Limites et continuité des fonctions numériques

Extrait du programme officiel :

Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré sur a si a est réel, avec un intervalle $[A,+\infty[$ si $a=+\infty$, avec un intervalle $]-\infty,A]$ si $a=-\infty$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Limite d'une fonction en un point	
Étant donné un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.	
Si f possède une limite finie en a, f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Extension de la notion de limite en a lorsque f est définie sur $I\setminus\{a\}$.	
Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie).	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.	
Théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite $+\infty$), de majoration (limite $-\infty$).	
Théorème de la limite monotone.	
b) Continuité	
Continuité, prolongement par continuité en un point.	
Continuité à gauche, à droite.	
Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
Continuité sur un intervalle.	

c) Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème des valeurs intermédiaires.	Cas d'une fonction strictement monotone. ⇆ I : application de l'algorithme de dichotomie à la recherche d'un zéro d'une fonction continue.
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.	

d) Image d'un segment par une fonction continue

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration n'est pas exigible.
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.	

e) Continuité et injectivité

Toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone.	La démonstration n'est pas exigible.
La réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle est continue.	

f) Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide de parties réelle et imaginaire.

Table des matières

I LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, et I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, $\overline{I}$ son adhérence (bornes finies incluses), $\mathring{I}$ son intérieur (bornes exclues).

1 Voisinage

Définition : Voisinage d'un point

Si $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Si $a \in \mathbb{R}$, on appelle **voisinage** de a toute partie V de $\mathbb{R}$ telle qu'on ait $\varepsilon > 0$ pour lequel $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset V$ c'est-à-dire tel que $|x-a| < \varepsilon \Longrightarrow x \in V$.
- Si $a = +\infty$, on appelle **voisinage** de a toute partie V de $\mathbb{R}$ telle qu'on ait $A \in \mathbb{R}$ pour lequel $[A, +\infty[\subset V$ c'est-à-dire tel que $x \geqslant A \Longrightarrow x \in V$.
- Si $a = -\infty$, on appelle **voisinage** de a toute partie V de $\mathbb{R}$ telle que $-V$ est un voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire telle qu'on ait $B \in \mathbb{R}$ pour lequel $]-\infty, B] \subset V$ c'est-à-dire tel que $x \leqslant B \Longrightarrow x \in V$.

On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de A.

On dit qu'une fonction f définie sur I vérifie une propriété sur un voisinage V de a lorsque cette propriété est vraie sur $I \cap V$.

Remarques

R1 – Intuitivement, on a un voisinage V de a lorsque l'on peut approcher a en restant dans V.

R2 – L'intersection de deux voisinages de a est encore un voisinage de a ($\mathcal{V}(a)$ est stable par $\cap$) : il suffit de choisir le $\min$ des η ou des B et le $\max$ des A.

R3 – Dans la pratique, on utilisera plutôt des inégalités larges (mais c'est équivalent quitte à prendre η plus petit).

R4 – Par exemple, $u_n \to \ell$ se traduit par $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, soit encore pour tout voisinage V de ℓ, il existe un rang à partir duquel $u_n \in V$. Et cela fonctionne encore si la limite est infinie.

2 Limite

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ élément ou borne de I, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers a, et on note $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ si et seulement si pour tout voisinage de ℓ, il existe un voisinage de a sur lequel $f(x)$ reste dans le voisinage de ℓ. Autrement dit, $\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists W \in \mathcal{V}(a),\ f(I \cap W) \subset V$.

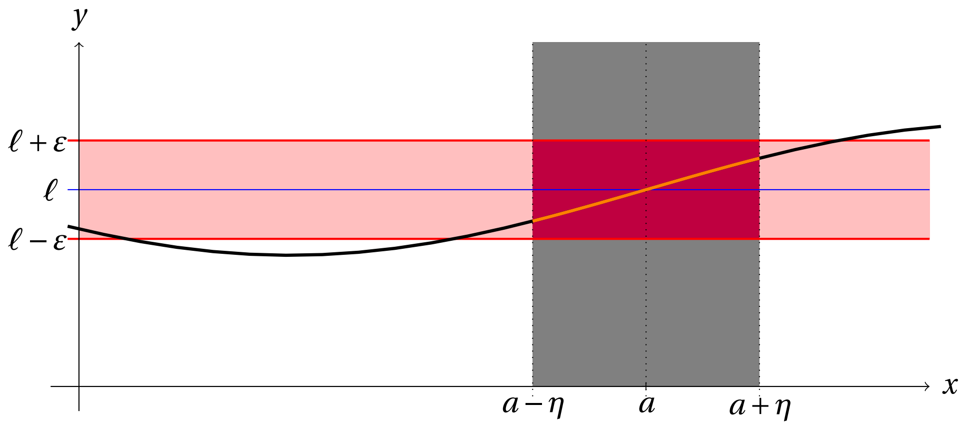

FIGURE 1 – Limite finie en un point fini

Définition : Traduction pour $a \in \mathbb{R}$

Si $a \in \mathbb{R}$,

- si $\ell \in \mathbb{R}$:
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x)-\ell\right| \leqslant \varepsilon.$$
- si $\ell = +\infty$:
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A.$$
- si $\ell = -\infty$: $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ ssi $-f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$, ie
$$\forall B \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant B.$$

