Ensembles de nombres usuels

Extrait du programme officiel :

L'objectif de ce chapitre est de fonder rigoureusement le cours d'analyse relatif aux propriétés des nombres réels. Il convient d'insister sur l'aspect fondateur de la propriété de la borne supérieure.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensembles de nombres usuels	
Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	La construction de $\mathbb{R}$ est hors programme.
Partie entière.	Notation $\lfloor x \rfloor$.
Approximations décimales d'un réel.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès. $\leftrightarrows$ I : représentation des réels en machine.
Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.	
Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.	
b) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$.	
Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.	

TABLE DES MATIÈRES

I $\mathbb{N}$: LES ENTIERS NATURELS

Question : Comment formalise-t-on l'ensemble $\mathbb{N}$?
Réponse : Comme l'unique ensemble [1]

- admettant un élément noté 0,
- tel que tout entier n admet un unique successeur ($s(n) = n+1$),
- aucun entier n'admet 0 comme successeur,
- deux entiers qui ont même successeur sont égaux (s est injective),
- si une partie A contient 0 et est stable par s, $A = \mathbb{N}$. (Principe de récurrence).

À partir de ces axiomes, on construit facilement les lois + et × habituelles, ainsi que l'ordre total $\leqslant$. On a la propriété remarquable suivante :

Propriété

*Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. (On dit que $\mathbb{N}$ est **bien ordonné.**)*
Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Démonstration

Si A n'a pas de plus petit élément, par récurrence, $\forall\, i \in [\![0, n]\!]$, $\;i \notin A$ donc A est vide.
Si A non vide majorée, l'ensemble B des majorants admet un plus petit élément N. Alors $\forall\, n \in A$, $\;n \leqslant N$ (majorant) et $N \in A$ sinon $N-1$ serait un majorant A. Donc $N = \max A$. □

Remarque

On peut démontrer que tout entier n a une unique écriture en base 10, c'est-à-dire de la forme $n = a_p a_{p-1} \cdots a_0 = a_p 10^p + \cdots + a_1 10 + a_0$ avec $a_0, \ldots, a_p \in [\![0, 9]\!]$.
De la même manière, on a une écriture unique de toute entier dans n'importe quelle base $b \in \mathbb{N}^*$: $n = \overline{a_q a_{q-1} \cdots a_0}^b = a_q b^q + \cdots + a_1 b + a_0$ avec $a_0, \ldots, a_q \in [\![0, b-1]\!]$.
Les chiffres $a_0, \cdots, a_q$ s'obtiennent comme restes des divisions euclidiennes[2] successives par b.

Exemple

2016 en base 2, 16.

II $\mathbb{Z}$: LES ENTIERS RELATIFS

L'idée est, à partir de $\mathbb{N}$, de rajouter un symétrique pour la loi + à chaque entier, pour définir $\mathbb{Z}$. On étend alors la définition de +, × et $\leqslant$ à $\mathbb{Z}$.

Propriété

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.
Toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.

Démonstration

Soit A partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$.

- Si $A \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$, alors $A \cap \mathbb{N}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ donc admet un max et $\max A \cap \mathbb{N} = \max A$.
- Sinon, $-A = \{-k, k \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc admet un min m. Alors $-m = \max A$.

Si A partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$, $-A$ partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$, donc admet un max, et on vérifie que

1. Il s'agit des axiomes de Peano, définissant $\mathbb{N}$ de manière unique à bijection près.
2. voir cours d'arithmétique.

$-\max(-A) = \min A$. □

III $\mathbb{Q}$: LES NOMBRES RATIONNELS

Pour définir $\mathbb{Q}$, on utilise la relation d'équivalence

$$(p,q)\mathscr{R}(p',q') \iff pq' = p'q$$

sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ dont les classes d'équivalences sont identifiées aux rationnels $\dfrac{p}{q}$.

La difficulté est alors de définir les lois + et × et l'ordre $\leqslant$ indépendamment du choix d'un représentant $\dfrac{p}{q}$ d'une fraction rationnelle r.

On montrera dans le cours d'arithmétique la propriété :

Propriété

Tout nombre rationnel s'écrit de manière unique $\dfrac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$ premiers entre eux, c'est-à-dire que p et q n'ont pas de diviseur non trivial en commun (la fraction est dite irréductible).

IV $\mathbb{D}$: LES NOMBRES DÉCIMAUX

On définit l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux comme l'ensemble des rationnels de la forme $\dfrac{n}{10^m}$, dont l'écriture décimal est finie.

