Dérivation des fonctions numériques

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé.	Développement limité à l'ordre 1. Interprétation géométrique. ⇆ SI : identification d'un modèle de comportement au voisinage d'un point de fonctionnement. ⇆ SI : représentation graphique de la fonction sinus cardinal au voisinage de 0. ⇆ I : méthode de Newton.
La dérivabilité entraîne la continuité.	
Dérivabilité à gauche, à droite.	
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.	
Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une réciproque.
b) Extremum local et point critique	
Extremum local.	
Condition nécessaire en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle.	Utilisation pour établir l'existence de zéros d'une fonction.
Égalité des accroissements finis.	Interprétations géométrique et cinématique.
Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\lvert f'\rvert$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.	La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.	Interprétation géométrique. Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et f' est continue en a.

d) Fonctions de classe C^k

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$.	
Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.
Théorème de classe $\mathscr{C}^k$ par prolongement : si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$ et si $f^{(i)}(x)$ possède une limite finie lorsque x tend vers a pour tout $i \in \{0, \ldots, k\}$, alors f admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.	

e) Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Le résultat, admis à ce stade, sera justifié dans le chapitre « Intégration ».

Table des matières

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle réel contenant au moins deux points.

I DÉRIVABILITÉ

1 Nombre dérivé et fonction dérivée

a Dérivabilité en un point : quelques rappels

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. On dit que f **est dérivable en** a si et seulement si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite lorsque $x \to a$ si et seulement si $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite lorsque $h \to 0$.

Cette limite est alors notée $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ et appelée **nombre dérivé de f en a**.

Lorsqu'elle existe, on a donc

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Remarques

R1 – **Interprétation géométrique** : Il s'agit de la limite des cordes dont une extrémité est le point $(a, f(a))$ lorsque $x \to a$.
D'où l'équation de la tangente en a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \to \infty$, f n'est pas dérivable en a, mais il y a une tangente verticale.

R2 – Si on note $\tau_{f,a}(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, c'est-à-dire $f(x) = f(a) + (x-a)\tau_{f,a}(x)$, alors f est dérivable en a si et seulement si $\tau_{f,a}$ est prolongeable par continuité en a.

Propriété

f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue en a telle que $\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + (x-a)\varphi(x)$.

Dans ce cas, $f'(a) = \varphi(a)$.

Démonstration

Si f est dérivable en a, $\tau_{f,a}$ prolongé par continuité en a convient.
Si on a une telle φ, alors pour tout $x \neq a$, $\tau_{f,a}(x) = \varphi(x)$ qui a bien une limite finie en a qui est $\varphi(a)$. □

Propriété : dérivable $\Longrightarrow$ continue

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
La réciproque est fausse.

Démonstration

Pour tout $x \neq a$, $f(x) = f(a) + (x-a)\tau_{f,a}(x)$ a bien une limite pour $x \to a$ qui vaut $f(a)$.
Pour la réciproque, on peut considérer $|\cdot|$ en 0. □

b Dérivabilité à gauche, à droite

Définition

Si $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. f est dite **dérivable à gauche** (respectivement **à droite**) de a lorsque $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à gauche (respectivement à droite) de a, notée $f'_g(a)$ (respectivement $f'_d(a)$).

Remarques

- R1 – Cela donne des demi-tangentes à gauche et à droite de a.
- R2 – Si $I = [a, b[$ ou $[a, b]$, f est dérivable en a si et et seulement si f est dérivable à droite de a.

Exemple

$x \mapsto |x|$ en 0.

Propriété

Si $a \in \mathring{I}$, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite de a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
On a alors $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$

Démonstration

Définition de la limite de $\tau_{f,a}(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ définie sur $I \setminus \{a\}$. □

Exemple

$f(x) = \mathrm{e}^{-1/x}$ si $x \geqslant 0$, 0 sinon.