Définition : Traduction pour a infini

- si $a = +\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$:
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geqslant A \Longrightarrow \left|f(x)-\ell\right| \leqslant \varepsilon.$$
- si $a = \ell = +\infty$:
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists A' \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geqslant A' \Longrightarrow f(x) \geqslant A.$$
- si $a = +\infty$ et $\ell = -\infty$: $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ssi $-f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, ie
$$\forall B \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \leqslant B.$$

- si $a=-\infty$ et $\ell\in\mathbb{R}$: $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}\ell$ ssi $f(-x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell$, ie
$$\forall\varepsilon>0,\quad\exists B\in\mathbb{R},\quad\forall x\in I,\quad x\leqslant B\Longrightarrow\left|f(x)-\ell\right|\leqslant\varepsilon.$$
- si $a=-\infty$ et $\ell=+\infty$: $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}+\infty$ ssi $f(-x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$, ie
$$\forall A\in\mathbb{R},\quad\exists B\in\mathbb{R},\quad\forall x\in I,\quad x\leqslant B\Longrightarrow f(x)\geqslant A.$$
- si $a=\ell=-\infty$: $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty$ ssi $-f(-x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$, , ie
$$\forall B\in\mathbb{R},\quad\exists B'\in\mathbb{R},\quad\forall x\in I,\quad x\leqslant B'\Longrightarrow f(x)\leqslant B.$$

Remarque

Même si f est définie en a, on n'a pas nécessairement $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}f(a)$ (ce qui traduit en fait f continue en a).

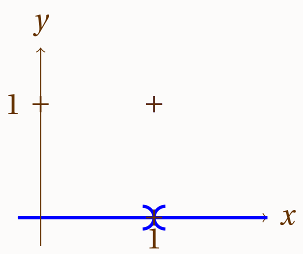

FIGURE 2 – La fonction $\delta_{\cdot,1}$

Si on considère $f(x)=\delta_{x,1}$ nulle partout sauf en 1 où elle vaut 1, alors, si $f(x)\xrightarrow[x\to1]{}\ell$, pour tout $\varepsilon>0$, $\left|f(1)-\ell\right|\leqslant\varepsilon$ donc $\ell=f(1)=1$. Mais si $x\neq1$, on obtient $1\leqslant\varepsilon$, ce qui est contradictoire.

Propriété

Si $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell$ et si f est définie en a, alors $\ell=f(a)$.

Démonstration

ℓ ne peut pas être infinie, sinon on aura pour tout $A\in\mathbb{R}$, $f(a)\geqslant A$ ou pour tout $B\in\mathbb{R}$, $f(a)\leqslant B$.

Pour tout $\varepsilon>0$, on aura $\left|f(a)-\ell\right|\leqslant\varepsilon$, ce qui donne $f(a)=\ell$. □

Propriété : Unicité de la limite

Lorsque la limite existe, elle est unique et est alors noté $\lim\limits_{x\to a}f(x)$.

Démonstration

Déjà, on ne peut pas avoir à la fois une limite finie et infinie. En effet, si $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ et $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to a$, alors on aurait des voisinages V, V' de a tels que si $x \in I \cap V \cap V' \neq \varnothing$, $f(x) \leqslant \ell - 1$ et $f(x) \geqslant \ell + 1$...

Si, par exemple, $a \in \mathbb{R}$, et si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell'$ avec $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ et si , par exemple, $a \in \mathbb{R}$, on a $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$ tels que si $|x-a| \leqslant \eta_1$, $|f(x) - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et si $|x-a| \leqslant \eta_2$, $|f(x) - \ell'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors si $|x-a| \leqslant \min(\eta_1, \eta_2)$, $|\ell - \ell'| \underset{\text{IT}}{\leqslant} |f(x) - \ell| + |f(x) - \ell'| \leqslant \varepsilon$.

Alors $\ell = \ell'$ (par exemple en prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ et en faisant $n \to +\infty$.) □

Propriété

Si $\ell \in \mathbb{R}$, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff f(x) - \ell \xrightarrow[x \to a]{} 0 \iff |f(x) - \ell| \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

Démonstration

Dans les trois cas, là définition s'écrit de la même manière. □

Propriété

*Si f admet en a une limite finie, alors f est bornée au voisinage de a (on dit que f est **localement bornée**).*

Démonstration

Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors on a un voisinage V de a tel que si $x \in I \cap V$, $\ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1$. □

Propriété

Si $\ell \in \mathbb{R}$, $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et au voisinage de a, $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$, $V \in \mathcal{V}(a)$ sur lequel $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$. On a $V' \in \mathcal{V}(a)$ tel que si $x \in I \cap V'$, $g(x) \leqslant \varepsilon$ et donc si $V'' = V \cap V' \in \mathcal{V}(a)$, pour tout $x \in I \cap V''$, $|f(x) - \ell| \leqslant g(x) \leqslant \varepsilon$ donc $f(x) \to \ell$. □

3 Caractérisation séquentielle

Propriété

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ élément ou borne de I, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \forall\ (a_n)_n \in I^{\mathbb{N}} \mid a_n \to a,\ \ f(a_n) \to \ell.$$