Un tel nombre a une écriture en base 10 de la forme :

$$\begin{aligned} a_na_{n-1}\cdots a_0, a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-p} &= a_n10^n+\cdots+a_010^0+a_{-1}10^{-1}+\cdots+a_{-p}10^{-p}\\ &= a_n10^n+\cdots+a_0+\frac{a_{-1}}{10}+\cdots+\frac{a_{-p}}{10^p}\end{aligned}$$

avec tous les $a_i\in[\![0,9]\!]$.

On peut montrer que cette écriture **finie** est unique.

Remarque

On peut montrer qu'une écriture infinie ne l'est pas nécessairement : par exemple $0{,}999\ldots = 1$. En effet, si $x = 0{,}999\ldots$, $10\cdot x = 9 + x$.

V $\mathbb{R}$: LES NOMBRES RÉELS

1 Généralités, nombres irrationnels

On ne donne pas de construction[1] de $\mathbb{R}$ ici (hors-programme). L'idée étant que les nombres rationnels laissent une infinité de « trous infinitésimaux » que l'on « bouche » pour obtenir les réels.

Les propriétés principales de $\mathbb{R}$ est qu'il est totalement ordonné par $\leqslant$ avec des lois +, × aux propriétés habituelles compatibles avec $\leqslant$, et qu'il vérifie les propriétés fondamentales :

1. Il en existe plusieurs (coupures de Dedekind, suites de Cauchy) qui utilisent toutes les nombres rationnels.

Propriété

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Notons que $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.
Les réels non rationnels sont les **irrationnels** (exemples : $\sqrt{2}$, π, e).

Propriété

(i) *Une somme, une différence, un produit, un quotient de deux rationnels l'est toujours. C'est moins simple pour les irrationnels !*

(ii) $\forall r \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad x \pm r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(iii) $\forall r \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad rx, \frac{1}{x}, \frac{r}{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ***si*** $r \neq 0$.

(iv) *Si $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on ne peut rien dire en général de $x \pm y$, xy, $\frac{x}{y}$.*

Démonstration

$\sqrt{2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ mais[1] $\sqrt{2}\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
$\sqrt{2} + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ mais $\sqrt{2} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
$\frac{\sqrt{2}}{1/\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$ mais $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$. □

2 Partie entière

Lemme

$\mathbb{Z}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$ et toute partie non vide de $\mathbb{Z}$ majorée dans $\mathbb{R}$ l'est dans $\mathbb{Z}$ et donc admet un plus grand élément.

Démonstration

Si $\mathbb{Z}$ était majoré dans $\mathbb{R}$, il admettrait une borne supérieure M.
Alors $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad k+1 \leqslant M$ donc $k \leqslant M-1$ donc M n'est pas le sup. Contradiction.
Si $A \subset \mathbb{Z}$, majorée par $y \in \mathbb{R}$, comme $\mathbb{Z}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$, on a $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y < k$ donc A est majorée dans $\mathbb{Z}$. □

Remarque

C'est équivalent à une propriété de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est archimédien) : si $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$, on a $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$ (avec $x = 1$).

Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$, c'est-à-dire $x - 1 < n \leqslant x$.

Démonstration

Existence : Soit $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant x\}$. C'est une partie de $\mathbb{Z}$ non vide car $-x$ n'est pas un majorant de $\mathbb{Z}$, majorée dans $\mathbb{R}$ donc dans $\mathbb{Z}$ donc elle admet un maximum d'après le lemme précédent. Alors $n = \max A \in A$ donc $n \leqslant x$ et $n+1 > n \notin A$ donc $n+1 > x$.

Unicité : Réciproquement, un n tel que $n \leqslant x < n+1$ est bien le maximum de A ($n \in A$ et si $k \in a$, $k < n+1$ donc $k - 1 < n$

1. On verra dans le cours d'arithmétique que les seules racines d'entiers rationnelles sont les racines de carrés d'entiers.

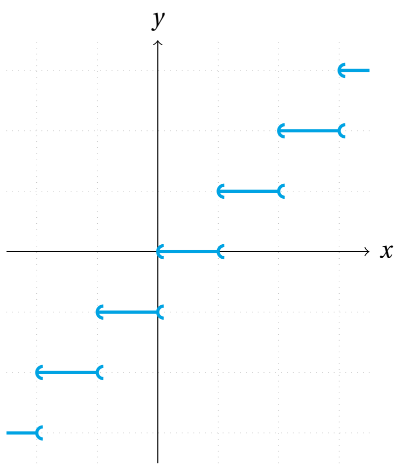

FIGURE 1 – La fonction partie entière

donc $k \leqslant n$) donc est unique. □

Définition

Un tel n est appelé **partie entière** de x, notée $\lfloor x \rfloor$.
C'est le plus grand entier inférieur à x : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Remarque

On peut aussi définir le plus petit entier supérieur (ou égal) à x c'est-à-dire vérifiant $m < x \leqslant m+1$. Il est noté $\lceil x \rceil$. Il s'agit de $\lfloor x \rfloor + 1$ si x n'est pas entier et x sinon.
En anglais, $\lfloor x \rfloor$: floor, $\lceil x \rceil$: ceil.

Remarques

R1 – ⚠ $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$!
R2 – En général $\lfloor x+y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. Par exemple, $\lfloor 2.5 + (-2.5) \rfloor = 0 \neq 2 - 3 = -1$.

Propriété

Soit $x \in \mathbb{R}$.
(i) $x \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow x = \lfloor x \rfloor$
(ii) $\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$
(iii) $\lfloor \cdot \rfloor$ *est croissante.*

Démonstration

(i) Si $x = \lfloor x \rfloor$, $x \in \mathbb{Z}$
Si $x \in \mathbb{Z}$, $x \leqslant x < x+1$ donc par unicité $x = \lfloor x \rfloor$.
(ii) $\underbrace{\lfloor x \rfloor + k}_{\in \mathbb{Z}} \leqslant x + k < \lfloor x \rfloor + k + 1$ □

Exemple

Nombre de chiffres dans l'écriture en base b : un entier n s'écrit avec k chiffres en base b si et seulement si $b^{k-1} \leqslant n < b^k$, c'est-à-dire $k-1 \leqslant \log_b n < k$ donc

$$\boxed{k = \lfloor \log_b n \rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln b} \right\rfloor + 1.}$$

3 Approximations décimales

Exemple

$\pi = 3{,}141592...$, donc $3 \leqslant \pi < 4$.

$3{,}1 = \dfrac{31}{10} \leqslant \pi < 3{,}2 = \dfrac{32}{10}$

$3{,}14 = \dfrac{314}{100} \leqslant \pi < 3{,}15 = \dfrac{315}{100}$...

Définition : Approximations décimales

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les décimaux $d_n(x) = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $D_n(x) = d_n(x) + \dfrac{1}{10^n} = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} = \dfrac{\lfloor 10^n x + 1 \rfloor}{10^n}$.

$d_n(x)$ et $D_n(x)$ sont les **approximations décimales de x à 10^{-n} près par défaut et par excès** respectivement.

Remarque

$d_n(x)$ est un développement décimal limité de x : en ne gardant que n chiffres après la virgule. On peut montrer que ces chiffres sont uniques (ce sont les décimales de x).

Mais attention, un développement illimité n'est pas toujours unique ! Par exemple, $0{,}9999999... = 1$. En effet, si on note x ce nombre, $10x = x + 9$...

On peut montrer que les seuls cas où il n'y a pas unicité sont ceux où l'écriture décimale se termine par une infinité de 9/une infinité de 0, c'est-à-dire pour les décimaux.

Propriété

Si $x \in \mathbb{R}$, les suites $(d_n(x))_n$ et $(D_n(x))_n$ sont respectivement croissante et décroissante.
$\forall n \in \mathbb{N},\ \ d_n(x) \leqslant x < D_n(x)$, $|d_n(x) - x| = x - d_n(x) \leqslant 10^{-n}$ et $|D_n(x) - x| = D_n(x) - x \leqslant 10^{-n}$.

Démonstration

$\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \ d_n(x) \leqslant x < D_n(x)$.
De plus, $10 \underbrace{\lfloor 10^n x \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} \leqslant 10^{n+1} x$ donc $10 \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant \lfloor 10^{n+1} x \rfloor$ donc $d_n \leqslant d_{n+1}$.

De même, $10^{n+1} x < 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 10$ donne $D_{n+1} \leqslant D_n$.
Comme $D_n(x) - d_n(x)$, on a bien $|d_n(x) - x| = x - d_n(x) \leqslant 10^{-n}$ et $|D_n(x) - x| = D_n(x) - x \leqslant 10^{-n}$. □

Remarque

On en déduit en particulier que $d_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x^-$ et $D_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x^+$.

4 Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Définition : Densité

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite **dense** dans $\mathbb{R}$ lorsque pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$, $A \cap]x, y[\neq \varnothing$.

Propriété : Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
Entre deux réels donnés, on peut toujours trouvé un rationnel et un irrationnel.

Démonstration

- Commençons par $\mathbb{Q}$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$.
(Ajouter un dessin : si on trouve q tel que $1/q$ soit suffisamment petit, p/q tombera entre x et y.)
  - ⋆ **Première méthode** : $y - x > 0$, on peut trouver $q \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \frac{1}{q} < y - x$, il suffit pour cela que $q > \frac{1}{y-x}$, $q = \left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1$ convient.
  On cherche alors $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x < \frac{p}{q} < y$ *ie* $qx < p < qy$: posons $p = \lfloor qx \rfloor + 1$.
  On a alors bien $qx < p \leqslant qx + 1$. Donc $x < \frac{p}{q} \leqslant x + \frac{1}{q} < y$.
  - ⋆ **Deuxième méthode** : On aurait pu prendre un développement décimal par excès de x suffisamment poussé pour être entre x et y, c'est-à-dire avec n tel que $10^{-n} < y - x$ soit $n > -\log(y - x)$. inclusion
  Problème : définition du log à ce stade ?
  Il suffit sinon de dire que si ce n'était pas le cas, alors pour tout n, $10^n \leqslant \frac{1}{y-x}$ et comme tout entier est plus petit qu'une puissance de 10, $\mathbb{Z}$ serait majoré, ce qui est contradictoire.
  Alors $x < D_n(x) \leqslant x + 10^{-n} < y$.
- Pour $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on sait que si $r \in \mathbb{Q}$, $r + \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Or on peut trouver $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2}$ soit $x < r + \sqrt{2} < y$.
Ainsi $r + \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap]x, y[$. □

5 Caractérisation des intervalles

Définition : Convexe

Une partie C de $\mathbb{R}$ est dite convexe lorsque

$$\forall\, x, y \in C \mid x < y, \quad [x, y] \subset C.$$

Propriété : Caractérisation des intervalles

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les convexes de $\mathbb{R}$.

Démonstration

On vérifie facilement que les intervalles sont convexes.
Réciproquement, si I intervalle.
Soit il est vide et il est bien convexe.
Soit il est non vide et on a $x_0 \in I$. Notons $G = \{x \in I \mid x \leqslant x_0\}$ et $D = \{x \in I \mid x \geqslant x_0\}$. Comme C est convexe, G et D le sont aussi.
Occupons-nous de D. C'est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Soit elle est majorée et elle admet un sup que l'on note $b = \sup D$. Alors $D \subset [x_0, b]$.
  - ⋆ Si $b \in D$, par convexité de C donc de D, $[x_0, b] \subset D$ donc $\boxed{D = [x_0, b].}$
  - ⋆ Si $b \notin D$, $D \subset [x_0, b[$. Réciproquement, si $y \in [x_0, b[$, par caractérisation du sup on a $x \in D$ tel que $y < x$ et alors

$y \in [x_0, x] \subset D$ par convexité. Donc $[x_0, b[\subset D$ et $\boxed{D = [x_0, b[}$.

- Soit elle n'est pas majorée, alors $D \subset [x_0, +\infty[$. Réciproquement, si $y \in [x_0, +\infty[$, comme y ne majore pas D, on a $x \in D$ tel que $y < x$ et alors $y \in [x_0, x] \subset D$ par convexité. Donc $\boxed{D = [x_0, +\infty[}$.

Ainsi $D \in \{[x_0, b[, [x_0, b], [x_0, +\infty[\}$.
On prouve de même que $G \in \{]a, x_0], [a, x_0],]-\infty, x_0]\}$ où $a = \inf G$ lorsqu'il existe.
Dans tous les cas, $I = G \cup D$ est bien un intervalle. □

6 Droite numérique achevée

Définition : Droite numérique achevée

On appelle **droite numérique achevée** l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

On étend alors les lois + et × à $\overline{\mathbb{R}}$ sauf en cas d'incompatibilité ainsi que l'ordre total $\leqslant$:

$+$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x + y$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad -\infty \leqslant x \leqslant +\infty$$

$\times$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$x \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Remarques

R 1 – Il y a quatre types d'intervalles dans $\overline{\mathbb{R}}$: si $\bar{a}, \bar{b} \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $\bar{a} \leqslant \bar{b}$, $[\bar{a}, \bar{b}]$, $]\bar{a}, \bar{b}]$, $[\bar{a}, \bar{b}[$, $]\bar{a}, \bar{b}[$.

R 2 – Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ (éventuellement infinie).