C Opérations algébriques

Propriété

Si $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $f + g$ dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

(ii) $f \times g$ dérivable en a et $(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

(iii) λf dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

(iv) Si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Démonstration

(i) $\tau_{f+g,a} = \tau_{f,a} + \tau_{g,a}$.

(ii) $\tau_{f\times g,a}(x) = \tau_{f,a}(x)g(x) + f(a)\tau_{g,a}(x)$ avec f continue en a.

(iii) $\tau_{\lambda f,a} = \lambda \tau_{f,a}$.

(iv) $\tau_{\frac{1}{g},a}(x) = \dfrac{-\tau_{g,a}(x)}{g(x)g(a)}$ avec g continue en a donne $\left(\frac{1}{g}\right)'$ puis $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$. □

Remarques

R1 – Si f est dérivable en a, par récurrence, $f^n = f \times \cdots \times f$ et

$$\left(f^n\right)'(a) = nf'(a)f^n(a).$$

R2 – Plus généralement, si $f_1, \ldots, f_n$ sont dérivables en a, $f_1 \times \cdots \times f_n$ l'est aussi et

$$\left(f_1 \times \cdots \times f_n\right)'(a) = \sum_{k=1}^{n} f_1(a) \ldots, f_{k-1}(a) f_k'(a) f_{k+1}(a) \cdots f_n(a).$$

d Composition

Propriété

Soient I, J sont des intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$ et $a \in I$.

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g' \circ f(a).$$

Démonstration

- **Première tentative** : $\tau_{f \circ g, a}(x) = \tau_{f,a}(x) \times \tau_{g, f(a)}\left(f(x)\right) \xrightarrow[x \to a]{} f'(a) \times g'\left(f(a)\right)$.

  ⚠ Problème ? $f(x)$ peut être égal à $f(a)$ trop souvent au voisinage de a...
- **Deuxième tentative** : On a des fonctions φ_f et φ_g continues respectivement en a et $b = f(a)$ telles que si $x \in I$,

  $$f(x) = f(a) + (x-a)\varphi_f(x)$$

  et si $y \in J$,

  $$g(y) = g(b) + (y-b)\varphi_g(y).$$

  Alors, si $x \in I$,

  $$g\left(f(x)\right) = g(b) + \left(f(x) - b\right)\varphi_g\left(f(x)\right) = g\left(f(a)\right) + (x-a)\varphi_f(x)\varphi_g\left(f(x)\right)$$

  Et donc

  $$g \circ f(x) = g \circ f(a) + (x-a)\varphi_{g \circ f}(x)$$

  où $\varphi_{g \circ f} : x \mapsto \varphi_f(x)\varphi_g\left(f(x)\right)$ est continue en a par opérations sur des fonctions continues. Donc $g \circ f$ est dérivable en a, et

  $$g \circ f(a) = \varphi_{g \circ f}(a) = \varphi_f(a)\varphi_g\left(f(a)\right) = f'(a) \times g'\left(f(a)\right). \quad \square$$

e Dérivée d'une réciproque

Théorème

Si I, J intervalles, $f : I \to J$ bijective, continue sur I et $a \in I$ tel que f est dérivable en a.

Alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) = f'\left(f^{-1}(b)\right) \neq 0$ et alors

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Si $f'(a) = 0$, alors le graphe de f admet une tangente verticale en $b = f(a)$.

Remarque

Dans tous les cas, la tangente en $\left(b, f^{-1}(b)\right) = \left(f(a), a\right)$ à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ est l'image par la symétrie d'axe d'équation $y = x$ de la tangente en $(a, f(a))$ à $\mathscr{C}_f$.

Démonstration

Si $y \neq b = f(a)$ et $x = f^{-1}(y)$ alors $x \neq a$ et $\tau_{f^{-1},b}(y) = \dfrac{1}{\tau_{f,a}(x)}$.

