Suites

Extrait du programme officiel :

Dans l'étude des suites, on distingue les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

Il convient de souligner l'intérêt des suites, tant du point de vue pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximation de nombres réels).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(\lvert u_n\rvert)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
d) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite.	Pour $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, notation $u_n \longrightarrow \ell$. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Lien avec la définition vue en Terminale.
Unicité de la limite.	Notation $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente.	
Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	
Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.	
e) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone : toute suite monotone possède une limite.	Toute suite croissante majorée converge, toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
Théorème des suites adjacentes.	
f) Suites extraites	
Suite extraite.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ.
Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Les étudiants doivent connaître le principe de la démonstration par dichotomie, mais la formalisation précise n'est pas exigible. La notion de valeur d'adhérence est hors programme.

g) Traduction séquentielle de certaines propriétés

Partie dense de $\mathbb{R}$.	Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide. Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.
Caractérisation séquentielle de la densité.	
Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).	

h) Suites complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
Théorème de Bolzano-Weierstrass.	La démonstration n'est pas exigible.

i) Suites particulières

Suite arithmétique, géométrique. Suite arithmético-géométrique. Suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.	Les étudiants doivent savoir déterminer une expression du terme général de ces suites.
Exemples de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.	Seul résultat exigible : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

Table des matières

I DEFINITIONS

1 Suites

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition : suite

On appelle **suite d'éléments de** $\mathbb{K}$ toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est notée $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ est notée $\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ n & \longmapsto & u_n\end{array}\right.$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$ ou (u_n) **MAIS PAS** u_n **!!!**.

Une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ définie à partir d'un certain rang (apcr) $n_0 \in \mathbb{N}$ est une application de $[\![n_0, +\infty]\!]$ dans $\mathbb{K}$, notée $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Définition : opérations $+$, $\times$ et $\cdot$

Sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ on définit des lois $+$, $\times$ et $\cdot$ par, si $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

- $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad (u+v)_n = u_n + v_n$
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad (u\times v)_n = u_n \times v_n$
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad (\lambda u)_n = \lambda u_n$

Les propriétés de ces lois sont les propriétés habituelles (pour $+$ et $\times$: associativité, commutativité, éléments neutres, etc.)

⚠ $u \times v = 0 = (0)_{n\in\mathbb{N}} \not\Longrightarrow u = 0 \text{ ou } v = 0$!

On dit que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ n'est pas **intègre**.

2 Variation des suites réelles

Définition : Majoration et minoration de suites

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite

- **minorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi
$$\exists\, m \in \mathbb{R},\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n \geqslant m.$$
- **majorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi
$$\exists\, M \in \mathbb{R},\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n \leqslant M.$$
- **bornée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi elle est à la fois minorée et majorée.

Propriété : Caractérisation des suites bornées

$u=(u_n)_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|u|=(|u_n|)_n$ l'est si et seulement si

$$\exists A\in\mathbb{R},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n|\leqslant A.$$

Démonstration

Déjà démontré précédemment dans le cadre plus général des fonctions numériques. □

Définition : Suites complexes bornées

$(u_n)_n\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite bornée si et seulement si $(|u_n|)_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'est.

Remarque

Cela revient à dire que tous les termes sont dans un disque centré sur l'origine.

Définition : Monotonie des suites

Soit u une suite à termes **réels**. u est dite

- **croissante** ssi $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\leqslant u_{n+1}$.
- **décroissante** ssi $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\geqslant u_{n+1}$.
- **monotone** ssi elle est croissante ou décroissante.
- **strictement croissante** ssi $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n< u_{n+1}$.
- **strcitement décroissante** ssi $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n> u_{n+1}$.
- **strictement monotone** ssi elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- **constante** ssi $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=u_{n+1}(=u_0)$.
- **stationnaire** ssi elle est constante à partir d'un certain rang ie $\exists n_0\in\mathbb{N},\quad \forall n\geqslant n_0,\quad u_n=u_{n+1}(=u_{n_0})$.

Remarques

R1 – Cela n'aurait aucun sens pour des suites complexes non réelles.

R2 – De simples récurrence permettent de vérifier qu'il s'agit bien des propriétés homonymes des fonctions associées à ces suites.

R3 – Il existe des suites ni croissantes ni décroissantes.

> **Exemple**
>
> $((-1)^n)_n$.

Celles qui sont les deux simultanément sont les suites constantes.

R4 – Si $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$, u est croissante si et seulement si $\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$ et u est décroissante si et seulement si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1.$

Ne pas oublier de vérifier l'hypothèse !!!

R5 – u est décroissante si et seulement si $-u$ est croissante.

R6 – La somme de deux suites croissantes (respectivement décroissantes) l'est encore. De plus, elle l'est strictement si l'une des deux l'était.

R7 – Le produit de deux suites **positives** croissantes (respectivement décroissantes) l'est encore.

II Des suites particulières

1 Suites arithmético-géométriques

Définition

On appelle

(i) **suite arithmétique** de raison $b \in \mathbb{K}$ toute suite vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = u_n + b$$

(ii) **suite géométrique** de raison $a \in \mathbb{K}$ toute suite vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = a u_n$$

(iii) **suite arithmético-géométrique** toute suite telle qu'on ait $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = a u_n + b$$

On dit que u est une **suite récurrente linéaire d'ordre 1 à cœfficients constants**.

Propriété

On a alors respectivement

(i) $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n = u_0 + nb.$

(ii) $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n = u_0 a^n.$

(iii) Si $\tilde{u}$ est solution particulière, les solutions sont les $u = v + \tilde{u}$ où v est solution de $(H)\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\quad v_{n+1} = a v_n$, équation homogène associée.

Démonstration

(i) Par récurrence.

(ii) Par récurrence.

(iii) Si $\tilde{u}$ est solution particulière, u est solution si et seulement si pour tout n, $(u-\tilde{u})_{n+1} = a(u-\tilde{u})_n$. D'où le résultat. □

Résoudre (H) ne pose pas de problème. Pour la solution particulière, il suffit de la prendre constante ! $c = ac + b$ si et seulement si $(1-a)c = b$.

Le cas $a = 1$ est le cas (i).

Si $a \neq 1$, on trouve $c = \frac{b}{1-a}$.

Les solutions sont donc de la forme $\left(\lambda a^n + \frac{b}{1-a}\right)_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. On peut ensuite exprimer λ à l'aide de u_0.

Exemple

$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = 2 - u_n.$

- Solution particulière : (1).
- Solutions de l'équation homogène : $\left(\lambda(-1)^n\right)_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
- Solutions générales : $\left(1+\lambda(-1)^n\right)_n = \left(1+(u_0-1)(-1)^n\right)_n$.

Autre rédaction possible : 1 est solution et u l'est si et seulement si pour tout n, $u_{n+1} - 1 = -(u_n - 1)$ si et seulement si pour tout n, $u_n - 1 = (u_0-1)(-1)^n$ si et seulement si pour tout n, $u_n = 1 + (u_0-1)(-1)^n$.

2 Relation de récurrence linéaire d'ordre 2

Définition

On dit qu'une suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente linéaire d'ordre 2 homogène à cœfficients constants** lorsqu'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

L'**équation caractéristique** associée est $(E)\ r^2 = ar + b$.

Un peu comme pour les équations différentielles, on se demande quelles sont les solutions géométrique $(r^n)_n$: on a $\forall n \in \mathbb{N},\quad r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$ ce qui est vérifié lorsque $r^2 = ar + b$.

Notons que l'on a facilement qu'une combinaison linéaire de solution l'est encore.

Ici, nous nous contentons de résoudre des équations homogènes.

Propriété

Si $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ *avec* $a, b \in \mathbb{K}$, $(E)\ r^2 = ar + b$ *avec* $(a,b) \neq (0,0)$.

