CHAPITRE VIII

Fonctions vectorielles et arcs paramétrés

Dans ce chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit I , J des intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieurs non vides.

Soit $(E, \|\|_E)$, $(F, \|\|_F)$, $(G, \|\|_G)$ des K-espaces vectoriels **de dimension finie** non réduits au vecteur nul.

I Dérivabilité d'une fonction vectorielle

1 Définition

Définition : Dérivée

Soit $f : I \to E$, $a \in I$. On dit que f **est dérivable au point** a si et seulement si $\frac{1}{x-a}(f(x) - f(a))$ a une limite lorsque $x \to a$ si et seulement si $\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ a une limite lorsque $h \to 0$.

Cette limite est alors notée $f'(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ et appelée **dérivé de** f **au point** a.

f est dérivable sur I lorsqu'elle l'est en tout $a \in I$. Alors $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right.$ est la **fonction dérivée** de f.

Propriété : DL_1

f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a, c'est-à-dire si on peut écrire

$$f(a+h) = f(a) + hb + h \cdot \varepsilon(h) = f(a) + hb + \mathrm{o}(h)$$

où $b \in E$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0_E$.

Dans ce cas, $b = f'(a)$.

Corollaire : dérivable $\Longrightarrow$ continue

Si f est dérivable en a (respectivement sur I), alors f est continue en a (respectivement sur I). La réciproque est fausse.

Propriété : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $n = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

f est dérivable en $a \in I$ (respectivement sur I) ssi pour tout k, f_k l'est et alors $f'(a) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(a) e_k$ (respectivement $f' = \sum_{k=1}^{n} f_k' e_k$).

2 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété : Linéarité

Une combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivables de dérivée la combinaison linéaire des dérivées.

Propriété : Image par une application linéaire

Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $f : I \to E$ dérivable sur I, alors $u \circ f$ est dérivable, de dérivée $(u \circ f)' = u \circ f'$.

Propriété : Image par une application bilinéaire

Si $B : E \times F \to G$ bilinéaire, $f : I \to E$, $g : I \to F$ dérivables sur I, on note $B(f, g) : x \mapsto B(f(x), g(x))$.

Alors $B(f, g)$ dérivable sur I et $\big(B(f, g)\big)' = B(f', g) + B(f, g')$.

Corollaire

Dérivée d'un produit fg où $f : I \to \mathbb{K}$ et $g : I \to E$.

Corollaire

Dérivée d'un produit scalaire de fonctions dans un espace euclidien.

Propriété : Composition

Si $f : I \to E$, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ dérivables tel que $\varphi(J) \subset I$, alors $f \circ \varphi$ dérivable et $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot f' \circ \varphi$.

Propriété : Dérivée de la réciproque

Si $f : I \to J$ bijective et dérivable sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $\{f(x)\ ;\ x \in I \text{ et } f'(x) \neq 0\}$ et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

De plus, lorsque $f'(x) = 0$, f^{-1} présente une tangente verticale en $f(x)$.

3 Applications de classe $\mathscr{C}^n$

Définition : Classe

f est dite **de classe** $\mathscr{C}^0$ sur I si elle est continue sur I.

f est dite **de classe** $\mathscr{C}^n$ sur I si elle est k fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.

f est dite **de classe** $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n, c'est-à-dire si elle est indéfiniment dérivable.

On fixe désormais $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Propriété : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $p = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ base de E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k l'est et alors si $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_k^{(n)} e_k$.

Propriété : Linéarité

$\mathscr{C}^n(I, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et si $n \in \mathbb{N}$ et si $f, g \in \mathscr{C}^n(I, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(f + \lambda g)^{(n)} = f^{(n)} + \lambda g^{(n)}$.

Propriété : Image par une application linéaire

Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $f \in \mathscr{C}^n(I, E)$ alors $u \circ f \in \mathscr{C}^n(I, F)$ et si $n \in \mathbb{N}$, $(u \circ f)^{(n)} = u \circ f^{(n)}$.