Démonstration

- ($\Longrightarrow$) : cas où $a=+\infty$ et $\ell\in\mathbb{R}$. Soit $(a_n)_n\in I^{\mathbb{N}} \mid a_n\to a=+\infty$.
  Soit $\varepsilon>0$. On a $A\in\mathbb{R}$ tel que si $x\in I$ tel que $x\geqslant A$, $\left|f(x)-\ell\right|\leqslant\varepsilon$.
  On a aussi $N\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geqslant N$, $a_n\geqslant A$. Alors si $n\geqslant N$, $\left|f(a_n)-\ell\right|\leqslant\varepsilon$.
  En résumé : $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall\,n\geqslant N,\ \left|f(a_n)-\ell\right|\leqslant\varepsilon$.
- ($\Longleftarrow$) : par contraposée, dans le cas où $a\in\mathbb{R}$ et $\ell=+\infty$, par exemple.
  Si $f(x)\not\to\ell=+\infty$, alors on a $A\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $\eta>0$, on a $x\in I$ tel que $|x-a|\leqslant\eta$ et $f(x)<A$.
  Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère $\eta=\frac{1}{n+1}$, on a $a_n\in I$ tel que $|a_n-a|\leqslant\dfrac{1}{n+1}$ et $f(a_n)<A$.
  Alors $a_n\to a$ par encadrement et pourtant $f(a_n)\not\to\ell=+\infty$. □

Remarques

R 1 – Pratique pour démontrer qu'on n'a pas de limite, ou qu'on ne tend pas vers une certaine limite.

R 2 – Version plus forte :

$$f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell\Longleftrightarrow\forall\,(a_n)_n\in I^{\mathbb{N}}\mid a_n\to a,\ \ \big(f(a_n)\big)\text{ converge.}$$

En effet, si $\forall\,(a_n)_n\in I^{\mathbb{N}}\mid a_n\to a,\ \ \big(f(a_n)\big)$ converge, et si $(a_n)_n\in I^{\mathbb{N}}\mid a_n\to a$ et $(b_n)_n\in I^{\mathbb{N}}\mid b_n\to a$, $f(a_n)\to\ell$ et $f(b_n)\to\ell'$, on pose $c_{2n}=a_n$ et $c_{2n+1}=b_n$, alors $c_n\to a$ donc $\big(f(c_n)\big)$ converge mais $\big(f(a_n)\big)$ et $\big(f(b_n)\big)$ en sont des suites extraites donc $\ell=\ell'$.
On retrouve ensuite l'autre caractérisation.

Exemple

$f:x\mapsto\sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0. En effet, $f\left(\frac{1}{n\pi}\right)\equiv 0$ et $f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right)\equiv 1$. Ou encore, plus simple : $f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right)=(-1)^n$ n'a pas de limite.

4 Limites et ordre

a Comparaison de la limite

Propriété

Si $f:I\to\mathbb{R}$, $a\in\overline{\mathbb{R}}$ élément ou borne de I, $\ell,c,d\in\overline{\mathbb{R}}$.
- *Si $\ell>c$, au voisinage de a, $f(x)>c$.*
- *Si $\ell>d$, au voisinage de a, $f(x)>d$.*
- *Si $c<\ell<d$, au voisinage de a, $c<f(x)<d$.*

Démonstration

Si $\ell = \pm\infty$, c'est la définition.
Sinon, avec $\varepsilon = \dfrac{\ell - c}{2}$, on a $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $x \in I \cap V$, $f(x) \geqslant \ell - \dfrac{\ell - c}{2} = \dfrac{\ell + c}{2} > c$.
De même, avec $\varepsilon = \dfrac{d - \ell}{2}$, on a $V' \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $x \in I \cap V'$,

$$f(x) \leqslant \ell + \frac{d-\ell}{2} = \frac{\ell + d}{2} < d.$$

Alors avec $V'' = V \cap V' \in \mathcal{V}(a)$, pour tout $x \in I \cap V''$, $c < f(x) < d$. □

Remarque

On retrouve un résultat déjà vu, sous forme de :

Corollaire

Si f a une limite finie en a, f est bornée au voisinage de a.

b Passage des inégalités à la limite

Propriété

Si $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ élément ou borne de I, $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que

(i) $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell'$

(ii) Au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x)$ (respectivement $f(x) < g(x)$)

Alors $\ell \leqslant \ell'$.

Démonstration

Si $(a_n) \in I^{\mathbb{N}}$ tel que $a_n \to a$, $f(a_n) \to \ell$ et $g(a_n) \to \ell'$ et si V voisinage de a tel que si $x \in I \cap V$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors on a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $a_n \in V$ et donc $f(a_n) \leqslant g(a_n)$.
Alors, d'après la propriété vu sur les suites, on obtient $\ell \leqslant \ell'$. □

C Théorème de le limite d'un encadrement

Théorème

Si $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ élément ou borne de I, $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

(i) $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $h(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

(ii) Au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$

Alors $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

De plus, si $\ell = +\infty$ (respectivement $\ell = -\infty$), on obtient la même conclusion avec seulement $g(x) \leqslant h(x)$ (respectivement $f(x) \leqslant g(x)$).