- *Soit* (E) *admet deux solutions distinctes* r_1 *et* r_2 *dans* $\mathbb{K}$, *alors les solutions sont les suites pour lesquelles on a* $A, B \in \mathbb{K}$ *tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

- *Soit (E) admet une unique solution (double) r dans $\mathbb{K}$, alors les solutions sont les suites pour lesquelles on a $A, B \in \mathbb{K}$ tels que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n = (A + nB) r^n.$$

- *Soit (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\rho e^{\pm i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Alors les solutions sont les suites pour lesquelles on a $A, B \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n = (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))\rho^n$$

c'est-à-dire pour lesquelles on a $K, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n = K\cos(n\theta + \varphi)\rho^n.$$

Remarques

R1 – ⚠ les e^{rx} des équations différentielles deviennent des r^n et il faut ici prendre la forme trigonométrique des solutions de (E) et non la forme algébrique.

R2 – A et B se trouvent simplement en résolvant un système à l'aide de u_0 et u_1.

R3 – De nouveau ici, les solutions sont les combinaisons linéaires de deux solutions non colinéaires. Donc connaissant deux solutions non colinéaires, on obtient toutes les solutions.

R4 – Être capable de retrouver les solutions réelles lorsque $\Delta < 0$ à partir des solutions complexes.

Démonstration

- On a bien (r_1^n) et (r_2^n) solutions. Réciproquement, on cherche $A, B \in \mathbb{K}$ tels que $\begin{cases} A + B = u_0 \\ Ar_1 + Br_2 = u_1 \end{cases}$ et ce système a une unique solution car son déterminant est $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0.$
Alors avec cette solution, la formule est vraie pour $n = 0$ ou 1.
Si, par récurrence d'ordre 2, elle est vrai pour un n, aux rangs n et $n+1$, alors

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n = a(Ar_1^{n+1} + Br_2^{n+1}) + b(Ar_1^n + Br_2^n) = A(ar_1 + b)r_1^n + B(ar_2 + b)r_2^n$$

Donc $u_{n+2} = Ar_1^{n+2} + Br_2^{n+2}$ car r_1, r_2 sont solutions de (E).
- On vérifie qu'on a bien (r^n) et (nr^n) solutions. Réciproquement, on cherche $A, B \in \mathbb{K}$ tels que $\begin{cases} A = u_0 \\ (A + B)r = u_1 \end{cases}$ et ce système a une unique solution car $r \neq 0$ car $(a, b) \neq (0, 0)$.
Alors avec cette solution, la formule est vraie pour $n = 0$ ou 1.

Si, par récurrence d'ordre 2, elle est vrai pour un n, aux rangs n et $n+1$, alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n &= a(A+(n+1)B)r^{n+1} + b(A+nB)r^n \\ &= (A+nB)(ar+b)r^n + Bar^{n+1} \end{aligned}$$

Or $r = \frac{a}{2}$ (racine double) donc $Bar^{n+1} = 2Br^{n+2}$.
Donc $u_{n+2} = (A+(n+2)B)r^{n+2}$, ce qui établit la récurrence.

- Une suite réelle solution est un cas particulier de suite complexe solution. On va donc pouvoir écrire, avec $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u_n = \mathfrak{Re}(u_n) &= \mathfrak{Re}\left((A_1 + \mathrm{i}A_2)\rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + (B_1 + \mathrm{i}B_2)\rho^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\right) \\ &= ((A_1+B_1)\cos(n\theta) + (B_1 - A_1)\sin(n\theta))\,\rho^n \end{aligned}$$

avec $A = A_1 + B_1$ et $B = B_1 - A_1$ qui décrivent $\mathbb{R}$ entier lorsque $A_1 + \mathrm{i}A_2$ et $B_1 + \mathrm{i}B_2$ décrivent $\mathbb{C}$. □

III LIMITE D'UNE SUITE RÉELLE

1 Suites convergentes

Définition : Suite convergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On dit que $(u_n)_n$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ce qui est strictement équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On note alors $u_n \to \ell$.
Lorsqu'un tel ℓ existe, la suite (u_n) est dite **convergente**. Sinon, elle est **divergente**.

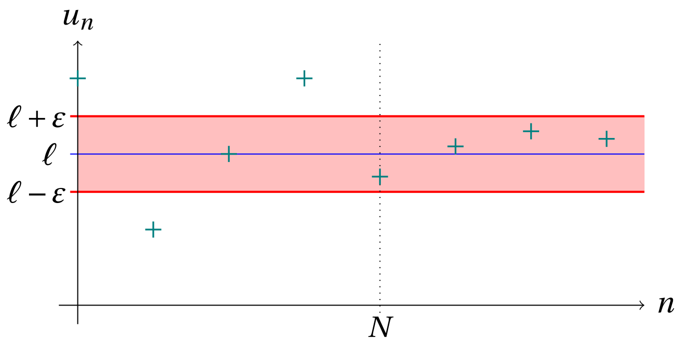
Remarques

R1 – $\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N,$ se traduit par « À partir d'un certain rang ». $u_n \to \ell$ si et seulemttoptent si $\forall \varepsilon > 0,$ apcr $u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.

R2 – Ici, N dépend de ε.

R3 – On utilise toujours la version avec inégalité large. Celle avec l'inégalité stricte est à réservé à des cas bien particuliers.

À partir d'un certain rang, tous les termes de la suites sont dans le segment $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$, et c'est valable pour ε aussi petit que l'on veut.



Exemple

$\frac{1}{n} \to 0$ car si $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$ si $n \geqslant \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$.

Propriétés

(i) $u_n \to \ell \iff u_n - \ell \to 0 \iff |u_n - \ell| \to 0$.

(ii) Si $v_n \to 0$ *et* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant v_n$ *alors* $u_n \to \ell$.

(iii) Si $u_n \to \ell$, *alors* $|u_n| \to |\ell|$.

Démonstration

(i) La définition de la limite s'écrit de la même manière dans les trois cas, avec $||u_n - \ell| - 0| = |u_n - \ell|$.

(ii) Si $v_n \to 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant v_n$.
Soit $\varepsilon > 0$. On a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \leqslant N$, $|v_n| = v_n \leqslant \varepsilon$, et donc $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Ainsi $u_n \to \ell$.

(iii) Si $u_n \to \ell$, alors $||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell| \to 0$ donc $|u_n| \to |\ell|$ par (ii). $\square$

Propriété : Unicité de la limite

*Si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, ℓ est unique appelé **limite de** u.*
*On note alors (et seulement si la convergence est **démontrée**) $\ell = \lim u_n$.*

Démonstration

Si $u_n \to \ell$ et $u_n \to \ell'$, soit $\varepsilon > 0$.
On a $N, N' \in \mathbb{N}$ tels que si $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et si $n \geqslant N'$, $\left|u_n - \ell'\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Donc si $n \geqslant \max(N, N')$, $\left|\ell - \ell'\right| = \left|\ell - u_n + u_n - \ell'\right| \leqslant |u_n - \ell| + \left|u_n - \ell'\right| \leqslant \varepsilon$.
Si $\ell \neq \ell'$, on peut prendre $\varepsilon = \frac{\left|\ell - \ell'\right|}{2}$ et on obtient une contradiction. $\square$

Exemple

$((-1)^n)_n$ n'a pas de limite sinon, pour tout $\varepsilon > 0$, $|1 - \ell| \leqslant \varepsilon$ et $|-1 - \ell| \leqslant \varepsilon$ donc $\ell = 1$ et $\ell = -1$.

Propriété : Caractère borné d'une suite convergente

Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.