Propriété : Formule de Leibniz

Si $B : E \times F \to G$ bilinéaire, $f \in \mathscr{C}^n(I, E)$, $g \in \mathscr{C}^n(I, F)$ alors $B(f, g) \in \mathscr{C}^n(I, G)$ et si $n \in \mathbb{N}$,

$$\big(B(f, g)\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B\left(f^{(k)}, g^{(n-k)}\right).$$

Corollaire

Si $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$, $g \in \mathscr{C}^n(I, E)$ alors $f \cdot g \in \mathscr{C}^n(I, E)$ et si $n \in \mathbb{N}$,

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

Propriété : Composition

Si $f : I \to E$, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ telles que $\varphi(J) \subset I$, alors $f \circ \varphi$ de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.

Propriété : Réciproque d'une bijection

Soit $f : I \to J$ bijective de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k \geqslant 1$.
Alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

4 Théorèmes sur les fonctions numériques (révisions de MPSI)

Propriété : Condition nécessaire d'extremum local

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que

H1 $a \in \mathring{I}$

H2 *f est dérivable en a*

H3 *f admet un extremum local en a*

Alors a est un pont critique de f : $f'(a) = 0$.

La réciproque est fausse.

Théorème : de Rolle

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si

H1 *f est continue sur $[a, b]$*

H2 *f est dérivable sur $]a, b[$*

H3 $f(a) = f(b)$

Alors $\exists\, c \in]a, b[,\ \ f'(c) = 0$.

Théorème : (ou égalité) des accroissements finis

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a<b$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Si*

H1 *f est continue sur* $[a,b]$

H2 *f est dérivable sur* $]a,b[$

Alors $\exists\, c \in]a,b[,\quad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *ie* $f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$.

Théorème : Inégalité des accroissements finis

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a<b$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Si*

H1 *f est continue sur* $[a,b]$

H2 *f est dérivable sur* $]a,b[$

H3 $\exists\, m, M \in \mathbb{R},\quad \forall\, x \in]a,b[,\quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$

Alors $m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$.

Corollaire

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. *Si*

H1 *f est continue sur* I

H2 *f est dérivable sur* $\overset{\circ}{I}$

H3 $\exists\, k \in \mathbb{R},\quad \forall\, x \in \overset{\circ}{I},\quad |f'(x)| \leqslant k$

Alors f est k-lipschitzienne sur I, c'est-à-dire

$$\forall\, x, y \in I,\quad |f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

Théorème : de la limite de la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ *tel que*

H1 *f est dérivable sur* $I \setminus \{a\}$

H2 *f est continue en a*

H3 $f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$

Alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Donc

- *soit* $\ell = \pm\infty$ *et* $\mathscr{C}_f$ *admet une tangente verticale en a,*
- *soit* $\ell \in \mathbb{R}$ *et f est dérivable en a,* $f'(a) = \ell$ *et f' est continue en a.*

Théorème : du prolongement $\mathscr{C}^n$

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, *et* $f \in \mathscr{C}^n(I \setminus \{a\})$ *telle que* $\forall\, i \in [\![0,n]\!],\quad f^{(i)}$ *a une limite finie en a. Alors le prolongement de f par continuité en a est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.*

II Intégration sur un segment d'une fonction vectorielle

1 Fonctions continues pas morceaux

Définition : Fonctions continues par morceaux

Une application $f : [a,b] \to E$ est dite **continue par morceaux** si et seulement s'il existe une subdivision $\sigma = (a = a_0, a_1, \dots, a_n = b)$ de $[a,b]$ telle que

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\quad \begin{cases} f_{|]a_k,a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f \text{ admet des limites à droite de } a_k \text{ et à gauche de } a_{k+1}. \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\quad \begin{cases} f_{|]a_k,a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f_{|]a_k,a_{k+1}[} \text{ est prolongeable par continuité à } [a_k, a_{k+1}]. \end{cases}$$

On dit alors que σ est adaptée à f.
On note $\mathscr{C}_m([a,b], E)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

Propriété : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $n = \dim E$ *et* $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *base de E,* $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$. *$f$ est continue par morceaux ssi pour tout k, f_k l'est.*

Corollaire : Opérations

Si $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b], E)$, $\varphi \in \mathscr{C}_m([a,b], \mathbb{R})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \mapsto \|f(x)\|$, $f + \lambda g$ *et* $\phi \cdot f$ *sont continues par morceaux.*

Propriété

Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

Définition

Si I est un intervalle d'intérieur non vide, f est dite **continue par morceaux sur** I lorsqu'elle l'est sur tout segment inclus dans I.