Démonstration

Si $(a_n) \in I^{\mathbb{N}}$ tel que $a_n \to a$, $f(a_n) \to \ell$ et $h(a_n) \to \ell$ et si V voisinage de a tel que si $x \in I \cap V$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, alors on a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $a_n \in V$ et donc $f(a_n) \leqslant g(a_n) \leqslant h(a_n)$. Alors, d'après la propriété connue sur les suites, on obtient $g(a_n) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Comme c'est vrai pour toute suite $a_n \to a$, d'après la caractérisation séquentielle, $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. □

Cela permet de retrouver le

Corollaire

Si $\ell \in \mathbb{R}$, $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et au voisinage de a, $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

5 Opérations sur les limites

Propriété

Si I, J intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset J$, $g : J \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ élément ou borne de I, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ élément ou borne de J et si $g(y) \xrightarrow[y \to b]{} \ell$, alors $g \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Démonstration

Si $(a_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to a$, alors $f(a_n) \to b$ et donc $g(f(a_n)) = g \circ f(a_n) \to \ell$. Comme c'est vrai pour toute suite $a_n \to a$, $g \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. □

Propriété

Si $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *élément ou borne de* I, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell + \ell'$ *lorsque cela a un sens,*

(ii) $\lambda f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda \ell$ *lorsque cela a un sens,*

(iii) $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \ell'$ *lorsque cela a un sens,*

(iv)
- *Si* $\ell \neq 0$, *au voisinage de* a, $f(x) \neq 0$ *et* $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \dfrac{1}{\ell}$ *(avec* $\dfrac{1}{\pm\infty} = 0$*).*
- *Si au voisinage de* a, $f(x) > 0$ *et* $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$, *alors* $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.
- *Si au voisinage de* a, $f(x) < 0$ *et* $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$, *alors* $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$.

Démonstration

On peut le faire directement (comme pour les suites) ou avec les avec la caractérisation séquentielle.

Par exemple pour (iii), si par exemple, $\ell > 0$, on sait qu'on a un voisinage V de a sur lequel $f(x) > 0$ (de même si $\ell < 0$.)

En suite, si on a $(a_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to a$, on a un rang N à partir duquel $a_n \in V$, et $\dfrac{1}{f(a_n)} \to \dfrac{1}{\ell}$ d'après les propriétés des limites des suites. Comme c'est vrai pour toute suite $a_n \to a$, on conclut que $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \dfrac{1}{\ell}$. □

Propriété

Si $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *élément ou borne de* I *et si* $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ *et* g *est bornée au voisinage de* a, *alors* $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

Démonstration

On a $M \in \mathbb{R}^+$ et V un voisinage de a tel que si $x \in I \cap V$, $|g(x)| \leqslant M$.
Alors si $x \in I \cap V$, $|f(x)g(x)| \leqslant M|f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} 0$, donc $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$. □

6 Limites à gauche et à droite

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \mathbb{R}$ élément ou borne de I.

On dit que f admet ℓ comme **limite à gauche** (respectivement **à droite**), ou **par valeurs inférieures** (respectivement **par valeurs supérieures**), et on note $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x<a}]{} \ell$ (respectivement $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x>a}]{} \ell$) lorsque $f|_{]-\infty,a[\cap I} \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ (respectivement $f|_{]a,+\infty[\cap I} \xrightarrow[x\to a]{} \ell$).

Remarque

⚠ Borne ouverte en a !

Définition

Lorsque $a \in \mathring{I}$ et f est définie sur $I \setminus \{a\}$, on dit que f admet une limite en a lorsque

(i) f admet une limite ℓ_- à gauche de a,

(ii) f admet une limite ℓ_+ à droite de a,

(iii) $\ell_+ = \ell_-$.

On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell (= \ell_- = \ell_+)$.

Remarque

Cela équivaut à dire que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ si et seulement si pour tout voisinage V de ℓ, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $|x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \in V$: on retrouve la définition habituelle.

Exemples

E 1 – $x \mapsto \delta_{x,1}$ admet une limite nulle à gauche et à droite de 1.

E 2 – $\lfloor \cdot \rfloor$ admet en tout élément de $k \in \mathbb{Z}$ une limite à gauche qui vaut $k-1$ et une limite à droite qui vaut k.

Propriété

Si $f : I \to \mathbb{R}$ et si $a \in \mathring{I}$, alors f admet une limite en a si et seulement si

(i) f admet une limite ℓ_- à gauche de a,

(ii) f admet une limite ℓ_+ à droite de a,

(iii) $\ell_+ = \ell_- = f(a)$.

Démonstration

- ($\Longrightarrow$) : On a déjà vu que si f admet une limite en a, elle vaut $f(a)$. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon$.
  Alors, en prenant $x \in I \cap]-\infty, a[$, on obtient $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x<a}}{\longrightarrow} f(a)$, et en prenant $x \in I \cap]a, +\infty[$, on obtient $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x>a}}{\longrightarrow} f(a)$.
- ($\Longleftarrow$) : Si, réciproquement, $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x>a}}{\longrightarrow} f(a)$ et $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x<a}}{\longrightarrow} f(a)$, et $\varepsilon > 0$, alors on a $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$ tels que si $x \in I$,
  $$a < x \leqslant a + \eta_1 \Longrightarrow \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon$$
  et
  $$a - \eta_2 \leqslant x < a \Longrightarrow \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon.$$
  De plus, $\left|f(a) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon$.
  Alors si $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, et si $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$, on a bien $\left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon$. □

7 Théorème de la limite monotone

Théorème

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ croissante (respectivement décroissante).