Or $y \to b \Longrightarrow f^{-1}(y) = x \to a = f^{-1}(b)$ par continuité de f^{-1} en b car f étant injective et continue sur I, elle est strictement monotone et le théorème de la bijection s'applique. Comme $\tau_{f,a}(x) \xrightarrow[x \to a]{} f'(a)$, on a bien :

- soit $f'(a) \neq 0$ et f^{-1} est dérivable en b et $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$;
- soit $f'(a) = 0$ et $\left|\tau_{f^{-1},b}(y)\right| \xrightarrow[y \to b]{} +\infty$ donc f^{-1} n'est pas dérivable en b et il y a une tangente verticale. □

Remarque

Pour retrouver la formule, il suffit de dériver $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$.

2 Fonction dérivée

Définition : Fonction dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. f est dite **dérivable sur** I lorsque f est dérivable en tout $a \in I$.

On définit alors la fonction dérivée

$$f' = \mathrm{D}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right. .$$

Les propriétés de dérivation de somme, produit, combinaison linéaire quotient par une fonction jamais nulle de fonctions dérivable s'étendent naturellement aux fonctions dérivables sur un intervalle.

Propriété

Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$,

(i) $f+g$, $f \times g$, λf sont dérivables sur I et $(f+g)' = f'+g'$, $(fg)' = f'g+fg'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$.

(ii) Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

(iii) Si $h : J \to \mathbb{R}$ dérivable sur J tel que $f(I) \subset J$, alors $h \circ f$ est dérivable et $(h \circ f)' = f' \times h' \circ f$.

Propriété

Si $f : I \to J$ bijective et dérivable sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $\{f(x)\ ;\ x \in I \text{ et } f'(x) \neq 0\}$ et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Remarque

L'hypothèse de continuité n'est plus utile ici.

II DÉRIVÉES SUCCESSIVES ET CLASSE D'UNE FONCTION

1 Définition

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Lorsque f est dérivable n fois, note $f^{(n)}$ sa dérivée n^e tel que $f^{(0)} = f$ et pour tout k, $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.
- Si $k \in \mathbb{N}$, f est **de classe $\mathscr{C}^k$ sur** I lorsque f est k fois dérivable et $f^{(k)}$ est continue sur I. On note $\mathscr{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
- f est **de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur** I lorsque f est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire lorsque f est indéfiniment dérivable.

Remarques

R1 – $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$.

R2 – $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $\left(f^{(p)}\right)^{(q)} = f^{(p+q)}$.

R3 – On retrouve l'ensemble $\mathscr{C}^0(I)$ des fonctions continues sur I.

R4 – On peut être k fois dérivable sans être de classe $\mathscr{C}^k$.
Par exemple $f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ est dérivable en 0 sans y être de classe $\mathscr{C}^1$.

Propriété

Si $n \geqslant 1$, f est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) si et seulement si f dérivable et f' est $n-1$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^{n-1}$).

Alors $f^n = \left(f'\right)^{(n-1)}$.

2 Opérations

Propriété

Soient $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) *$f+g$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I et*

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.$$

(ii) *λf est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I et*

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

(iii) ***Formule de Leibniz***
$f \times g$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

(iv) *Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I.*

(v) *Si $h : J \to \mathbb{R}$, tel que $f(I) \subset J$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur J, $f \circ g$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I.*

Remarque

Le formule de Faa di Bruno (hors-programme) donne une expression de $(f \circ g)^{(n)}$.

Démonstration

Toutes ces propriétés se démontrent par récurrence sur n.

- Par exemple, pour la formule de Leibniz. Elle est vraie pour $n = 0$. Si on la suppose vrai pour un $n \geqslant 0$, et si f et g sont $n+1$ fois dérivables, alors ils le sont n fois, donc par hypothèse de récurrence, $f \times g$ l'est et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Toutes les fonctions intervenant dans la somme étant (au moins) une fois dérivable, on peut dériver de nouveau :

$$\begin{aligned}(f\times g)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k+1)}g^{(n-k)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(k)}g^{(n+1-k)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(k)}g^{(n+1-k)}+\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)f^{(k)}g^{(n+1-k)}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}\end{aligned}$$

d'après la formule de Pascal, ce qui établit la récurrence.