2 Intégration sur un segment d'une fonction continue par morceaux

Propriété : Indépendance du choix de la base

Si $n=\dim E$ *et* $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ *base de* E, $f=\sum_{k=1}^{n} f_k e_k$. *Alors* $\sum_{k=1}^{n}\left(\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t\right)e_k$ *ne dépend pas de la base* $\mathscr{B}$.

Définition : Intégrale sur un segment

Si $n=\dim E$ et $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ base de E, $f=\sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

On appelle **intégrale** de f sur $[a,b]$ le vecteur $\int_{[a,b]} f=\int_a^b f=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\left(\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t\right)e_k$.

On pose $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0_E$ et $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété : Linéarité

$f\mapsto\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est une application linéaire de* $\mathscr{C}_m([a,b],E)$.

Propriété : Relation de Chasles

Si $f\in\mathscr{C}_m(I,E)$ *et* $a,b,c\in I$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

3 Sommes de Riemann

Théorème

Si $f\in\mathscr{C}_m([a,b],E)$, $n\in\mathbb{N}^*$, $R_n(f)=\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$, *alors* $R_n(f)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème : Inégalité triangulaire intégrale

Si $f\in\mathscr{C}_m(I,E)$, $a,b\in I$, $\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\|\leqslant\left|\int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t\right|$.
(La valeur absolue sert à remettre les bornes dans le bon sens.)

4 Intégrale et primitive

Définition : Primitive

$g:I\to E$ est une **primitive** de $f:I\to E$ si g dérivable sur I et $g'=f$.

Propriété

$f:I\to E$ *dérivable sur* I *est constante si et seulement si* $f'\equiv 0_E$ *sur* I.

Propriété

Soit $f: I\to E$, F,G *deux primitives de* f *sur* I, *avec* I ***intervalle***.
Alors on a $C\in\mathbb{K}$ *tel que* $\forall x\in I,\ F(x)=G(x)+C$.

Théorème : fondamental de l'analyse

Si f *est continue sur un intervalle* I *à valeurs dans* E *et* $a\in I$, $F:x\mapsto\int_a^x f$ *est l'unique primitive de* f *qui s'annule en* a.

Corollaire

(i) *Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.*

(ii) *Si* $f\in\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$, F *primitive de* f *sur* I, $a,b\in I$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=[F(t)]_a^b=F(b)-F(a)$.

(iii) *Si* f *est de classe* $\mathscr{C}^1([a,b])$, $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

(iv) ***Inégalité des accroissements finis*** *:*
Si f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[a,b]$ *et* $\|f'\|\leqslant k$, *alors* f *est* k*-lipschitzienne sur* $[a,b]$.

Propriété

Soient I, J intervalles de $\mathbb{R}$, $u, v : I \to J$ dérivables, $f : J \to E$ continue.

L'application $\varphi : \begin{array}{|ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ *est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ \varphi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.*

5 Intégration par parties

Propriété

Si $u \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$, $v \in \mathscr{C}^1(I, E)$,

$$\forall a, b \in I,\ \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

6 Changement de variable

Propriété

Si I intervalle, $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$, $f \in \mathscr{C}(I, E)$, $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \varphi'(u) \cdot f(\varphi(u))\,\mathrm{d}u$.

7 Calcul de primitives et d'intégrales (Rappels)

Méthode : Technique de calcul de primitives et d'intégrales

a Calculs directs

Il est bien entendu indispensable de connaître ses primitives usuelles (cf formulaire).

On reconnaît souvent une forme $u' \times v'(u)$ qui s'intègre en $v \circ u$ (voir aussi le changement de variable)

On peut parfois passer par les complexes : par définition, la partie réelle (imaginaire) de la primitive est la primitive de la partie réelle (imaginaire).

b L'intégration par parties

Fonction dont la dérivée est plus simple... ...comme par exemple les fonctions $\ln, \mathrm{Arccos}, \mathrm{Arcsin}, \mathrm{Arctan}$, etc.