(i) Si f est majorée sur $]a, b[$, f admet une limite finie en b^- (respectivement a^+) et $\lim\limits_{b^-} f = \sup\limits_{]a,b[} f$ (respectivement $\lim\limits_{a^+} f = \sup\limits_{]a,b[} f$).
Sinon, $f(x) \xrightarrow[x \to b^-]{} +\infty$ (respectivement $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} +\infty$).

(ii) Si f est minorée sur $]a, b[$, f admet une limite finie en a^+ (respectivement b^-) et $\lim\limits_{a^+} f = \inf\limits_{]a,b[} f$ (respectivement $\lim\limits_{b^-} f = \inf\limits_{]a,b[} f$).
Sinon, $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} -\infty$ (respectivement $f(x) \xrightarrow[x \to b^-]{} -\infty$).

Démonstration

(i) Cas où f est croissante (sinon, il suffit de changer f en $-f$).

- Si f est majorée, $\{f(t)\ ;\ t \in]a, b[\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc $\ell = \sup\limits_{]a,b[} f$ existe.
  Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, on a $x_0 \in]a, b[$ tel que $\ell - \varepsilon < f(x_0) \leqslant \ell = \sup\limits_{]a,b[} f$. Alors, par croissance de f, pour tout $x \geqslant x_0$,
  $$\ell - \varepsilon \leqslant f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant \ell = \sup_{]a,b[} f \leqslant \ell + \varepsilon$$
  donc $\left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.
  - ⋆ Si b est fini, on pose $\eta = b - x_0 > 0$, si $x \in]a, b[$ tel que $|x-b| \leqslant \eta$, c'est-à-dire $x_0 = b - \eta \leqslant x < b$, alors $\left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.
    Ainsi, $f(x) \xrightarrow[x \to b^-]{} \ell$.
  - ⋆ Si $b = +\infty$, on pose $A = x_0$, si $x \in]a, b[$ tel que $x \geqslant A = x_0$, $\left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.
- Si f n'est pas majorée, pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \geqslant A$. Alors pour tout

$x \geqslant x_0$, $f(x_0) \geqslant A$. Que b soit fini ou non, on conclut de même que $f(x) \xrightarrow[x \to b^-]{} +\infty$.
Le (ii) se traite de manière similaire. □

Corollaire

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ croissante (respectivement décroissante), f admet en tout point x_0 de $]a, b[$ une limite à gauche et une limite à droite finies qui valent $f(x_0^-) = \sup_{]a,x_0[} f$ et $f(x_0^+) = \inf_{]x_0,b[} f$ et on a $f(x_0^-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0^+)$ (respectivement $f(x_0^-) = \inf_{]a,x_0[} f$, $f(x_0^+) = \sup_{]x_0,b[} f$ et $f(x_0^-) \geqslant f(x_0) \geqslant f(x_0^+)$).

Remarque

Une fonction telle qu'en tout point elle admette une limite à gauche et à droite est dite **réglée**.

II CONTINUITÉ

1 Continuité en un point

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.
f est dite continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left| f(x) - f(a) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Remarques

R1 – Ainsi, f n'est pas continue en a si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \exists x \in I, \quad |x - a| \leqslant \eta \text{ et } \left| f(x) - f(a) \right| > \varepsilon.$$

R2 – f est continue en a si et seulement si f est définie en a et a une limite finie en a.

Les propriétés suivantes sont de simples conséquences des propriétés sur les limites

Propriété

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) ***Caractérisation séquentielle***

$$f \text{ est continue en } a \Longleftrightarrow \forall (a_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid a_n \to a, \ f(a_n) \to f(a).$$

(ii) *Si f et g continues en a, $f+g$, $f\times g$, λf le sont aussi. Si, de plus, g ne s'annule pas au voisinage de a, $\dfrac{f}{g}$ l'est aussi.*

(iii) *Si $h : J \to \mathbb{R}$ et $f(I) \subset J$, et si f continue en a et h continue en $f(a)$, alors $h \circ f$ en continue en a.*

Remarque

f n'est pas continue en a si et seulement si on peut trouver (a_n) telle que $a_n \to a$ mais $f(a_n) \not\to f(a)$.

Rappel :

Définition

Si $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, alors on appelle **prolongement par continuité** de f en a l'application $g : I \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x)$ si $x \neq a$ et $g(a) = \ell$.

Remarque

Il est continu en a !

2 Continuité à gauche, à droite

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.

- f est continue à droite de a si et seulement si $I \cap]a, +\infty[\neq \varnothing$ et $f|_{I\cap[a,+\infty[}$ est continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} f(a)$.
- f est continue à gauche de a si et seulement si $I \cap]-\infty, a[\neq \varnothing$ et $f|_{I\cap]-\infty,a]}$ est continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} f(a)$.

Propriété

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$.

$$f \text{ est continue en } a \iff \begin{cases} f \text{ est continue à gauche de } a \\ f \text{ est continue à droite de } a \end{cases}$$

Démonstration

Application du résultat sur les limites à gauche et à droite. □

Exemple

$\lfloor\cdot\rfloor$ est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, continue à droite mais pas à gauche de tout $k\in\mathbb{Z}$.