Démonstration

Si $u_n \to \ell$, avec $\varepsilon = 1$, à partir d'un certain rang N, $u_n \in [\ell - 1, \ell + 1]$ donc u est bornée.
Pour la réciproque : $((-1)^n)_n$. □

Corollaire

Une suite non bornée diverge.

Démonstration

C'est la contraposée. □

Exemple

$(n)_n$, $(2^n)_n$, etc.

2 Limites infinies

Définition : Limite infinie

- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $+\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant A$$

ou de manière équivalente

$$\forall A \geqslant 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant A$$

On note alors $u_n \to +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$.

- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $-\infty$ lorsque

$$\forall B \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant B$$

ou de manière équivalente

$$\forall B \leqslant 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant B$$

On note alors $u_n \to -\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$.

Remarques

R1 – $u_n \to +\infty$ ssi $\forall A \in \mathbb{R}$, apcr $u_n \in [A, +\infty[$.
$u_n \to -\infty$ ssi $\forall B \in \mathbb{R}$, apcr $u_n \in [-\infty, B[$.

R2 – $u_n \to -\infty \iff -u_n \to +\infty$.

R3 – Si $u_n \to +\infty$, alors $(u_n)_n$ est minorée et Si $u_n \to -\infty$, alors $(u_n)_n$ est majorée.

Exemple

$n \to +\infty$ (!), $n^2 \to +\infty$.

3 Limites et ordre

Propriété : Passage des inégalités à la limite

Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u \to \ell \in \mathbb{R}$ et $v \to \ell' \in \mathbb{R}$ et si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

*Si on suppose à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, **l'inégalité devient large à la limite** : $\ell \leqslant \ell'$.*

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$.
On a $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ tels que

- si $n \geqslant N_1$, $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$,
- si $n \geqslant N_2$, $\left|v_n - \ell'\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$,
- si $n \geqslant N_3$, $u_n \leqslant v_n$.

Alors si $n \geqslant \max(N_1, N_2, N_3)$, $\ell - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant \ell' + \frac{\varepsilon}{2}$.
Ainsi, $\forall \varepsilon > 0, \quad \ell - \ell' \leqslant \varepsilon$.
Donc $\ell - \ell'$ minore $\mathbb{R}_+^*$, donc $\ell - \ell' \leqslant \inf \mathbb{R}_+^* = 0$, d'où le résultat.

Contre-exemple pour l'inégalité stricte : si $u_n = \frac{1}{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{n}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < v_n$ et les deux suites tendent vers 0. □

Propriété

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors

- *Si $\ell > a$, à partir d'un certain rang $u_n > a$.*
- *Si $\ell < a$, à partir d'un certain rang $u_n < a$.*

Démonstration

Si $\ell = \pm\infty$, c'est la définition (quitte à prendre $A = a + 1$ ou $B = a - 1$).
Si $\ell \in \mathbb{R}$, on choisit $\varepsilon = |\ell - a|$.

- Si $\ell > a$, à partir d'un certain rang, $|u_n - \ell| < \ell - a$ donc $u_n > \ell - (\ell - a) = a$.

- Si $\ell < a$, à partir d'un certain rang, $|u_n - \ell| < a - \ell$ donc $u_n < \ell + (a - \ell) = a$. $\square$

Corollaire

Si $u_n \to \ell > 0$, alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$.

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que
- $v \to \ell$
- $w \to \ell$
- *à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$*

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que
- $v \to +\infty$
- *à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$*

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que
- $w \to -\infty$
- *à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant w_n$*

alors $u \to -\infty$.

Démonstration

(i) Soit $\varepsilon > 0$.

On a $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ tels que
- $\forall\, n \geqslant N_1, \quad |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
- $\forall\, n \geqslant N_2, \quad |w_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
- $\forall\, n \geqslant N_3, \quad v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

Alors si $N = \max(N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{N}$ et si $n \geqslant N$,

$$\ell - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

donc $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

(ii) Soit $A \in \mathbb{R}$.

On a $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que
- $\forall\, n \geqslant N_1, \quad v_n \geqslant A$
- $\forall\, n \geqslant N_3, \quad u_n \geqslant v_n$

Alors si $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$ et si $n \geqslant N$, $u_n \geqslant A$.

(iii) $-w \to +\infty$ et apcr $-u_n \geqslant -w_n$ donc, par (ii), $-u \to +\infty$ donc $u \to -\infty$. $\square$

4 Opérations sur les limites

Propriété

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n \to \lambda \ell$.*

(ii) *Si $u \to 0$ et v bornée, alors $uv \to 0$.*

(iii) *Si $u \to +\infty$ et v minorée, $u+v \to +\infty$.*

Démonstration

(i) Si $\lambda = 0$, c'est immédiat. Sinon, soit $\varepsilon > 0$.
On a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon_0 = \dots$ (à déterminer)
Alors si $n \geqslant N$, $|\lambda u_n - \lambda \ell| = |\lambda||u_n - \ell| \leqslant |\lambda| \varepsilon_0 = \varepsilon$ en choisissant $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$.

(ii) On a $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant M$.
Alors si $n \in \mathbb{N}$, $|u_n v_n| = |u_n||v_n| \leqslant M|u_n| \to 0$ d'après (i), donc $u_n v_n \to 0$.

(iii) Soit $A \in \mathbb{R}$. On a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $u_n \geqslant A_0 = \dots$ (à déterminer)
On a $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant m$.
Alors si $n \geqslant N$, $u_n + v_n \geqslant A_0 + m = A$ en prenant $A_0 = A - m \in \mathbb{R}$. □

Propriété

Si $u \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors lorsque ces opérations sont bien définies,

- $u + v \to \ell_1 + \ell_2$
- $uv \to \ell_1 \ell_2$

Remarque

Dans les cas douteux, il peut se passer tout et n'importe quoi.
Par exemple, pour $0 \times (+\infty)$:

- $\dfrac{1}{n} \times n^2 \to +\infty$
- $\dfrac{-1}{n} \times n^2 \to -\infty$
- $\dfrac{\alpha}{n} \times n \to \alpha$
- $\left(\dfrac{(-1)^n}{n} \times n\right)$ n'a pas de limite.

Démonstration

- **Cas fini**
  - ⋆ **Si** $u_n \to \ell_1 \in \mathbb{R}$ **et** $v_n \to \ell_2 \in \mathbb{R}$**, alors** $u_n + v_n \to \ell_1 + \ell_2$ **:**

    Soit $\varepsilon > 0$. On a $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$, $|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2}$ et si $n \geqslant N_2$, $|1_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$,

    Alors si $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$ et si $n \geqslant N$,

    $$|(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| \underset{\text{IT}}{\leqslant} |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon_0 + \varepsilon_1 = \varepsilon$$

  - ⋆ **Si** $u_n \to \ell_1 \in \mathbb{R}$ **et** $v_n \to \ell_2 \in \mathbb{R}$**, alors** $u_n v_n \to \ell_1 \ell_2$ **:**

    $$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| &= |(u_n - \ell_1) v_n + \ell_1 (v_n - \ell_2)| \\ &\underset{\text{IT}}{\leqslant} \underbrace{\underbrace{|u_n - \ell_1|}_{\longrightarrow 0} \underbrace{|v_n|}_{\text{CV donc bornée}}}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{\underbrace{|v_n - \ell_2|}_{\longrightarrow 0} \underbrace{|\ell_1|}_{\text{borné}}}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

    en utilisant la somme des limites. Donc $u_n v_n \to \ell_1 \ell_2$.

