}\left(x^n\right) = \mathrm{o}\left(x^n\right)$.

Pour $f \times g$, en notant $p_n(x)$ et $q_n(x)$ les parties régulières, (les termes de degré $> n$ dans $p_n \times q_n$) $+ p_n(x) \times \mathrm{o}\left(x^n\right) + q_n(x) \times \mathrm{o}\left(x^n\right) + \mathrm{o}\left(x^n\right) \times \mathrm{o}\left(x^n\right)$ est un $\mathrm{o}\left(x^n\right)$. □

Exemples

E 1 – $\mathrm{DL}_4(0)$: $\mathrm{e}^x + \sin x = 1 + 2x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$.

E 2 – $\mathrm{DL}_4(0)$: on optimise en considérant la forme normalisée du DL.

$$\mathrm{e}^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right).$$

Propriété

- $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^7\right)$
- $\mathrm{th}\, x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{17x^7}{315} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^7\right)$

Remarques

R 1 – $17 = 2 + 15$ et $315 = 3\ 15$!

R 2 – $\sin = + - + - + - \cdots$, $\cos = + - + - + - \cdots$ et $\tan = \dfrac{\sin}{\cos} = + + + + + + + \cdots$

Démonstration

tan admet un $\mathrm{DL}_7(0)$ d'après la formule de Taylor-Young, avec seulement des termes de degré impairs. La relation $\tan' = 1+\tan^2$ et l'unicité des cœfficients du DL permet de déterminer facilement les 4 cœfficients. □

e Composition et quotients

On peut aussi calcul des DL par composition : si f, g admettent des $\mathrm{DL}_n(0)$ et si $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, la partie régulière de $f\circ g$ s'obtient en composant les parties régulières et en ne gardant que les termes de degré au plus n.

Pour les quotients on se ramène à du $\dfrac{f(x)}{1\pm g(x)}$ avec $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et on utilise le DL de $\dfrac{1}{1\pm x}$.

En général, on considère la forme normalisée du DL pour optimiser l'ordre de développement (pas toujours simple à prévoir !)

Exemples

E 1 – $\ln(1+\mathrm{e}^x) = \ln 2 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$

E 2 – $\dfrac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x - 1} = 1 - x + \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{11}{24}x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$

E 3 – $\mathrm{e}^{\cos x} = \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{2}x^2 + \dfrac{\mathrm{e}}{6}x^4 + \mathrm{o}\left(x^5\right)$

E 4 – $\mathrm{e}^{\cos x} = 1 - \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{8}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^4 + \mathrm{o}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^4\right)$

E 5 – $\mathrm{DL}_5(0)$ de tan avec $\dfrac{\sin}{\cos}$ et $\mathrm{Arctan}(\tan) = \mathrm{id}$.

6 Développement limité en $\pm\infty$

Définition

On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ tel que $\pm\infty$ borne de I admet un **développement limité à l'ordre n en $\pm\infty$** lorsque $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0^{\pm})$, c'est-à-dire lorsque l'on a $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \underset{x\to\pm\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Remarque

Souvent, on pose $h = \frac{1}{x}$ lorsque l'on veut étudier une fonction au voisinage de l'infini afin de se ramener au voisinage de 0.

Exemple

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \underset{x\to\pm\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

7 Développement limité généralisé

Définition

$f : I \to \mathbb{K}$ admet un **développement limité généralisé à l'ordre n en 0** si on a $m \in \mathbb{N}$ tel que $x^m f(x)$ admet un $\mathrm{DL}_{n+m}(0)$, c'est-à-dire si on a $(a_{-m}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+m+1}$ tels que

$$f(x) = \frac{a_{-m}}{x^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{x} + a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n).$$

Exemple

$\mathrm{DLG}_3(0)$ de cotan : $\operatorname{cotan} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \mathrm{o}(x^3)$.

III Applications des développements limités

1 Recherche d'équivalents et de limites

Pour obtenir un équivalent, il suffit d'avoir un développement limité (éventuellement généralisé) avec au moins un terme non nul.

Cela permet en outre d'obtenir l'éventuelle limite de la fonction.

Exemple

Équivalent et limite en 0 de $f(x) = \dfrac{2\tan x - \tan(2x)}{(1-\cos(3x))\left(\sqrt{1+x}-1\right)}$.

2 Étude locale d'une courbe

a Signe local

Si f admet un DL$_n(a)$ (éventuellement généralisé) de la forme

$$f(a+h) = a_p h^p + \ldots + a_n h^n + \mathrm{o}\left(h^n\right)$$

avec $a_p \neq 0$, alors $f(x) \sim a_p(x-a)^p$ en a.

Donc, **au voisinage de** a,

p	$a_p > 0$	$a_p < 0$
pair	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$
impair	$f(x) < 0$ si $x < a$ $f(x) > 0$ si $x > a$	$f(x) > 0$ si $x < a$ $f(x) < 0$ si $x > a$

Cela se généralise au cas d'un développement au voisinage de l'infini.

b Condition nécessaire et suffisante d'extremum local

Propriété

Si f est définie en $\boxed{a \in \overset{\circ}{I}}$ admet un développement limité en a du type

$$f(a+h) = f(a) + a_n h^n + \mathrm{o}\left(h^n\right)$$

avec $a_n \neq 0$ alors f présente un extremum local en a si et seulement si n est pair.
C'est alors un maximum si $a_n > 0$ et un minimum si $a_n < 0$.

Remarque

On retrouve la condition nécessaire $f'(a) = a_1 = 0$ si f est dérivable en a.

Démonstration

$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} a_n (x-a)^n$ ont même signe au voisinage de a. □

Corollaire

Si, de plus, f est de classe $\mathscr{C}^n$, alors $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.
Ainsi, si f est suffisamment régulière, f admet un extremum local en a si et seulement si $\min\{k \in \mathbb{N}^* \ ; \ f^{(k)}(a) \neq 0\}$ est pair (s'il existe).

Remarque

L'ensemble peut être vide, par exemple pour $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$, 0 sinon.

Exemple

$f(x) = \dfrac{x}{\tan x}$ si $x \neq 0$ prolongée par continuité en 0 admet un maximum local en 0.

c Tangente

Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ tel que $f(x) = f(a) + a_1(x-a) + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n)$ avec $a_n \neq 0$, f est dérivable en a, $a_1 = f'(a)$ et

$$f(x) - \underbrace{\left(f(a) + f'(a)(x-a)\right)}_{\text{équation de la tangente}} \underset{x \to a}{\sim} a_n (x-a)^n.$$

	n pair	n impair
$a_n > 0$	courbe loc. au-dessus de la tan. **localement convexe**	courbe traverse la tan. **point d'inflexion**
$a_n < 0$	courbe loc. au-dessous de la tan. **localement concave**	courbe traverse la tan. **point d'inflexion**

Exemple

$f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ prolongé par continuité en 0.

3 Asymptote

Pour étudier les courbes asymptotes d'une fonction en $\pm\infty$, il suffit d'effectuer un développement asymptotique au voisinage de l'infini pour obtenir une fonction g telle que $f(x) - g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Alors $y = g(x)$ est asymptote.

Si, par exemple, $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{c^n}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$ avec $c \neq 0$ et $n \geqslant 1$, alors $y = ax+b$ est asymptote et $f(x)-ax-b \sim \dfrac{c}{x^n}$ donc suivant le signe de c et la parité de n, on a la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exemple

Étude de $f(x) = (x+1)\operatorname{Arctan} x$ au voisinage de $+\infty$.
$f(x) = \dfrac{\pi}{2}x + \dfrac{\pi-2}{2} - \dfrac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$: $y = \dfrac{\pi}{2}x + \dfrac{\pi-2}{2}$ est asymptote et la courbe est en dessous.

IV EXEMPLES DE DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

1 Définition

Définition

On appelle **développement asymptotique** de f en a toute expression de la forme

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_r(x) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big(f_r(x)\big)$$

où $f_1, \dots, f_r$ sont des fonctions telles que $f_1(x) \underset{x\to a}{\gg} f_2(x) \underset{x\to a}{\gg} \cdots \underset{x\to a}{\gg} f_r(x)$, c'est-à-dire telles que $\forall\, k \in [\![1, r-1]\!],\quad f_{k+1}(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big(f_k(x)\big)$.

On dit que le développement asymptotique est **à la précision** $f_r(x)$.

Remarque

On a toujours que $f(x) - f_1(x) - \cdots - f_k(x) \underset{x\to a}{\sim} f_{k+1}(x)$. C'est un des moyen de former un développement asymptotique : par la recherche d'équivalents successifs.

Exemples

E1 – Développement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto e^{\sqrt{x^2+2x+4}}$ à la précision $\dfrac{e^x}{x}$.

$$e^{\sqrt{x^2+2x+4}} = e\cdot e^x + \frac{3e}{2}\cdot\frac{e^x}{x} + o\left(\frac{e^x}{x}\right)$$

E2 – Développement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x)$ à la précision e^{-4x}. Asymptote ?

$$\ln(\operatorname{ch} x) = x - \ln 2 + e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-4x} + o\left(e^{-4x}\right)$$

$y = x - \ln 2$ asymptote et la courbe est au-dessus.

E3 – Développement asymptotique à trois termes de $x^{1+\frac{1}{x}}$ en $+\infty$. Asymptote ?

$$x^{1+\frac{1}{x}} = xe^{\frac{\ln x}{x}} = x\left(1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln^2 x}{2x^2} + o\left(\frac{\ln^2 x}{x^2}\right)\right) = x + \ln x + \frac{\ln^2 x}{2x} + o\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right)$$

avec $\dfrac{\ln^2 x}{2x} + o\left(\dfrac{\ln^2 x}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $y = x + \ln x$ est asymptote et la courbe est au-dessus.

2 Suite définie implicitement

Exemples

E1 – Unique zéro de $f_n(x) = 1 + x + \dfrac{e^x}{n}$.

1. Existence de u_n, $u_n \leqslant -1$, (u_n) croit.
2. Limite de (u_n).
3. Développement asymptotique à 3 termes.

E2 – u_n unique solution de $\tan x = x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

1. Existence de u_n..
2. Monotonie et limite de (u_n).
3. Équivalent de u_n.
4. Développement asymptotique à 2 termes de u_n en posant $v_n = u_n - n\pi = \operatorname{Arctan} u_n$.
5. Développement asymptotique à 4 termes de u_n en réutilisant v_n.