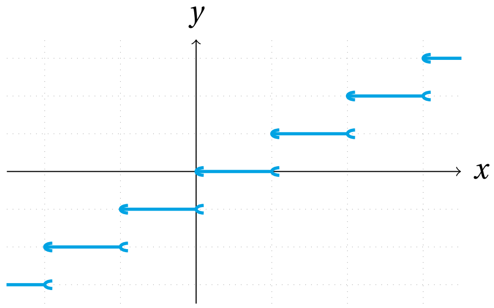

Figure 3 – La fonction $\lfloor\cdot\rfloor$

3 Continuité sur un intervalle

Définition

Soit $f: I\to\mathbb{R}$. f est dite **continue sur** I lorsque f est continue en tout point de I.
Onote $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}(I)$ ou $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}^0(I)$ l'ensemble de telles fonctions.

Propriété

Soient $f,g\in\mathscr{C}(I)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

(i) $f+g$, $f\times g$, $\lambda f\in\mathscr{C}(I)$.

(ii) $(\mathscr{C}(I),+,\times)$ *est un sous-anneau* $(\mathbb{R}^I,+,\times)$.

(iii) *Si* $h\in\mathscr{C}(J)$ *tel que* $f(I)\subset J$, $h\circ f\in\mathscr{C}(I)$.

(iv) *Si* g *ne s'annule pas sur* I, $\dfrac{f}{g}\in\mathscr{C}(I)$.

(v) $|f|$, $\inf(f,g)$, $\sup(f,g)\in\mathscr{C}(I)$.

(vi) *Si* J *intervalle non vide tel que* $J\subset I$, $f|_J\in\mathscr{C}(J)$.

Démonstration

(v) : $\inf(f,g)=\dfrac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ et $\sup(f,g)=\dfrac{1}{2}(f+g+|f-g|)$. □

4 Théorème des valeurs intermédiaires et image continue d'un intervalle

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Si $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $m \in [f(a) \,\bar{;}\, f(b)]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $m = f(c)$.

Autrement dit, $[f(a) \,\bar{;}\, f(b)] \subset f([a, b])$.

Remarque

$[f(a) \,\bar{;}\, f(b)]$ signifie $[f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$ selon la position relative de $f(a)$ et $f(b)$.

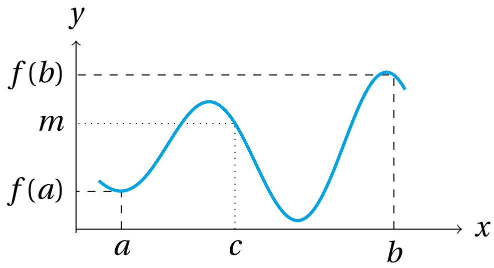

FIGURE 4 – Le théorème des valeurs intermédiaires

Démonstration

On suppose, par exemple, que $f(a) \leqslant f(b)$ et donc $f(a) \leqslant m \leqslant f(b)$.

On procède par dichotomie : on définit des suites $(a_n), (b_n) \in I^{\mathbb{N}}$ respectivement croissante et décroissante par $a_0 = a$, $b_0 = b$, puis, par récurrence, si a_n et b_n sont construits, et tels que $f(a_n) \leqslant m \leqslant f(b_n)$, on pose $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, et alors :

- soit $f(c_n) = m$ et alors $c = c_n$ convient : la démonstration est terminée ;
- soit $f(c_n) > m$ et on pose $a_{n+1} = a_n \leqslant m \leqslant c_n = b_{n+1}$;
- soit $f(c_n) < m$ et on pose $a_{n+1} = c_n \leqslant m \leqslant b_n = b_{n+1}$.

On a donc (a_n) croissante, et (b_n) décroissante (car pour tout n, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$), $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ donc les suites sont adjacentes et convergent vers une même limite $c \in [a, b]$.

Or comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leqslant m \leqslant f(b_n)$, on obtient lorsque $n \to +\infty$, par continuité de f en c, $m = f(c)$. □

Remarques

R1 – Souvent utile pour montrer l'annulation d'une fonction : il suffit qu'elle soit continue et que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires.

R2 – Application à une recherche de point fixe :

$$f(x) = x \Longleftrightarrow g(x) = f(x) - x = 0.$$

R3 – La réciproque est fausse : on peut vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continu.

C'est le cas par exemple de la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$ discontinue en 0.

Corollaire : Extension du théorème des valeurs intermédiaires

Si $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue sur $]a, b[$ et admet des limites $\lim\limits_{a^+} f$ à droite de a et $\lim\limits_{b^-} f$ à gauche de b, alors pour tout $m \in \left]\lim\limits_{a^+} f ; \lim\limits_{b^-} f\right[$, on a $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = m$.

Autrement dit, $\left]\lim\limits_{a^+} f ; \lim\limits_{b^-} f\right[\subset f(]a, b[)$.

Démonstration

En effet, on peut trouver $a', b' \in]a, b[$ tels que $m \in [f(a'), f(b')]$ par proriété sur les limites, et on peut donc apliquer le théorème. □

Exemple

Un polynôme de degré impair a toujours au moins une racine réelle.
En effet, comme on a des limites $\pm\infty$ ou $\mp\infty$ en $\pm\infty$, notre polynôme prend au moins une valeur positive et une valeurs négative sur $\mathbb{R}$.

Corollaire : Image continue d'un intervalle

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
Autrement dit, si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration

Les intervalles sont les convexes de $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que $f(I)$ est convexe.
Or, si $\alpha, \beta \in f(I)$ avec $\alpha < \beta$, on a $a, b \in I$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$ et alors $[\alpha, \beta] = [f(a), f(b)] \subset f([a ; b]) \subset f(I)$ d'après le théorème des valeurs intermédiaire.
Donc $f(I)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle. □

Remarques

R1 – ⚠ En général $f([a, b]) \neq [f(a), f(b)]$ et $f(]a, b[) \neq \left]\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f\right[$.