- **Cas infini**
  - ⋆ **Si** $u_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ **et** $v_n \to +\infty$**, alors** $u_n + v_n \to +\infty$ **:**

    u est minorée et $v \to +\infty$.
  - ⋆ **Si** $u_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ **et** $v_n \to -\infty$**, alors** $u_n + v_n \to -\infty$ **:**

    $-u \to -\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $-v \to +\infty$, donc $-u - v \to +\infty$.
  - ⋆ **Si** $u_n \to \ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ **et** $v_n \to +\infty$**, alors** $u_n v_n \to +\infty$ **:**

    Soit $m > 0$ tel que $m < \ell$ (par exemple $\frac{\ell}{2}$ si ℓ est finie, 1 sinon).

    On a $N_1 \in \mathbb{N}$ tels que si $n \geqslant N_1$, $u_n \geqslant m > 0$.

    Soit $A \geqslant 0$. On a $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_2$, $v_n \geqslant A_0 = \dfrac{A}{m}$.

    Alors si $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, $u_n v_n \geqslant m \dfrac{A}{m} = A$.
  - ⋆ **Si** $u_n \to \ell \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$ **et** $v_n \to -\infty$**, alors** $u_n v_n \to +\infty$ **:**

    $-u \to -\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $-v \to +\infty$, donc $uv = (-u)(-v) \to +\infty$.
  - ⋆ **Si** $u_n \to \ell \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$ **et** $v_n \to +\infty$**, alors** $u_n v_n \to -\infty$ **:**

    $-u \to -\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $v \to +\infty$, donc $-uv = (-u)v \to +\infty$.
  - ⋆ **Si** $u_n \to \ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ **et** $v_n \to -\infty$**, alors** $u_n v_n \to -\infty$ **:**

    $u \to \ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $-v \to +\infty$, donc $-uv = u(-v) \to +\infty$. □

Remarque

On retrouve que si u bornée et $v \to 0$ alors $uv \to 0$: on a M tel que $|u| \leqslant M$ et alors $|uv| \leqslant M|v| \to 0$ donc $uv \to 0$.

Propriété

- *Si* $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}^*$*, alors à partir d'un certain rang,* $u_n \neq 0$ *et* $\dfrac{1}{u_n} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} & \text{si } \ell \text{ finie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- *Si* $u_n \to 0$ *et à partir d'un certain rang* $u_n > 0$*, alors* $\dfrac{1}{u_n} \to +\infty$.
- *Si* $u_n \to 0$ *et à partir d'un certain rang* $u_n > 0$*, alors* $\dfrac{1}{u_n} \to -\infty$.

Démonstration

- Si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}^*$, $|u_n| \to |\ell| > \dfrac{|\ell|}{2} > 0$ donc on a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $|u_n| > \dfrac{|\ell|}{2} > 0$ et en particulier $u_n \neq 0$.
  Si $n \geqslant N$,
  $$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n||\ell|} \leqslant \frac{2}{|\ell|^2}|u_n - \ell| \longrightarrow 0$$
  donc $\dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{\ell}$.
- Si $u_n \to +\infty$ et $\varepsilon > 0$, on a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $u_n \geqslant \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Alors $\left|\dfrac{1}{u_n}\right| = \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$.
- Si $u_n \to -\infty$, $-u \to +\infty$ et $\dfrac{1}{u} = -\dfrac{1}{-u} \to 0$.
- Si $u_n \to 0^+$ et $A > 0$, on a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $|u_n| = u_n \leqslant \dfrac{1}{A}$ donc $\dfrac{1}{u_n} \geqslant A$.
- Si $u_n \to 0^-$, $-u \to 0^+$ et $\dfrac{1}{u} = -\dfrac{1}{-u} \to -\infty$. □

5 Comparaison des suites usuelles

Propriété : Convergence des suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- *Si* $q = 1$, $q^n \to 1$.
- *Si* $|q| < 1$, $q^n \to 0$.
- *Si* $q > 1$, $q^n \to +\infty$.
- *Si* $q \leqslant -1$, (q^n) *n'a pas de limite. Si* $q < -1$*, la suite n'est ni majorée, ni minorée.*

Démonstration

- Si $q = 1$, ok.
- Si $|q| < 1$, $|q^n| = |q|^n = \mathrm{e}^{n \ln |q|} \to 0$.
- Si $q > 1$, $q^n = \mathrm{e}^{n \ln q} \to +\infty$.
- Si $q < -1$, $q^{2k} \to +\infty$ et $q^{2k+1} \to -\infty$ donc (q^n) n'est ni majorée, ni minorée. En particulier, elle n'a pas de limite. □

Propriété : Critère de d'Alembert

*Soit u une suite réelle **à termes strictement positifs.** On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.*

- *Si $\ell < 1$, alors $u_n \to 0$,*
- *Si $\ell > 1$, alors $u_n \to +\infty$.*
- *Si $\ell = 1$, c'est le cas douteux : on ne peut rien conclure.*

Démonstration

- Si $\ell < 1$, soit q tel que $\ell < q < 1$. À partir d'un certain rang n_0, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$ donc $u_{n+1} \leqslant q u_n$. Alors, par récurrence, si $n \geqslant n_0$, $0 < u_n \leqslant q^{n-n_0} u_{n_0} \longrightarrow 0$. Donc $u \to 0$.
- Si $\ell > 1$, soit q tel que $1 < q < \ell$. À partir d'un certain rang n_0, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q$ donc $u_{n+1} \geqslant q u_n$. Alors, par récurrence, si $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant q^{n-n_0} u_{n_0} \longrightarrow +\infty$. Donc $u \to +\infty$.
- $\frac{n+1}{n} \to 1$ et $n \to +\infty$. $\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \to 1$ et $\frac{1}{n} \to 0$. $\square$

Remarque

Intéressant lorsque u_n s'écrit avec des produits/exposants.

Exemple

$n! \to +\infty$.

Propriété : Croissances comparées

Soient $\alpha, \beta > 0$, $q > 1$.

$$\ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n$$

*où $u \ll v$ signifie $\frac{u}{v} \to 0$ et on dit alors que u est **négligeable** devant v.*

Démonstration

- Par croissances comparées des fonctions, on a déjà $\ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n$.
- Si $u_n = \frac{q^n}{n!} > 0$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{q}{(n+1)} \to 0 < 1$. Par critère de d'Alembert, $u_n \to 0$.
- $n! = 2 \times \cdots \times n \leqslant n^{n-1} = \frac{n^n}{n}$ donc $\frac{n!}{n^n} \to 0$. $\square$

IV Les suites monotones

1 Théorème de la limite monotone

Théorème : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (respectivement décroissante).

(i) Si u est majorée (respectivement minorée) alors u converge vers $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ (respectivement $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$).

(ii) Si u n'est pas majorée (resp. minorée), alors $u \to +\infty$ (respectivement $u \to -\infty$).

Démonstration

Soit $E = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Alors $E \neq \varnothing$. On suppose u croissante (si u est décroissante, il suffit d'appliquer les résultats à $-u$ qui est croissante.)

(i) Si u est majorée, $\ell = \sup u_n = \sup E$ existe. Soit $\varepsilon > 0$.
Par caractérisation de la borne supérieure, on a $N \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon < u_N$ ($\ell - \varepsilon$ ne majore pas u).
Alors par croissance de u,

$$\forall\, n \geqslant N,\quad \ell - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant u_n \leqslant \sup u_n = \ell \leqslant \ell + \varepsilon$$

donc $\forall\, n \geqslant N,\ \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Finalement, $u_n \to \ell$.

(ii) Si u non majorée, soit $A \in \mathbb{R}$. A ne majore par u donc on a $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geqslant A$.
Par croissance de u, $\forall\, n \geqslant N,\ \ u_n \geqslant A$ donc $u \to +\infty$. □

Corollaire

Si u est une suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée), alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant \lim u$ (respectivement $u_n \geqslant \lim u$).
De plus, les inégalités sont strictes en cas de stricte monotonie.