- Pour la composée, c'est vrai pour $n=0$ et si c'est vrai pour un $n\geqslant 0$, alors si f et h sont $n+1$ fois dérivables, elles le sont une fois et $(h\circ f)'=f'\times h'\circ f$ qui est n fois dérivable par hypothèse de récurrence, donc $h\circ f$ est $n+1$ fois dérivable.
- Pour la classe $\mathscr{C}^n$, il suffit de rajouter la continuité de la dernière dérivée dans les preuve.
- Le résultat devient immédiat pour la classe $\mathscr{C}^\infty$. □

Propriété : Fonctions usuelles

Les fonctions usuelles $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\ln$, ch, sh, th, Arctan *et polynomiales ou rationnelles sont de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur leur ensemble de définition.*

Les fonctions Arcsin *et* Arccos *sont de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $]-1,1[$.

$\sqrt{\cdot}$ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice

Calculer la dérivée n^{e} de $x\mapsto x^2\cos x$ et la dérivée n^{e} de $x\mapsto \mathrm{e}^x\cos x$ par deux méthodes.

3 $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes

Définition : $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes

$f : I \to J$ est un **$\mathscr{C}^k$-difféomorphisme** lorsque
- f est bijective,
- f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,
- f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.

Remarque

Un $\mathscr{C}^0$-difféomorphisme est un homéomorphisme.

Propriété

Soit $f : I \to J$ bijective de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k \geqslant 1$.
Alors f est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme (ie f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J) si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

Remarque

Comme f' est continue, si elle ne s'annule pas, elle garde un signe constant et f est strictement monotone, donc injective automatiquement.

Démonstration

Le sens $\Longrightarrow$ est déjà connu.
Pour l'autre sens, par récurrence sur k.
Pour $k = 1$, on sait déjà que f^{-1} est dérivable sur J si et seulement si f' ne s'annule pas. Ensuite $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est continue par opérations.
Si c'est vrai pour $k - 1 \geqslant 1$ et f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est dérivable et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ car f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ par hypothèse de récurrence. Donc f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$. $\square$

III APPLICATIONS DE LA DÉRIVABILITÉ

1 Condition nécessaire d'extremum local

Définition : Extremum local

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.

(i) On dit que f admet **un minimum** (respectivement **maximum**) **local** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in I \cap V,\quad f(x) \geqslant f(a)$ (respectivement $f(x) \leqslant f(a)$).

(ii) On dit que f admet **un minimum** (respectivement **maximum**) **local strict** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in I \cap V,\quad f(x) > f(a)$ (respectivement $f(x) < f(a)$).

On parle alors d'**extremum local**.
Lorsque $V = \mathbb{R}$, on parle d'**extremum global**.

Remarque

Ainsi, f admet un minimum (respectivement maximum) local en a si et seulement si

$$\exists \eta > 0 \mid \forall x \in I,\quad |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant f(a) \text{ (respectivement } f(x) \leqslant f(a)\text{).}$$

si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall h \in \mathbb{R},\quad a+h \in I \text{ et } |h| \leqslant \varepsilon \Longrightarrow f(a+h) \geqslant f(a) \text{ (respectivement } f(a+h) \leqslant f(a)\text{).}$$

Définition : point critique

Si $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overset{\circ}{I}$ tel que f dérivable en a. On dit que a est un **point critique** de f lorsque $f'(a) = 0$.

Propriété : Condition nécessaire d'extremum local

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que

H1 : $a \in \overset{\circ}{I}$

H2 : *f est dérivable en a*

H3 : *f admet un extremum local en a*

Alors a est un pont critique de f : $f'(a)=0$.

La réciproque est fausse.

Remarques

R1 – $a \in \overset{\circ}{I}$ est **indispensable** ! Par exemple $f : \left|\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}\right.$ admet en 0 et 1 est des extrema globaux mais $f'(0)=f'(1)\neq 0$.

R2 – $f : x \mapsto |x|$ admet un minimum global en 0 sans être dérivable en 0.

R3 – Les extrema sont à chercher **parmi** les points intérieurs critiques et les points au bord.

Démonstration

Si, par exemple, f admet un maximum local en a, alors si $x>a$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant 0$ et si $x<a$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant 0$. Donc la limite commune $f'(a)$ est à la fois positive et négative donc nulle. □

2 Théorème de Rolle

Théorème : Théorème de Rolle

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$ et $f : [a,b]\to\mathbb{R}$. Si

H1 : *f est continue sur $[a,b]$*

H2 : *f est dérivable sur $]a,b[$*

H3 : $f(a)=f(b)$

Alors $\exists\, c\in]a,b[\mid f'(c)=0$.

(Dessin)

Remarques

R1 – La conclusion s'écrit aussi $\exists\, t\in]0,1[\mid f'(a+th))=0$ où $h=b-a$.

R2 – **Interprétation cinématique** : Si un mobile M a une trajectoire **rectiligne** tel que $\mathrm{M}(t_0)=\mathrm{M}(t_1)$ alors il existe un instant $t\in]t_0,t_1[$ tel que $v_{\mathrm{M}}(t)=0$.

Démonstration

Puisque f est continue sur $[a,b]$, elle est bornée et atteint ses bornes $m = \min f$ et $M = \max f$.

- Si $m = M$, alors f est constante et tout $c \in]a,b[$ convient.
- Si $m < M$,
  - ⋆ Si $f(a) \neq M$, on a $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = M$, avec $f(c) \neq f(a) = f(b)$, donc $c \in]a,b[$.
    Comme c est un extremum global (donc local) de f, c n'est pas une borne de $[a,b]$ et f est dérivable en c, on a $f'(c) = 0$.
  - ⋆ Si $f(a) = f(b) = M$, alors $f(a) \neq m$ donc on a $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = m$, avec $f(c) \neq f(a) = f(b)$, donc $c \in]a,b[$.
    Comme c est un extremum global (donc local) de f, c n'est pas une borne de $[a,b]$ et f est dérivable en c, on a $f'(c) = 0$. □

3 Théorème des accroissements finis

Théorème : Théorème des accroissements finis

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Si*

H1 : f *est continue sur* $[a,b]$

H2 : f *est dérivable sur* $]a,b[$

Alors $\exists c \in]a,b[\mid f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ *ie* $f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$.

(Dessin)

Remarques

R1 – Le résultat s'écrit encore $\exists t \in]0,1[\mid f(b) = f(a) + (b-a)f'(a + t(b-a)) = 0$ ie $f(a+h) = f(a) + hf'(a+th)$ où $h = b - a$.

R2 – Ce résultat généralise a priori le théorème de Rolle, mais y est en fait strictement équivalent car on va utiliser ce théorème dans la preuve.

Démonstration

Important : technique usuelle.
But : trouver $c \in]a,b[$ tel que $f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$.
Méthode : former la différence, faire varier b et remplacer $f'(c)$ par un constante.

On pose $\varphi : \begin{vmatrix} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - f(a) - A(x-a) \end{vmatrix}$ où A est choisie telle que $\varphi(b) = 0$, c'est-à-dire $A = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Alors φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b) (= 0)$.

Donc d'après le théorème de Rolle, on a $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0 = f'(c) - A$. □

4 Inégalité des accroissements finis

Théorème : Inégalité des accroissements finis

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Si*

H1 : f *est continue sur* $[a,b]$

H2 : f *est dérivable sur* $]a,b[$

H3 : $\exists\, m, M \in \mathbb{R} \mid \forall\, x \in]a,b[,\quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$

Alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis. □

Remarque

Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\forall\, x \in [a,b],\quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$, comme $a < b$, on peut intégrer membre à membre l'inégalité entre a et b et retrouver le résultat.

Définition : Fonction lipschitzienne

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$.
f est dite **k-lipschitzienne** sur D lorsque

$$\forall\, x, y \in D,\quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant k\left|x - y\right|.$$

Lorsque $k \in [0,1[$, on dit que f est **contractante**.

Remarque

Une fonction k-lipschitzienne est automatiquement continue.

Corollaire

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si

H1 : *f est continue sur I*

H2 : *f est dérivable sur $\mathring{I}$*

H3 : $\exists k \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathring{I},\ \left|f'(x)\right| \leqslant k$

Alors f est k-lipschitzienne sur I, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in I,\ \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant k\left|x - y\right|.$$

Démonstration

Si $x < y$, on applique l'inégalité des accroissements finies à f sur $[x, y]$ avec $-k \leqslant f' \leqslant k$ sur $]x, y[$. □

Remarques

R1 – En particulier, si f est dérivable sur $\mathring{I}$, f est lipschitzienne sur I si et seulement si f' est bornée sur $\mathring{I}$.

R2 – Si f est classe $\mathscr{C}^1$, on peut à nouveau retrouver le résultat directement en intégrant $|f'| \leqslant k$ entre x et y (attention à l'ordre des bornes...)

5 Variation des fonctions dérivables

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$.

(i) f est constante sur I si et seulement si $f' \equiv 0$ sur $\mathring{I}$.

(ii) f est croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ (respectivement $f' \leqslant 0$) sur $\mathring{I}$.

(iii) f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ (respectivement $f' \leqslant 0$) sur $\mathring{I}$ et $\left\{x \in \mathring{I} \;\middle|\; f'(x) = 0\right\}$ ne continent aucun intervalle d'intérieur non vide ie f' ne s'annule qu'en des points isolés.

Remarque

⚠ Si f est définie sur D réunion d'intervalles, $f' = 0$ dit que f est constante sur chaque intervalle, $f' \geqslant 0$ dit que f est croissante sur chaque intervalle...

LA CONSTANTE DÉPEND DE L'INTERVALLE !

Démonstration

(i) $(\Rightarrow)$: les taux d'accroissement sont nuls.

$(\Leftarrow)$: si $f' \equiv 0$ sur $\mathring{I}$, alors si $x, y \in I$ tels que $x < y$, f est continue sur $[x, y]$, dérivable sur $]x, y[$ donc par théorème des accroissement fini, on a $c \in]x, y[\subset \mathring{I}$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$.

(ii) $(\Rightarrow)$: Si f est croissante, pour tout $x \in \mathring{I}$, pour tout $a \in \mathring{I}$, $\tau_{f,a}(x) \geqslant 0$ donc $f'(a) \geqslant 0$.

$(\Leftarrow)$: Si, réciproquement, $f' \geqslant 0$ sur $\mathring{I}$, alors si $x, y \in I$ tels que $x < y$, f est continue sur $[x, y]$, dérivable sur $]x, y[$ donc par théorème des accroissement fini, on a $c \in]x, y[\subset \mathring{I}$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geqslant 0$.

(iii) Contraposées :

$(\Rightarrow)$: Si f s'annule sur un intervalle J d'intervalle non vide, alors $f' \equiv 0$ sur $\mathring{J}$ et la monotonie n'est pas stricte.

$(\Leftarrow)$: Si la monotonie de f n'est pas stricte, on peut trouver $x, y \in I$ tels que $x < y$ et $f(x) = f(y)$. Alors f est constante sur $[x, y]$ et f' est nulle sur un intervalle d'intérieur non vide. □

Exemple

$f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante malgré le fait que $f'(0) = 0$.

6 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème : Théorème de la limite de la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que

H1 : *f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$*

H2 : *f est continue en a*

H3 : *$f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$*

Alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Donc

- *soit $\ell = \pm\infty$ et $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en a,*
- *soit $\ell \in \mathbb{R}$ et f est dérivable en a, $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a.*

Remarques

R1 – Si f' n'a pas de limite en a, on ne peut pas conclure.

Exemples

E1 – $f : x \mapsto x^2 \sin\frac{1}{x}$ prolongé par continuité par 0 en 0.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et si $x \neq 0$, $f' : x \mapsto 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ qui n'a pas de limite en 0. Et pourtout $\frac{f(x)-f(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ (mais f' n'est pas continue en 0).

E2 – $f : x \mapsto x\sin\frac{1}{x}$ prolongé par continuité par 0 en 0. f n'est pas dérivable en 0 et $f' : x \mapsto \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 (avec $x_n = n\pi$).

R2 – Il faut que f soit continue en a : par exemple, $f : x \mapsto \delta_{x,0}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et pourtant f n'est pas dérivable en 0.

R3 – Ce théorème donne aussi la continuité au point de la dérivée : et donc un caractère localement $\mathscr{C}^1$. Cependant, une fonction peut être dérivable sans que la dérivée soit continue. Donc ne pas pouvoir appliquer le théorème de la limite de la dérivée ne signifie pas que la fonction n'est pas dérivable !

Démonstration

Si $x \in I$ tel que $x > a$, f est continue sur $[a,x]$, dérivable sur $]a,x[$, par théorème des accroissements finis, on a $c_x \in]a,x[$ tel que $f'(c_x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Comme $a \leqslant c_x \leqslant x$, si $x \to a^+$, $f'(c_x) \to \ell$ et donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a^+]{} \ell$ par composition des limites.

On montre de même que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a^-]{} \ell$. □

Théorème

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, et $f \in \mathscr{C}^k(I \setminus \{a\})$ telle que $\forall\, i \in [\![0,k]\!]$, $f^{(i)}$ a une limite finie en a. Alors le prolongement de f par continuité en a est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Démonstration

Comme f a une limlite finie en a, on la prolonge en posant $\tilde{f}(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. On vérifie qu'alors $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ en a également.

Comme $\tilde{f}$ est continue en a, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et $\tilde{f}' = f'$ a une limite finie en a, alors par théorème de la limite de la dérivée, $\tilde{f}$ est dérivable en a et sa dérivée est continue en a.

On obtient ainsi, par récurrence finie que pour tout $p \in [\![0,k-1]\!]$, $\tilde{f}^{(p)}$ est dérivable en a et à dérivée continue en a. □

IV Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Héritée directement des propriétés sur les limites, on a :

Propriété

Soit $f : I \to \mathbb{C}$.

f est dérivable en $a \in I$ (respectivement sur I) si et seulement si $\mathfrak{Re}\, f$ et $\mathfrak{Im}\, f$ le sont et on a $\mathfrak{Re}\left(f'\right) = \mathfrak{Re}(f)'$ et $\mathfrak{Im}\left(f'\right) = \mathfrak{Im}(f)'$

Théorème : Inégalité des accroissements finis

Si $f : I \to \mathbb{C}$ telle que

- **H1 :** *f est continue sur I*
- **H2 :** *f est dérivable sur $\mathring{I}$*
- **H3 :** *on a $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\left|f'\right| \leqslant k$ sur $\mathring{I}$*

Alors f est k-lipschitzienne sur I, c'est-à-dire

$$\forall\, x, x' \in I, \quad \left|f(x) - f(x')\right| \leqslant k\left|x - x'\right|.$$

Démonstration

Admis provisoirement, prouvé dans le cas $\mathscr{C}^1$ avec les intégrales. □

Remarques

R1 – Avec $k = 0$, on retrouve le fait que si la dérivée est nulle sur $\mathring{I}$, la fonction est constante sur I. Ce qui se prouve également en passant par $\mathfrak{Re}\, f$ et $\mathfrak{Im}\, f$.

R2 – Le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis ne sont plus valables dans $\mathbb{C}$.

Exemple

$f : x \mapsto e^{ix}$ sur $[0, 2\pi]$ vérifie bien les hypothèses, avec $f(0) = f(2\pi)$ et pourtant $\left|f'\right| = 1\ldots$