R2 – Le type de l'intervalle n'est pas conservé en général (sauf pour les segments comme on le verra dans le paragraphe suivant).

Exemples

E 1 – Si $f = \text{th}$, alors $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$: le premier n'est pas borné, le deuxième l'est.

E 2 – $\sin(]0,3\pi[) = [-1,1]$: le premier est ouvert, le deuxième est fermé.

E 3 – Avec $f(x) = (1-x)\sin\frac{1}{x}$, $f(]0,1]) =]-1,1[$. (On peut considérer $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ et $x'_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$.)

E 4 – $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$.

5 Continuité sur un segment

Théorème

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
Ainsi, si $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et si f est continue sur le segment $[a,b]$, alors on a $c, d \in [a,b]$ tels que $f(c) = \min\limits_{[a,b]} f$ et $f(d) = \max\limits_{[a,b]} f$.

Démonstration

- **1ère étape : f est bornée**
  Si, par l'absurde, f n'est pas majorée, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) \geqslant n$, et donc $f(x_n) \to +\infty$.
  Comme (x_n) est bornée, d'après le théorème de Bolzano- Weierstraß, on a une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge. Alors, par continuité, $(f(x_n))$ converge également, ce qui est contradictoire.
  On montre de même (ou en considérant $-f$) que f est minorée, et donc qu'elle est bornée.

- **2e étape : les bornes sont atteintes**

  Soit $M = \sup_{[a,b]} f$ (qui existe bien).
  Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, on a $(x_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ telle que $f(x_n) \to M$.
  Puis, par le théorème de Bolzano-Weierstraß, on a une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $c \in [a,b]$ (passage des inégalités à la limite). Alors, par continuité, $f(x_n) \to f(c)$.
  Par unicité de la limite, $M = f(c)$ et le $\sup$ est atteint et est donc un $\max$.
  On montre de la même manière (ou en considérant $-f$) que la borne inférieure est atteinte. $\square$

Corollaire : Image continue d'un segment

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Avec les notations précédentes, f étant continue sur $[a,b]$,

$$f\big([a,b]\big) = \left[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f\right] = [f(c), f(d)]$$

Démonstration

D'après, par définition, $f(c) = \min\limits_{[a,b]} f$ et $f(d) = \max\limits_{[a,b]} f$ donc

$$f\big([a,b]\big) \subset \big[f(c), f(d)\big].$$

Ensuite, le théorème des valeurs intermédiaire donne

$$\big[f(c), f(d)\big] \subset f\big([c \overset{\leftrightarrow}{,} d]\big) \subset f\big([a,b]\big). \quad \square$$

6 Continuité et injectivité

Propriété

Si f est continue et injective sur un intervalle I, f est strictement monotone sur I.

Remarque

f peut être injective sans être strictement monotone (et donc sans être continue). Par contre, une bijection continue est nécessairement strictement monotone.

Démonstration

Si f n'est pas monotone, alors on peut trouver $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$ et $f(y) \notin \big[f(x), f(z)\big]$, c'est-à-dire soit $f(y) > \max\big(f(x), f(z)\big)$, soit $f(y) < \min\big(f(x), f(z)\big)$.

Dans le premier cas, on peut trouver, par continuité de f et théorème des valeurs intermédiaires, $y' \in]x, y[$ et $y'' \in]y, z[$ tels que $f(y') = f(y'') \in \big]\max\big(f(x), f(z)\big), f(y)\big[$, ce qui contredit l'injectivité.

Donc f est monotone. L'injectivité de f impose ensuite à la monotonie d'être stricte. $\square$

Propriété

Si f est continue et strictement monotone sur I, alors $f(I)$ est donné par

I	$[a,b]$	$[a,b[$	$]a,b]$	$]a,b[$
$f \nearrow$	$[f(a), f(b)]$	$\left[f(a), \lim\limits_{b^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{a^+} f, f(b)\right]$	$\left]\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f\right[$
$f \searrow$	$[f(b), f(a)]$	$\left]\lim\limits_{b^-} f, f(a)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{a^+} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b^-} f, \lim\limits_{a^+} f\right[$

(les limites existant bien).

Démonstration

Le cas $[a,b]$ est donné par l'image continu d'un segment et la monotonie de f.

Traitons le cas $[a,b[$ si f est strictement croissante, par exemple.

On a déjà que pour tout $x \in [a,b[$, $f(x) \in \left[f(a), \lim\limits_{b^-} f\right[$ avec $\lim\limits_{b^-} f = \inf\limits_{x<b} f(x)$.

Si, réciproquement, $y \in \left[f(a), \lim\limits_{b^-} f\right[$, alors $y < \sup\limits_{x<b} f(x)$ donc on a $x_0 \in [a,b[$ tel que $y < f(x_0)$. Alors $y \in [f(a), f(x_0)]$, donc, par théorème des valeurs intermédiaires (et continuité de f), on a $x \in [a, x_0] \subset [a,b[$ tel que $y = f(x)$. Donc $f([a,b[) = \left[f(a), \lim\limits_{b^-} f\right[$.

Les autres cas se traitent de la même manière. □

Lemme

Si f est monotone sur un intervalle I et $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue sur I.

Démonstration

On traite le cas où f est croissante.

Supposons dans un premier temps que x_0 n'est pas une borne de I. D'après le théorème de la limite monotone, f admet des limites à gauche et à droite de x_0 qu'on notera $f\left(x_0^-\right) = \sup\limits_{x<x_0} f(x)$ et $f\left(x_0^+\right) = \inf\limits_{x>x_0} f(x)$ telles que $f\left(x_0^-\right) \leqslant f(x_0) \leqslant f\left(x_0^+\right)$. Pour montrer que f est continue en x_0, il suffit de démontrer que $f\left(x_0^-\right) = f(x_0) = f\left(x_0^+\right)$.

Si, par l'absurde, $f\left(x_0^-\right) < f(x_0)$, posons $a \in I$ tel que $a < x_0$ (existe car x_0 n'est pas une borne de I). Alors $f(a) \leqslant f\left(x_0^-\right) < f(x_0)$.

Si on pose maintenant $m \in \left]f\left(x_0^-\right), f(x_0)\right[\subset \left]f(a), f(x_0)\right[$, comme $f(I)$ est un intervalle, on a $c \in]a, x_0[$ tel que $m = f(c) < f\left(x_0^-\right) = \inf\limits_{x>x_0} f(x)$ ce qui est contradictoire. Donc $f\left(x_0^-\right) = f(x_0)$

On montre de même que $f(x_0) = f\left(x_0^+\right)$.

Si x_0 est une borne de I, une seule des deux limites suffit. □

Théorème : Théorème de la bijection

Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors

(i) f induit une bijection $\tilde{f}$ de I sur $J = f(I)$.

(ii) $\tilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même monotonie que f.

(iii) $\tilde{f}^{-1}$ est continue sur J.

Démonstration

L'application $\tilde{f} : I \to J = f(I)$ est bien surjective, et injective car f est strictement monotone. C'est donc une bijection.

Si, par exemple, f est croissante, et si $y, y' \in J$ tels que $y < y'$, alors si $\tilde{f}^{-1}(y) \geqslant \tilde{f}^{-1}(y')$, par croissance de f, $y \geqslant y'$, ce qui est contradictoire. Donc $\tilde{f}^{-1}(y) < \tilde{f}^{-1}(y')$. Donc $\tilde{f}^{-1}$ est strictement croissante.

Comme $\tilde{f}^{-1}$ est monotone sur l'intervalle J et $\tilde{f}^{-1}(J) = I$ est un intervalle, $\tilde{f}^{-1}$ est continue sur J d'après le lemme précédent. □

Remarques

R1 – Si I, J sont des intervalles réels, une fonction $f : I \to J$ telle que

- f est continue sur I et injective est strictement monotone,
- f est monotone sur I et surjective est continue.

Par contre, on peut trouver des bijections de I sur J qui ne sont ni continue, ni monotone.

R2 – Si on ne se place pas sur un intervalle, la réciproque n'est pas nécessairement continue. Par exemple, la réciproque de la bijection de $f : [0,1[\cup[2,3] \to [0,2[$ telle que $f(x) = x$ si $x < 1$, $x-1$ sinon n'est pas continue en 1.

Définition : Homéomorphisme

$f : I \to J$ est appelé **homéomorphisme** lorsque f est bijective et bicontinue, c'est-à-dire f continue sur I et f^{-1} est continue sur J.

Le « théorème de la bijection » se reformule alors en

Théorème : Théorème de l'homéomorphisme

Toute fonction continue strictement monotone induit de I sur $J = f(I)$ un homéomorphisme.

III Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

La notion de limite s'étend, comme pour les suites, aux fonctions à valeurs complexes. Pas de limite infinie possible, et une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ élément ou borne de I pour $f : I \to \mathbb{C}$ s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists V \in \mathcal{V}(a), \ \forall x \in I, \ x \in V \Longrightarrow \left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

où V est à adapter selon que a est fini ($\eta > 0 \ldots$), $+\infty$ ($A \in \mathbb{R} \ldots$) ou $-\infty$ ($B \in \mathbb{R} \ldots$)

Les propriétés ne faisant pas intervenir l'ordre sont toujours valables, en particulier la caractérisation séquentielle.

La continuité s'étend donc naturellement également aux fonctions à valeurs complexes.

Propriété

Si $f : I \to \mathbb{C}$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ élément ou borne de I, $\ell = \ell_1 + \mathrm{i}\ell_2 \in \mathbb{C}$.

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1 + \mathrm{i}\ell_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathfrak{Re}\, f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1 \\ \mathfrak{Im}\, f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_2 \end{cases}$$

f est continue en a (respectivement sur I) si et seulement si $\mathfrak{Re}\, f$ et $\mathfrak{Im}\, f$ le sont.

Démonstration

Immédiat en passant par les suites ou avec

$$\left|f(x)-\ell\right|^2 = \left(\mathfrak{Re}\, f(x)-\ell_1\right)^2 + \left(\mathfrak{Im}\, f(x)-\ell_2\right)^2.$$

$\square$

Remarque

Ainsi, $\mathfrak{Re}(\lim) = \lim(\mathfrak{Re})$ et $\mathfrak{Im}(\lim) = \lim(\mathfrak{Im})$ lorsque cela à un sens.