Démonstration

$\lim u = \sup u$ (respectivement $\inf u$.)
Si u croit strictement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1} \leqslant \lim u$. □

2 Suites adjacentes

Définition : Suites adjacentes

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u et v sont adjacentes si

- u est croissante,
- v est décroissante,
- $v - u \to 0$.

Exemples

E 1 – $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ et $S'_n = S_n + \frac{1}{n}$.

(S_n) est croissante et si $n \geqslant 0$, $S'_{n+1} - S'_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{-1}{n(n+1)} < 0$ donc (S'_n) est décroissante.

De plus $S'_n - S_n = \dfrac{1}{n} \to 0$.

Donc (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.

E 2 – Si $x \in \mathbb{R}$, les suites d'approximation décimale par défaut et par excès $(d_n(x))$ et $(D_n(x))$ sont ajacentes.

Propriété

Si u, v sont adjacentes avec u croissantes, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$, les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.

Démonstration

Soit $w_n = v_n - u_n$. Alors par opérations, w est décroissante et $w_n \to 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_n \leqslant v_n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ donc u est croissante majorée par v_0 et v est décroissante minorée par u_0 et donc ces suites convergent. Comme $v_n - u_n \to 0$, les limites sont égales et l'encadrement découle des propriétés des suites monotones. □

Remarque

On a alors pour tout n, $|u_n - \ell| \leqslant |v_n - u_n| = v_n - u_n$ ce qui donne des information intéressante sur la **vitesse de convergence** : plus $v - u$ converge rapidement vers 0, plus u converge rapidement vers ℓ.

Cela permet aussi de connaitre un rang à partir duquel u_n est une approximation de ℓ à une précision donnée.

Exemples

E 1 – Approximations décimales : $|d_n(x)-x| \leqslant D_n(x)-d_n(x) = 10^{-n}$: convergence très rapide (au moins exponentielle).
Si on veut n décimales, on calcule $d_n(x)$ (évidemment !).

E 2 – $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \to \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Vu le calcul précédent, pour tout n, $\left|S_n - \frac{\pi^2}{6}\right| \leqslant \frac{1}{n}$. La converge est (au moins) en $\frac{1}{n}$ donc plutôt lente.
Si on veut n décimales, on calcule... S_{10^n} !

E 3 – **Dichotomie** : On construit des segments emboités en divisant leur taille par 2 à chaque étape : $I_0 = [a,b]$, pour tout n, $I_{n+1} \subset I_n$ avec $\ell(I_{n+1}) = \frac{\ell(I_n)}{2}$, avec $I_n = [a_n, b_n]$.
Alors $(a_n), (b_n)$ sont adjacentes, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$ et la convergence de (a_n) et (b_n) vers ℓ est au moins en $\frac{b-a}{2^n}$ donc très rapide.

V SUITES EXTRAITES, THÉORÈME DE BOLZANO-WEIERSTRASS

1 Définition

Définition : Suite extraite

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad v_n = u_{\varphi(n)}$.
φ est appelée **extractrice**.

Exemples

E 1 – $(u_{2n})_n = (u_0, u_2, u_4, \dots)$

E 2 – $(u_{2n+1})_n = (u_1, u_3, u_5, \dots)$

E 3 – $(u_{3n})_n = (u_0, u_3, u_6, \dots)$

E 4 – $\left(u_{n^2}\right)_n = (u_0, u_1, u_4, u_9, \dots)$

Remarque

Suite extraite d'une suite extraite : si φ et ψ sont des extractrices, $(v_n) = \left(u_{\varphi(n)}\right)$ et $(w_n) = \left(v_{\psi(n)}\right)$.
Alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad w_n = u_{\varphi\circ\psi(n)} \neq u_{\psi\circ\varphi(n)}$!

Exemple

$v = (u_{2n}) = (u_0, u_2, u_4, u_6, u_8 \dots)$ et $w = (v_{n^2}) = (v_0, v_1, v_4, v_9, \dots)$ alors $w = (u_0, u_2, u_8, \dots) = (u_{2n^2}) \neq (u_{(2n)^2})$.

2 Propriétés

Lemme

Si φ est une extractrice, alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \varphi(n) \geqslant n$.

Démonstration

Par récurrence simple, c'est vrai pour $n = 0$ et si c'est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$ donc $\varphi(n+1) \geqslant n+1$ car on est dans $\mathbb{N}$. □

Propriété

(i) Toute suite extraite d'une suite (strictement) croissante, (strictement) décroissante, majorée, minorée, bornée, constante, stationnaire l'est encore.

(ii) Toute suite d'une suite extraite d'une suite u est une suite extraite de u.

(iii) Si $u \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, toute suite extraite de u tend vers ℓ.

(iv) Réciproquement, si $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u \to \ell$.

Remarques

R1 – (iv) se généralise pourvu qu'on ait un nombre fini de suites extraites qui recouvrent tous les termes de u.

R2 – Une limite d'une suite extraite s'appelle une **valeur d'adhérence** de u. Les suites convergentes n'en ont qu'une !

R3 – La propriété (iii) sert à parfois à montrer qu'une suite n'a pas de limite : il suffit de trouver deux suites extraites n'ayant pas le même comportement asymptotique.

Exemple

$(-1)^n$.

Démonstration

(i) Pour u croissante, par exemple : si $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ donc $u_{\varphi(n+1)} \geqslant u_{\varphi(n)}$.

(ii) Voir remarque précédente.

(iii) Si $\ell \in \mathbb{R}$, soit $\varepsilon > 0$. On a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Alors si $n \geqslant N$, $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$ et $\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$ donc $u_{\varphi(n)} \to \ell$.

Si $u_n \to +\infty$, soit $A \in \mathbb{R}$. On a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $u_n \geqslant A$.
Alors si $n \geqslant N$, $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$ et $u_{\varphi(n)} \geqslant A$ donc $u_{\varphi(n)} \to +\infty$.

Si $u_n \to -\infty$, $-u_n \to +\infty$...

(iv) Pour $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. On a $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que si $n \geqslant N_1$, $|u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$ et si $n \geqslant N_2$, $|u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Alors si $n \geqslant N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$,
- soit n est pair et $n = 2k$ avec $k \geqslant N_1$,
- soit n est impair et $n = 2k+1$ avec $k \geqslant N_2$,

donc $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Donc $u_n \to \ell$.
Idem si $\ell = \pm\infty$. □

Exemples

E1 – $(S_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$ converge : on montre que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, donc convergent vers une même limite.

Remarque : Théorème spécial sur les séries alternées

si $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ avec (a_n) décroissant et tendant vers 0, alors (S_n) converge.

E2 – Série harmonique : $(H_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$ diverge. $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$ donc (H_n) ne peut pas converger.
Comme c'est une suite croissante, $H_n \to +\infty$.

3 Théorème de Bolzano-Weierstraß

Théorème : Théorème de Bolzano-Weierstraß

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

Démonstration

$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée.
- **1ère étape : Dichotomie.** Comme u est bornée, on a $a_0 \leqslant b_0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_0 \leqslant u_n \leqslant b_0$.
  Soit $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. Parmi les segments $[a_0, c_0]$ et $[c_0, b_0]$, au moins l'un des deux contient une infinité de termes u_n. Soit $[a_1, b_1]$ ce segment.
  Puis, par récurrence, on construit de la même manière deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- ⋆ $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$,
- ⋆ $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$,
- ⋆ le segment $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes u_n.

Alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n} \to 0$ et $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes.
Elles convergent donc vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

- **2ème étape : Extraction.** On construit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$.
  - ⋆ $\varphi(0) \in \mathbb{N} : u_{\varphi(0)} \in [a_0, b_0]$.
  - ⋆ $\varphi(1) \in \{p > \varphi(0) \mid u_p \in [a_1, b_1]\}$ qui existe car $[a_1, b_1]$ contient une infinité de termes u_n.
  - ⋆ puis par récurrence, ayant trouvé $\varphi(n-1)$,

$$\varphi(n) \in \{p > \varphi(n-1) \mid u_p \in [a_n, b_n]\}$$

qui existe car $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes u_k.

Par construction, $(u_\varphi(n))$ est une suite extraite de u.

- **3ème étape : Conclusion.** On a alors par définition,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$$

donc par encadrement $u_{\varphi(n)} \to \ell$. □

2e méthode : En extrayant une suite monotone.

On considère les termes de la suite comme des immeubles au bord de mer (en $+\infty$). Deux catégories :

- Ceux qui ont vu sur la mer, c'est-à-dire u_n tel que $\forall\, p > n,\quad u_p < u_n$.
- Les autres : u_n tel que $\exists\, p > n,\quad u_p \geqslant u_n$.

Alors

- soit il y a une infinité de termes de la première catégorie, et il vont former une suite extraite décroissante.
- soit il y en a un nombre fini et à partir d'un certain rang, tous les termes seront de la deuxième catégorie, ce qui permet de former une suite extraite croissante.

Dans tous les cas on extrait une suite monotone et bornée, donc convergente.

VI Critères séquentiels

1 Caractérisation séquentielle des bornes inférieure et supérieure

Rappel :

Propriété

Soit A partie non vide $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in A,\quad x \leqslant \alpha \\ \exists\, (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}},\quad a_n \to \alpha \end{cases}$$

$$\beta = \inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \quad x \geqslant \beta \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \quad a_n \to \beta \end{cases}$$

Démonstration

Voir chapitre précédent. □

2 Caractérisation séquentielle de la densité

Propriété

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Démonstration

- $(\Rightarrow)$: Si $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n \in A$ tel que $x - \frac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant x + \frac{1}{n}$ car A est dense dans $\mathbb{R}$. Alors, par encadrement, $a_n \to x$.
- $(\Leftarrow)$: Si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A, et si $x < y$. Soit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to \frac{x+y}{2}$. Avec $\varepsilon = \frac{y-x}{2}$, on a un rang à partir duquel

$$x = \frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2} < a_n < \frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2} = y$$

avec $a_n \in A$. Donc A est dense dans $\mathbb{R}$. □

Corollaire

(i) Tout réel est limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.

(ii) $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

(ii) : il suffit de prendre une suite d'approximations décimales. □

VII EXTENSION AUX SUITES COMPLEXES

Notation

Soit $z = (z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note

- $\mathfrak{Re}(z) = (\mathfrak{Re}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\mathfrak{Im}(z) = (\mathfrak{Im}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\overline{z} = \left(\overline{z_n}\right) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $|z| = (|z_n|) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Définition

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}$ est dite convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n - \ell| \to 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists N \in \mathbb{N},\quad \forall n \geqslant N,\quad |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Remarques

R1 – Pas de limite infinie dans $\mathbb{C}$. On peut au mieux avoir $|z_n| \to +\infty$.

R2 – Les propriétés sur les limites (opérations, une suite convergente est bornée, etc.) sont les même que sur $\mathbb{R}$.
Par exemple, si $z_n \to \ell$ et $z_n' \to \ell'$, alors

$$\left|z_n z_n' - \ell\ell'\right| \leqslant |z_n - \ell|\left|z_n'\right| + |\ell|\left|z_n' - \ell\right| \to 0 \ldots$$

Propriété

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

(i) $z_n \to \ell \iff \mathfrak{Re}\, z_n \to \mathfrak{Re}\, \ell$ et $\mathfrak{Im}\, z_n \to \mathfrak{Im}\, \ell$

(ii) $z_n \to \ell \implies |z_n| \to |\ell|$.
La réciproque est fausse pour $\ell \neq 0$, mais $z_n \to 0 \iff |z_n| \to 0$.

Démonstration

(i)
- $|\mathfrak{Re}\, z_n - \mathfrak{Re}\, \ell| = |\mathfrak{Re}(z_n - \ell)| \leqslant |z_n - \ell|$
- $|\mathfrak{Im}\, z_n - \mathfrak{Im}\, \ell| = |\mathfrak{Im}(z_n - \ell)| \leqslant |z_n - \ell|$
- $|z_n - \ell| = \sqrt{(\mathfrak{Re}\, z_n - \mathfrak{Re}\, \ell)^2 + (\mathfrak{Im}\, z_n - \mathfrak{Im}\, \ell)^2}$

(ii) $||z_n| - |\ell|| \leqslant |z_n - \ell|$ □

Rappel :

Définition

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |z_n| \leqslant M$.

Propriété

Toute suite complexe convergente est bornée

Démonstration

Si $z_n \to \ell$, alors $|z_n| \to |\ell|$ donc la suite réelle $(|z_n|)$ est bornée donc par définition (z_n) l'est aussi. □

Propriété : Suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$.

- *Si* $q = 1$, $q^n \to 1$.
- *Si* $|q| < 1$, $q^n \to 0$.
- *Si* $|q| > 1$, (q^n) *n'est pas bornée et donc diverge.*
- *Si* $|q| = 1$ *et* $q \neq 1$, (q^n) *diverge en étant bornée.*

Démonstration

- Si $q = 1$: ok
- Si $|q| < 1$, $|q^n - 0| = |q|^n \to 0$ donc $q^n \to 0$.
- Si $|q| > 1$, $|q^n| = |q|^n \to +\infty$ donc (q^n) est non bornée et diverge.
- Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, on a $\theta \in]0, 2\pi[$ tel que $q = e^{i\theta}$. Alors $|q^n| = 1$ donc la suite est bornée (on reste sur le cercle trigonométrique) et si $q^n = e^{in\theta} \to \ell$, alors $|q^n| = 1 \to |\ell| = 1$ par unicité de la limite. En particulier $\ell \neq 0$ et $q = \dfrac{q^{n+1}}{q^n} \to \dfrac{\ell}{\ell} = 1$ ce qui est contradictoire. □

Remarque

En particulier, si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, les suites $(\cos(n\theta))_n$ et $(\sin(n\theta))_n$ divergent. En effet, si l'une convergeait, à l'aide de $\cos((n+1)\theta)$ ou $\sin((n+1)\theta)$, on obtient que l'autre converge aussi et alors $(e^{in\theta})$ convergerait également.

Théorème : Théorème de Bolzano-Weierstraß

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

Démonstration

Si (z_n) est bornée, alors soit $(x_n) = (\mathfrak{Re}\, z_n)$ et $(y_n) = (\mathfrak{Im}\, z_n)$. Ces deux suites sont bornées. Par le théorème réel, on peut extraire une suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ de x. Puis $(y_{\varphi(n)})$ est bornée en tant que suite extraite d'une suite bornée, on peut donc en extraire une suite convergente : $(y_{\varphi\circ\psi(n)})$. Alors par extraction, $(x_{\varphi\circ\psi(n)})$ est également convergente et donc $(z_{\varphi\circ\psi(n)})$ converge. □

VIII SUITES RÉCURRENTES

1 Cas général

Le but est d'étudier les suites récurrentes réelles d'ordre 1 générales :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

avec $f : D \to \mathbb{R}$.

Propriété

Si $u_n \to \ell \in D$ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$ (ℓ est un point fixe de f).