Abaissement du degré, formule de récurrence

c Le changement de variable

On veut calculer $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$: C'est en fait le cas où on reconnaît une forme $\varphi' \times f \circ \varphi$.

On veut calculer $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

Dans ce cas, il faut écrire $x = \varphi(t)$ avec φ de classe $\mathscr{C}^1$. Mais attention, si on fait un calcul de primitive, il faudra choisir φ **bijective** pour pouvoir à la fin du calcul revenir de t à x ($t = \varphi^{-1}(x)$). Si c'est un calcul d'intégrale avec des bornes, φ n'a pas besoin d'être bijective ! (on en revient pas à la première variable.)

Comment déterminer un bon changement de variable ? Pas toujours facile, mais voici quelques tuyaux pour y parvenir.

d Les fractions rationnelles

Parfois, un simple changement de variable, ou des astuces du type $+1-1$ permettent de calculer les primitives.

Si ce n'est pas possible de simplifier « à vue », l'idée est de se ramener à des fractions simples pour utiliser, si $a \in \mathbb{R}$, sur $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)(t-a)^{n-1}} + C \text{ si } n \neq 1 \quad \text{et} \quad \int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \ln|t-a|.$$

Pour se faire on procède à une **décomposition en éléments simples**. Ne pas oublier la partie entière si elle est non nulle.

Il y a un autre cas à traiter : c'est celui pour lequel on obtient un facteur ax^2+bx+c au dénominateur sans racine réelle : cela donne dans la décomposition un terme en $\dfrac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c}$, qui se primitive en $\ln$ et Arctan :

- On se débarrasse du x au numérateur en faisant apparaître la dérivée $2ax+b$ du dénominateur et on intègre en $\ln$,
- on met sous forme canonique le dénominateur du terme restant et on intègre en Arctan.

e Les fonctions trigonométriques

Si on veut intégrer une fonction polynomiale en $\cos x$ et $\sin x$, le plus simple est de linéariser. Cependant, si on a un terme en $\sin^p x \cos^q x$ avec p ou q impair, on peut poster $t = \cos x$ si q est impair et $t = \sin x$ si p est impaire en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Si on veut intégrer une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$, on applique :

Règles de Bioche

Si « $f(x)\mathrm{d}x$ » est invariant par

- $x \mapsto -x$, on pose $t = \cos x$;
- $x \mapsto \pi - x$, on pose $t = \sin x$;
- $x \mapsto \pi + x$, on pose $t = \tan x$;
- Sinon on pose $t = \tan \frac{x}{2}$.

Ne pas oublier le $\mathrm{d}x$! !

f Les fonctions hyperboliques

Pour les fonctions faisant intervenir $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}$ et $\exp$, on peut poser $t = \mathrm{e}^x$ ($\mathrm{ch}\, x = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right)$, $\mathrm{sh}\, x = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right)$, $\mathrm{th}(x) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.)

Si l'on a une fraction rationnelle en $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}$, il peut être plus efficace d'appliquer un changement de variable obtenu grâce aux règles de Bioche appliquées à la fraction rationnelle dans laquelle on aura remplacé mentalement $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}$ par $\cos, \sin, \tan$ respectivement.

g Les fonctions avec radical

- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ (x et $\sqrt{ax+b}$ en particulier), on pose $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ($a \neq 0$), il faut mettre ce dernier sous forme canonique pour obtenir du $\sqrt{\pm(\alpha x+\beta)^2 \pm 1}$ puis poser $t = \alpha x+\beta$. Ensuite, pour :
  - ⋆ $\sqrt{t^2+1}$ on pose $t = \operatorname{sh} u$ ($\operatorname{sh}^2+1 = \operatorname{ch}^2$) ou $t = \tan u$ ($1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$, attention à l'intervalle dans ce cas là.)
  - ⋆ $\sqrt{t^2-1}$ on pose $t = \pm \operatorname{ch} u$ suivant le signe de t. ($\operatorname{ch}^2-1 = \operatorname{sh}^2$.)
  - ⋆ $\sqrt{1-t^2}$ on pose $t = \sin u$ ou $t = \cos u$ ($1-\cos^2 = \sin^2$ et $1-\sin^2 = \cos^2$.)

III FORMULES DE TAYLOR

Définition

Si f est n fois dérivable en a, son **développement de Taylor** en a à l'ordre n est

$$T_n(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

et le **reste de Taylor** de f en a à l'ordre n est $R_n = f - T_n$ (tel que $f = T_n + R_n$).

1 Taylor reste intégral

Théorème

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}(I,E)$, $a \in I$, alors pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}\,\mathrm{d}t.$$

2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème

Soit $f : I \to E$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, $a \in I$. Pour tout $x \in I$,

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,x]} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\|.$$

Corollaire

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \mathrm{e}^z$.

3 Formule de Taylor-Young

Propriété : Primitivation de DL

Soit $f : I \to E$ admettant un DL$_n(a)$ avec $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$$

Toute primitive F de f sur I admet un DL$_{n+1}(a)$

$$F(x) = \boldsymbol{F(a)} + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \mathrm{o}\Big((x-a)^{n+1}\Big)$$

obtenu par primitivation terme à terme du DL de f.

Théorème : Formule de Taylor-Young

Si $f : I \to E$, $a \in I$ tel que f soit de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors f admet un DL$_n$ en a

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$$

ie

$$f(a+h) = f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \mathrm{o}\big(h^n\big)$$

⚠ *La réciproque est fausse : l'existence d'un DL$_n$ en a n'implique pas en général que f est n fois dérivable en a si $n \geqslant 2$.*

IV ARCS PARAMÉTRÉS

1 Définition

Définition : Arc paramétré, support

On appelle **arc paramétré** de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans E tout coupe (I, f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $f \in \mathscr{C}^1(I,E)$.

L'ensemble $\Gamma = \{f(t), t \in I\}$ est appelé **support** de l'arc paramétré (I, f) (ou **courbe**).

On dit que (I, f) est un paramétrage de cette courbe.

2 Régularité

Définition

Soit (I, f) un arc paramétré. On dit que le point M de paramètre t est ***régulier*** lorsque $f'(t) \neq 0_E$. Dans le cas contraire, M est dit ***singulier*** ou ***stationnaire***.

L'arc est dit ***régulier*** lorsque tous ses points le sont.

3 Étude locale, tangente

Définition : demi-tangentes

Soit (I, f) un arc paramétré, $M_0 = f(t_0)$ un point de paramètre $t_0 \in \mathring{I}$, et $M(t) = f(t)$ un point de paramètre t distinct de M_0. On suppose qu'au voisinage (strict) de t_0, $f(t) \neq f(t_0)$.

On appelle ***demi-tangente à gauche*** (resp. ***demi-tangente à droite***) à l'arc en M_0, lorsqu'elle existe, la demi-droite passant par M_0 ayant pour vecteur directeur la limite de $\dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{M_0M(t)}\right\|}\overrightarrow{M_0M(t)}$ lorsque t tend vers t_0 à gauche (resp. à droite).

On parle de ***tangente*** en M_0 lorsque les deux demi-droites sont contenues dans la même droite.

Propriété

Soit (I, f) un arc paramétré, $M_0 = f(t_0)$ un point de paramètre $t_0 \in \mathring{I}$ régulier. I
I y a une tangente en M_0 dirigée par $f'(t_0)$.

4 Plan d'étude d'un arc paramétré plan

Méthode : Plan d'étude d'un arc paramétré plan

On étudie l'arc paramétré $t \mapsto f(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$.

1. Domaine de définition de f donc de x **et** y. En général une réunion d'intervalles.
2. Réduction du domaine d'étude : effets géométrique de transformations $t \mapsto -t$, $t \mapsto \dfrac{1}{t}$, $t \mapsto t + T$, $t \mapsto T - t$, etc.
3. Étude de la classe $\mathscr{C}^1$, variations conjointes de x et y.
4. Tangente en des points particuliers.
5. Tracé.