Démonstration

Unicité de la limite avec $u_{n+1} \to \ell$ et $f(u_n) \to f(\ell)$. □

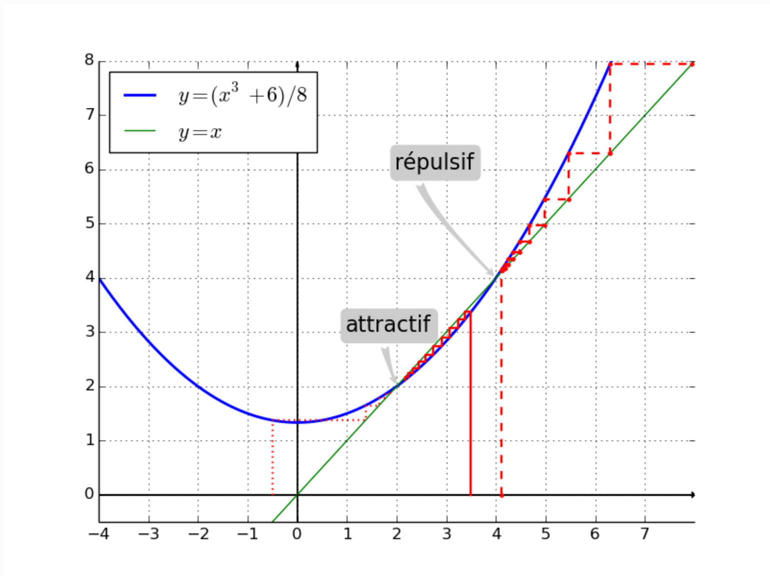
- On commence en général par faire un dessin, et par voir quelles propriétés vérifient directement la suite.
- Ensuite, les premières choses à cibler sont les **intervalles stables par** f : I tel que $f(I) \subset I$.
  Alors, par récurrence, si à partir d'un certain rang $u_{n_0} \in I$, la suite est bien définie et $\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \in I$.
  Vu la proriété précédente, bien souvent, l'une des bornes de l'intervalle sera un point fixe de f. (Il faut donc chercher les points fixes !)
  On pose en général $g(x) = f(x) - x$: les points fixes de f sont les zéros de g.
  Il faut aussi s'assurer que la suite est bien définie !
- Ensuite, on s'intéresse à la monotonie de f.
  - ⋆ La monotonie de la suite peut se trouver directement en remarquant que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$: il est donc primordial de connaître le signe de g.
  - ⋆ Si f est **croissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **monotone**.
    (Si $u_{n_0} \leqslant u_{n_0+1}$, ie $g\left(u_{n_0}\right) \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$u_n = f^{n-n_0}\left(u_{n_0}\right) \leqslant f^{n-n_0}\left(u_{n_0+1}\right) = u_{n+1}$$
    et si $u_{n_0} \geqslant u_{n_0+1}$, ie $g\left(u_{n_0}\right) \leqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$u_n = f^{n-n_0}\left(u_{n_0}\right) \geqslant f^{n-n_0}\left(u_{n_0+1}\right) = u_{n+1}.)$$
  - ⋆ Si f est **décroissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_{2n})_{n \geqslant \frac{n_0}{2}}$ et $(u_{2n+1})_{n \geqslant \frac{n_0-1}{2}}$ sont **monotones**, de monotonie contraire. Elles sont en fait solution de $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ avec $f \circ f$ croissante.
    Lorsqu'elles convergent vers une même limite (c'est-à-dire qu'elles sont adjacentes), alors (u_n) converge vers cette limite. Notons que les points fixes de f sont des points fixes de $f \circ f$ (mais la réciproque est fausse en général.)

Exemples

E 1 – $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+8}{6}$.

On pose donc $f(x) = \dfrac{x^2+8}{6}$ et $g(x) = f(x) - x = \dfrac{x^2-2x+8}{6} = \dfrac{(x-2)(x-4)}{6}$. En particulier, les points fixes de f sont 2 et 4. f est paire, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto \frac{x}{3}$. Les suites (u_n) sont toujours définies sans problème.

x	$-\infty$		-4		-2		0		2		4		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\searrow$	2	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$					$+$				0	$-$	0		$+$



Intervalles stables intéressants : $[0,2[$, $]2,4[$ et $]4,+\infty[$.

- $\boxed{\text{Si } u_0 \in]-2,2[,}$ $u_1 \in [0,2[$ stable par f, donc $\forall\, n \geqslant 1,\ \ u_n \in [0,2[$.
  Comme f est strictement croissante sur $[0,2[$, par récurrence, $u_{n+1} - u_n$ a le même signe que $u_2 - u_1 = g(u_1) > 0$, donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante. Remarquons qu'ici, on a même $(u_n)_{n\geqslant 0}$ strictement croissante.
  Comme (u_n) est croissante et majorée par 2, elle converge vers $\ell \in [0,2]$. Comme f est continue, ℓ est un point fixe de f, donc $\ell = 2$.
  $\boxed{u_n \to 2 \text{ en croissant strictement.}}$

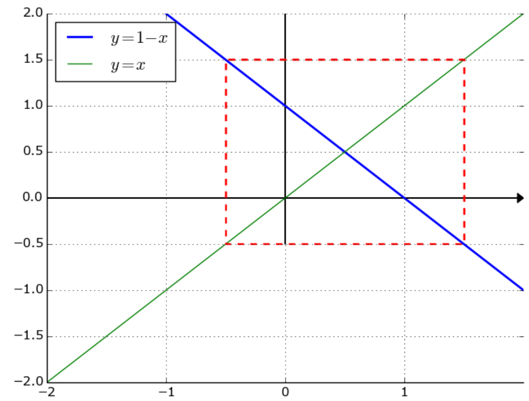
- $\boxed{\text{Si } u_0 \in]-4,-2[\cup]2,4[,}$ $u_1 \in]2,4[$ stable par f, donc $\forall\, n \geqslant 1,\ \ u_n \in]2,4[$.
  Comme f est strictement croissante sur $]2,4[$, par récurrence, $u_{n+1} - u_n$ a le même signe que $u_2 - u_1 = g(u_1) < 0$, donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.
  Comme $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 2, elle converge vers $\ell \in [2,4]$. Comme f est continue, ℓ est un point fixe de f. Comme on a $\ell \leqslant u_1 < 4$, $\ell = 2$.
  $\boxed{u_n \to 2 \text{ en décroissant strictement au moins à partir du rang 1.}}$

- $\boxed{\text{Si } u_0 \in]-\infty,-4[\cup]4,+\infty[,}$ $u_1 \in]4,+\infty[$ stable par f, donc $\forall\, n \geqslant 1,\ \ u_n \in]4,+\infty[$.
  Comme f est strictement croissante sur $]4,+\infty[$, par récurrence, $u_{n+1} - u_n$ a le même signe que $u_2 - u_1 = g(u_1) > 0$, donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante. Remarquons qu'ici, on a même $(u_n)_{n\geqslant 0}$ strictement croissante.

Si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, comme f est continue, ℓ est un point fixe de f. Comme $\ell \in [4, +\infty[$, $\ell = 4$. Or $4 < u_1 \leqslant \ell$ ce qui est contradictoire.
Comme $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et non convergente, $u_n \to +\infty$.
$\boxed{u_n \to +\infty \text{ en croissant strictement.}}$

- Si $\boxed{u_0 \in \{-2, 2\}, \forall\, n \geqslant 1, \quad u_n = 2.}$
- Si $\boxed{u_0 \in \{-4, 4\}, \forall\, n \geqslant 1, \quad u_n = 4.}$

E2 – $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = 1 - u_n$.



2 Cas d'une fonction contractante

Définition

Une fonction f est dite contractante sur un segment $[a, b]$ si et seulement si on a $k < 1$ tel que $\forall\, x, x' \in [a, b], \quad \left|f(x) - f(x')\right| \leqslant k\left|x - x'\right|$.

Cela se traduit graphiquement par le fait que les pentes des cordes ne sont « pas trop élevées ».

Cela est interessant si $I = [a, b]$ est stable par f. Si c'est le cas, si $\ell \in [a, b]$ point fixe de f (on peut montrer qu'il existe et est nécessairement unique), si $u_0 \in [a, b]$ stable par f, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [a, b]$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| = \left|f(u_{n-1}) - f(\ell)\right| \leqslant k\,|u_{n-1} - \ell| \leqslant \cdots \leqslant k^n\,|u_0 - \ell| \to 0$$

Donc directement $u_n \to \ell$, on a même une convergence exponentielle.

On peut parfois conclure rapidement grâce à l'inégalité des accroissements finis :

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose que

- *f est continue sur $[a, b]$*
- *f est dérivable sur $]a, b[$*
- *On a $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, x \in]a, b[, \quad \left|f'(t)\right| \leqslant k$.*

Alors $\forall\, x, x' \in [a, b], \quad \left|f(x) - f(x')\right| \leqslant k\left|x - x'\right|$.

Démonstration

Admis provisoirement. □

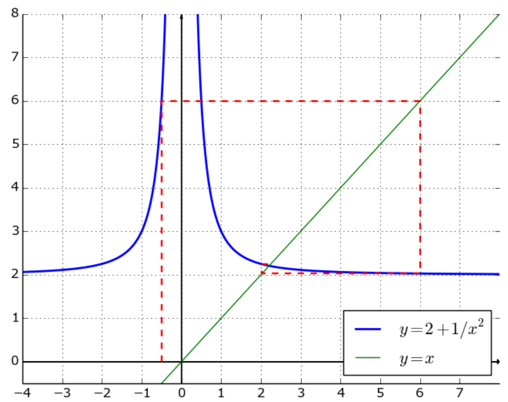
Remarque

On peut démontrer que si ℓ est un point fixe de f dérivable, alors
- si $|f'(\ell)| < 1$, le point fixe est attractif,
- si $|f'(\ell)| > 1$, le point fixe est répulsif,
- si $|f'(\ell)| = 1$, c'est le cas douteux. Tout peut arriver.

Exemple

$u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{u_n^2}$.

Par récurrence, (u_n) est définie et $u_n > 2$ à partir du rang 1.
$f : x \mapsto 2 + \frac{1}{x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, paire, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
$[2, +\infty[$ est stable par f et comme $u_1 \in [2, +\infty[$, $\forall\, n \geqslant 1,\quad u_n \in [2, +\infty[$.



$f(x) = x \iff x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ et une rapide étude de fonction montre, à l'aide du théorème de la bijection, qu'il y a un unique point fixe $\alpha \in [2, +\infty[$ pour f.
f est continue sur $[2, +\infty[$, dérivable sur $]2, +\infty[$ et si $x > 2$, $f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}(< 1)$.
D'après l'inégalité des accroissements finis,

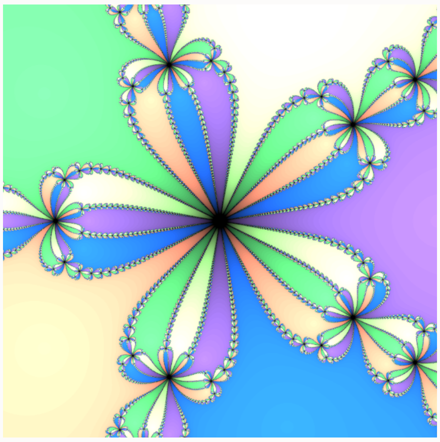
$$\forall\, x, x' \in [2, +\infty[,\quad \left|f(x) - f(x')\right| \leqslant \frac{1}{4}\left|x - x'\right|.$$

On en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |u_1 - \alpha|$ donc $\boxed{u_n \to \alpha}$ (plutôt rapidement.)

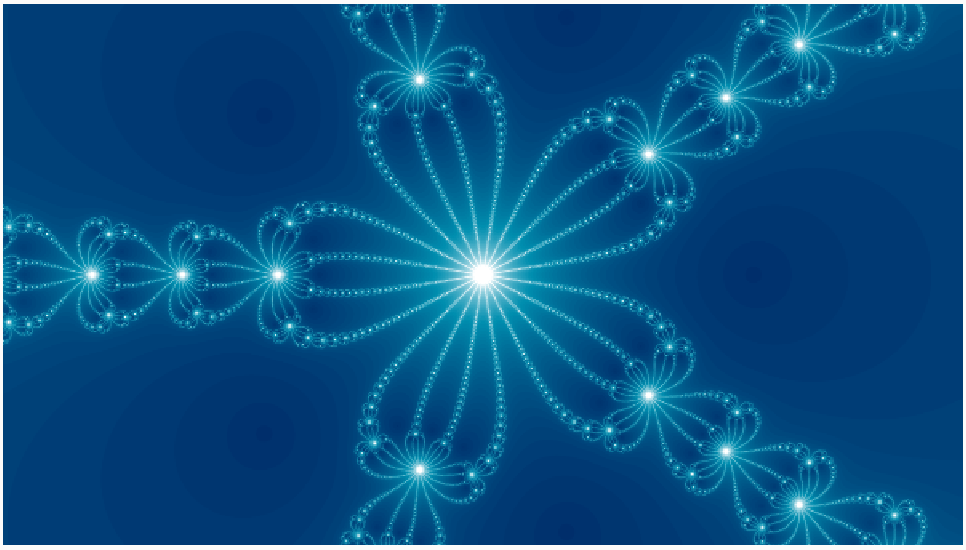
Remarque : Fractal de Newton

on itère une suite qui doit converger vers l'une des racines de $X^5 - 1$ et on colore le point suivant cette racine (dégradé pour la vitesse de convergence.) Cela met en évidence la notion de **bassin d'attraction**.
Pour f dérivable, il s'agit de considérer

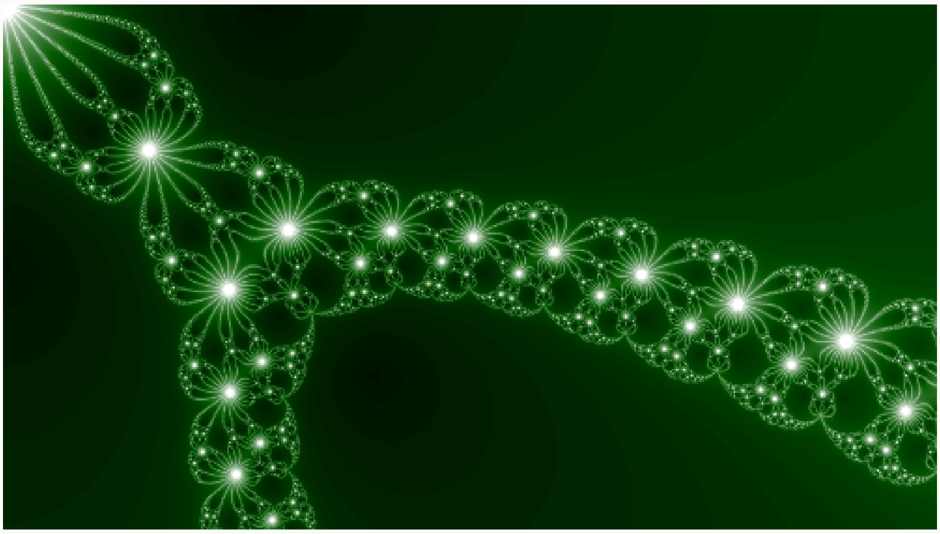
$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$



Version monochrome :



Avec $P(X) = X^8 + 15X^4 - 16$:



Lapin de Douady avec $P(X) = (X-1)\left(X-a+\frac{1}{2}\right)\left(X+a+\frac{1}{2}\right)$ où $a = -0{,}00508 + 0{,}33136\mathrm{i}$: