Applications et relations

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Applications et relations	
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathscr{F}(E,F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f\vert_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition.	
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	Compatibilité de la notation f^{-1} avec la notation d'une image réciproque.
Relation binaire sur un ensemble.	
Relation d'équivalence, classes d'équivalence.	La notion d'ensemble quotient est hors programme.
Relations de congruence modulo un réel sur $\mathbb{R}$, modulo un entier sur $\mathbb{Z}$.	
Relation d'ordre. Ordre partiel, total.	
Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$.	

Table des matières

I APPLICATIONS

1 Définitions

Définition : Application

Soient E et F deux ensembles non vides. On appelle **application de E dans F** toute relation qui à chaque élément de E associe un unique élément de F.

Si on note f une application de E dans F,

$$\forall x \in E, \quad \exists!\, y \in F \mid x \overset{f}{\mapsto} y \text{ (lire « } f \text{ associe »)}$$

y est aussi noté $f(x)$.

On note $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ ou $\left| \begin{array}{ccc} E & \overset{f}{\longrightarrow} & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou $\mathscr{F}(E,F)$.

On note aussi $f : E \to F$ ou $E \xrightarrow{f} F$ pour $f \in F^E$.

Diagramme sagittal.

Remarque

Se donner une application f revient à se donner la famille $(f(x))_{x\in E}$ d'élément de F. D'où la notation F^E.

Réciproquement, une famille $(x_i)_{i\in I}$ est une application $f : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & F \\ i & \longmapsto & f(i) = x_i \end{array} \right.$.

Définition : Graphe

Soit $f : E \to F$. L'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in E\} = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y = f(x)\}$ est appelé **graphe** de f.

Remarque

Cela correspond à la courbe de f que l'on note plutôt $\mathscr{C}_f$ lorsque $E \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$.

Dessin

Définition : Image, antécédent

Soit $f : E \to F, x \in E, y \in F$. Lorsque $y = f(x)$, on dit que

- y est l'**image** de x par f
- x est **UN antécédent** de y par f

Remarque

L'ensemble des antécédents des éléments de F est E car tout élément de E est un antécédent. Par contre l'ensemble des images des éléments de E n'est pas toujours égal à F.

Définition : Egalité

Soient $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$.
On dit que $f_1 = f_2$ lorsque

- $E_1 = E_2$
- $F_1 = F_2$
- $\forall\, x \in E_1 = E_2, \quad f_1(x) = f_2(x)$

Définition : Identité

On appelle **application identité de** E l'application

$$\mathrm{id}_E : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

Définition : Fonction indicatrice

Soit E ensemble et A partie de E. On appelle **fonction indicatrice de** A **dans** E l'application

$$\mathbb{1}_A : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$$

Propriété

Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$.

(i) $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B$.

(ii) $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A$

(iii) $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$

(iv) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$

(v) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$

Remarque

Si A possède un nombre fini d'éléments, $|A| = \# A = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x)$.

Exercice

On définit la différence symétrique $\triangle$ sur $\mathscr{P}(E)^2$ par

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1. Montrer que $\mathbb{1}_{A\triangle B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
2. Montrer que $\triangle$ est commutative et associative.

2 Restrictions, prolongements

a Restriction, application induite

Définition : Restriction

Soient E, F deux ensembles non vides, $f \in F^E$ et A une partie non vie de E.

On appelle **restriction de f à A** l'application

$$f|_A : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Remarques

R1 – A et f étant fixés, il existe une unique restriction de f à A.

R2 – On peut définir une restriction de f **à l'arrivée** mais il faut faire attention à ce que chaque élément de E ait bien son image dans la partie de F.

Diagramme sagittal.

Exemple

Si $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$, alors $f|_{\mathbb{R}^+} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^+}$.

Définition : Application induite

Une application $g : A \to B$ est induite par $f : E \to F$ si g est une restriction de f au départ et à l'arrivée. Soit :

- $A \subset E$ et $B \subset F$
- $\forall x \in A, \quad g(x) = f(x)$

Cela n'a de sens que si $\forall x \in A, \quad f(x) \in B$.

Cas particuliers :

Définition : Partie stable

Une partie A de E est dite **stable** par $f : E \to F$ lorsque $\forall x \in A, \quad f(x) \in A$, ce qui se note $f(A) \subset A$.

Définition

Si $f : E \to E$ et A est stable par f, alors on peut parler de l'application induite par f sur A :

$$f_A : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Exemple

id_A et id_E.

b Prolongement

Définition : Prolongement

Soient E, F deux ensembles non vides, $f \in F^E$ et E' tel que $E \subset E'$.
On appelle **prolongement de f à E'** toute application $g : E' \to F$ telle que $\forall x \in E, \quad g(x) = f(x)$ ie $g|_E = f$.

Diagramme sagittal.

Remarques

- **R1 –** g est un prolongement de f si et seulement si f est une restriction de g.
- **R2 –** Il n'y a pas unicité.
- **R3 –** On pourrait définir de même un « prolongement à l'arrivée ».

Exemple

$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \ln x \end{array} \right.$ admet un unique prolongement à $\mathbb{R}$, continu en 0 : c'est un prolongement par continuité.

3 Images directe et réciproque

a Image directe

Définition : Image directe

Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$. On appelle **image directe** de A par f

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F$$

Si $y \in F$,

$$y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists x \in A \mid y = f(x)$$

En particulier, $f(E) = \operatorname{Im} f$ est appelé **image** de f.

Diagramme sagittal et dessin dans $\mathbb{R}$.

Exemple

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-1 \end{array} \right. \qquad \mathrm{Im}\, f = f(\mathbb{R}) = [-1, +\infty[,\ f([1,2]) = [0,3].$$

Remarques

R1 – ⚠ Si $x \in E$, $f(x) \in f(A) \not\Rightarrow x \in A$.

R2 – Si $A \neq \varnothing$, $f(A) \neq \varnothing$.

R3 – $f(\{a\}) = \{f(a)\}$.

R4 – On peut définir une application $F : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(F) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array} \right.$

Propriété

Soit $f : E \to F$, $A, A' \in \mathscr{P}(E)$.

(i) $A \subset A' \Rightarrow f(A) \subset f(A')$

(ii) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$

(iii) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ *égalité fausse en général.*

Démonstration

Contre-exemple (il suffit de prendre f non injective...) $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$, $A = \mathbb{R}^+$, $A' = \mathbb{R}^-$. □

b Image réciproque

Définition : Image réciproque

Soit $f : E \to F$, $B \subset F$. On appelle **image réciproque** de B par f

$$f^{(-1)}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E.$$

Si $x \in E$, $x \in f^{(-1)}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B$.

Remarque

C'est une notation provisoire. Cela se note $f^{-1}(B)$ mais il y a un risque de confusion avec la bijection réciproque.

Exercice

Copier 15 fois « $f^{(-1)}$ n'est pas une fonction. »

Diagramme sagittal et dans $\mathbb{R}$.

Exemples

E1 – $f : x \mapsto x^2 - 2x - 4$. $f^{(-1)}(\{0\}) = \{1 \pm \sqrt{5}\}$.

E2 – $f : x \mapsto x^2 - 1$, $f^{(-1)}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$.

E3 – $f : X \mapsto A \cap X$, $f^{(-1)}(\{A\}) = \{X \in \mathscr{P}(E) \mid A \subset X\}$.

E4 – $f : \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$. $f(f^{(-1)}(\mathbb{R})) = [0,1]$ et $f^{(-1)}(f([0,1])) = [-1,1]$.

Remarques

R1 – Si $f : E \to F$ et $y \in F$, $f^{(-1)}(\{y\})$ est l'ensemble des antécédents de y par f.

R2 – $\bigsqcup_{y \in F} f^{(-1)}(\{y\}) = E$.

R3 – En général, $f(A) = B$ n'implique pas $A = f^{(-1)}(B)$ et réciproquement. Cela est vrai sous certaines conditions sur f (voir TD).

R4 – $x \in f^{(-1)}(\{f(x)\})$ mais en général $f^{(-1)}(\{f(x)\}) = f^{(-1)}(f(\{x\})) \neq \{x\}$.

R5 – $f^{(-1)}(F) = E$ car f est une application.

R6 – On peut avoir $B \neq \varnothing$ et $f^{(-1)}(B) = \varnothing$.

R7 – On peut définir une application $G : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(F) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ B & \longmapsto & f^{(-1)}(B) \end{array} \right.$

Propriété

Soit $f : E \to F$, $B, B' \in \mathscr{P}(F)$.

(i) $B \subset B' \Rightarrow f^{(-1)}(B) \subset f^{(-1)}(B')$

(ii) $f^{(-1)}(B \cup B') = f^{(-1)}(B) \cup f^{(-1)}(B')$

(iii) $f^{(-1)}(B \cap B') = f^{(-1)}(B) \cap f^{(-1)}(B')$

(iv) $f^{(-1)}\left(\complement_F B\right) = \complement_E\left(f^{(-1)}(B)\right)$

4 Composition

a Definition

Définition : Composée

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On appelle **composée** de f par g

$$g \circ f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

symbolisée par le diagramme : $\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$

Remarques

R 1 – C'est bien une application.

R 2 – $g \circ f$ est bien définie en x ssi $f(x)$ existe d'où l'ensemble de départ. Et c'est une image par G d'où l'ensemble d'arrivée.

R 3 – Lorsque $g \circ f$ est défini, $f \circ g$ ne l'est pas en général. Et même si elle l'est, on a $g \circ f \neq f \circ g$ en général.

Exemple

$f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2$

R 4 – Une restriction est une composée !

b Propriétés

Propriété

(i) ***Associativité*** *: Soient* $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ *trois applications.*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad (= h \circ g \circ f)$$

(ii) ***Éléments neutres*** *: Soit* $f : E \to F$*. On a* $\mathrm{id}_F \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_E$*.*

(iii) ***La loi*** $\circ$ ***n'est pas commutative*** *en général.*

c Itérées

Définition : Itérées

Soit $f : E \to E$, $n \in \mathbb{N}$. On définit la n^{ie} itérée de f par

- $f^0 = \mathrm{id}_E$
- $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} = f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f$ si $n \geqslant 1$.

Remarques

R1 – La définition s'étend au cas où $f : E \to F$ avec $F \subset E$.

R2 – Ne pas confondre avec $f \times \ldots \times f$.

Définition : Applications involutives, idempotentes

Soit $f : E \to E$.

- Lorsque $f^2 = f \circ f = \mathrm{id}_E$, on dit que f est une **involution** ou que f est **involutive**.
- Lorsque $f^2 = f \circ f = f$, on dit que f est **idempotente**.

Exemple

En géométrie, les symétries sont involutives (dans $\mathbb{C}$, conjugué, opposé), les projections sont idempotentes (parties réelle, imaginaire).

5 Injectivité, surjectivité, bijectivité

a Injectivité

Définition : Injectivité

Soit $f : E \to F$. f est dite **injective** ou une **injection**
ssi tout $y \in F$ admet **au plus** un antécédent par f
ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet soit aucune soit une seule solution
ssi $\forall\, x, x' \in E,\quad x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$
ssi $\boxed{\forall\, x, x' \in E,\quad f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'}$

Diagramme sagittal/dans $\mathbb{R}$ d'injective/non injective.

Remarques

R1 – f n'est pas injective si on peut trouver $x \neq x'$ tel que $f(x) = f(x')$.

R2 – Si on restreint au départ, on garde l'injectivité. Si on n'est pas injectif, on peut le devenir en restreignant au départ.

R3 – f est injective ssi pour tout $y \in F$, $f^{(-1)}(\{y\})$ possède au plus un élément.

R4 – Pour que $f : E \to F$ soit injective, il faut que E ait au moins autant d'élément que F.

Exemples

E1 – $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ non injective. Comment la rendre injective ?

E2 – $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} \end{array} \right.$

Propriété : Composée d'injections

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont injectives, alors $g \circ f$ l'est encore.
La réciproque est fausse.

Démonstration

Facile.

Contre-exemple : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ □

b Surjectivité

Définition : Surjectivité

Soit $f : E \to F$. f est dite **surjective** ou une **surjection**
ssi tout $y \in F$ admet **au moins** un antécédent par f
ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet au moins une solution
ssi $\forall\, y \in F,\ \exists\, x \in E \mid y = f(x)$

Diagramme sagittal.

Remarque

f n'est pas surjective ssi $\exists\, y \in F \mid \forall\, x \in E,\ \ y \neq f(x)$.

Exemples

E 1 – $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est pas surjective mais $\tilde{f} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ l'est.

E 2 – $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^z \end{array} \right.$ est surjective non injective.

Remarque

On peut toujours rendre une fonction surjective en la restreignant à l'arrivée à $\operatorname{Im} f = f(E)$.

Propriété : Caractérisation de la surjectivité par l'image

$f : E \to F$ est surjective ssi $\operatorname{Im} f = f(E) = F$.

Propriété : Composée de surjections

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est encore.
La réciproque est fausse.

Démonstration

Facile.

Contre-exemple : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$. □

C Bijectivité

Définition : Bijectivité

Soit $f : E \to F$. f est dite **bijective** ou une **bijection**
ssi f est injective et surjective
ssi tout $y \in F$ admet **exactement** un antécédent par f
ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet une et une seule solution
ssi $\forall\, y \in F,\ \ \exists!\, x \in E \mid y = f(x)$

Définition : Permutations

Soit E un ensemble non vide. On appelle **permutation** de E toute bijection de E dans lui-même ($f : E \to E$).
L'ensemble des permutations de E se note $\mathfrak{S}(E)$.

Propriété : Caract. de la bijectivité et récip. de la réciproque

Soit $f : E \to F$.

(i) f est bijective si et seulement s'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
*Lorsqu'elle existe une telle application est unique ; on l'appelle **réciproque** de f et on la note f^{-1}.*
On a alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.

(ii) Si f est bijective,

$$\forall x \in E,\quad \forall y \in F,\quad \left[y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)\right]$$

(iii) Si $f : E \to F$ est bijective, $f^{-1} : F \to E$ l'est aussi et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Démonstration

(i) Si f est bijective, $g : F \to E$ qui à y associe l'unique antécédent de y par f convient.
Réciproquement, si un tel g existe, $g \circ f = \mathrm{id}_E$ donne f injective et $f \circ g = \mathrm{id}_F$ donne f surjective.
Pour l'unicité, si h convient aussi, $f \circ h = f \circ g$ et par injectivité, $h = g$.

(ii) Si $y = f(x)$, $f^{-1}(y) = f^{-1} \circ f(x) = x$.
Si $x = f^{-1}(y)$, $f(x) = f \circ f^{-1}(y) = y$.

(iii) $g \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $f^{-1} \circ g = \mathrm{id}_E$ avec $g = f$.

□

Remarques

R 1 – $(x, y) \in \Gamma_f \Longleftrightarrow y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow (y, x) \in \Gamma_{f^{-1}}$.
Donc, dans $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ est le symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $y = x$.

R 2 – Ne pas confondre f^{-1} et $\dfrac{1}{f}$!

R 3 – En pratique, pour montrer que f est bijective, on peut :
- Montrer que f est injective et surjective. La preuve de la surjectivité donne souvent l'expression de f^{-1}.
- Trouver g telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$, alors $g = f^{-1}$.
- Résoudre pour tout y l'équation $y = f(x)$ (on obtient $x = f^{-1}(y)$.
- Si $E \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$: appliquer le théorème de la bijection.

Exemples

E 1 – $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 - 1 \end{array}\right.$. Théorème de la bijection ou résolution d'équation

E 2 – $g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}} \end{array}\right.$

E 3 – Involutions, $A \mapsto \bar{A}$.

Propriété : Composée de bijections

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ bijectives, alors $g \circ f$ bijective. Réciproque fausse.

On a alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration

Contre-exemple : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$. □

Définition : Équipotence

Deux ensembles sont dits **équipotents** lorsqu'il existe une bijection allant de l'un vers l'autre.

Remarque

C'est la notion qui permet entre autre de définir les ensembles finis et leur cardinal.

Propriété : Image réciproque et image de la réciproque

Soit $f : E \to F$ bijective, $B \subset F$.

$$f^{(-1)}(B) = \left(f^{-1}\right)(B).$$

Remarque

Si f est bijective, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, f^n (itérée) l'est aussi et $\left(f^n\right)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^n$ que l'on peut noter f^{-n}. Cela permet de définir f^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

On peut alors vérifier que les opérations classiques sur les puissances sont encore valables.

⚠ tout de même, vu la non commutation, en général $(g \circ f)^n \neq g^n \circ f^n$! (Pourquoi ?)

II RELATIONS BINAIRES

1 Généralités

Définition : Relation binaire

Soient E un ensemble. On appelle **relation binaire** $\mathscr{R}$ sur E toute relation vraie pour certains couples $(x, y) \in E^2$.

C'est-à-dire que l'on a un ensemble $\Gamma \subset E^2$ tel que x est en relation avec y, ce qui se note $x\mathscr{R}y$ si et seulement si $(x, y) \in \Gamma$. Γ est le **graphe** de $\mathscr{R}$.

Représentation d'un graphe.

Remarque

Lorsque E est fini, on peut aussi la représenter par une matrice contenant 0 ou 1 appelée matrice d'adjacence.

Exemples

E1 – $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ E2 – $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$ E3 – $\perp$ sur $D = \{$ droites $\}$.

Définition : Réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E. $\mathscr{R}$ est dite :

- **réflexive** ssi $\forall x \in E, \quad x\mathscr{R}x$.
- **symétrique** ssi $\forall x, y \in E, \quad x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$.
- **antisymétrique** ssi $\forall x, y \in E, \quad x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x \Rightarrow x = y$.
- **transitive** ssi $\forall x, y, z \in E, \quad x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z \Rightarrow x\mathscr{R}z$.

Traduction sur le graphe.

Remarque

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E. $\mathscr{R}$ n'est pas

- **réflexive** ssi $\exists x \in E \mid x\not\mathscr{R}x$.
- **symétrique** ssi $\exists x, y \in E \mid x\mathscr{R}y$ et $y\not\mathscr{R}x$.
- **antisymétrique** ssi $\exists x, y \in E \mid x \neq y$ et $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$.
- **transitive** ssi $\exists x, y, z \in E \mid x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$ et $x\not\mathscr{R}z$.

Exemples

- **E 1 –** $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$
- **E 2 –** $<$ sur $\mathbb{R}$
- **E 3 –** // sur D
- **E 4 –** $\perp$ sur D
- **E 5 –** $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$.
- **E 6 –** $=$ sur... n'importe quoi !
- **E 7 –** $\neq$ sur... n'importe quoi !
- **E 8 –** $z\mathscr{R}z' \iff z = z'^2$ sur $\mathbb{C}$ n'est ni symétrique, ni antisymétrique, ni réflexive, ni transitive.

Remarque

La symétrie et la transitivité impliquent la réflexivité ? ? ? ?
$x\mathscr{R}y$ implique $y\mathscr{R}x$ et donc par transitivité, $x\mathscr{R}x$.
Non ! ! ! ! Car x pourrait n'être en relation avec personne...

2 Relations d'équivalence

Définition : Relation d'équivalence

On appelle **relation d'équivalence** toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive sur un ensemble non vide.

Exemples

- **E 1 –** $\iff$ sur les assertions.
- **E 2 –** $=$ sur n'importe quoi.
- **E 3 –** // sur l'ensemble des droites.
- **E 4 –** Sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, $(p,q)\mathscr{R}(p',q') \iff pq' = p'q$.
- **E 5 –** Sur l'ensemble des êtres humains, « a le même nom » ou « a le même sexe » ou « a les mêmes parents »
- **E 6 –** La relation « est asymptote en $+\infty$ à » sur l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions réelles tendant vers $+\infty$ en $+\infty$.
- **E 7 –** Si $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points du plan, relation d'équipollence de deux bi-points :

$$\forall\,(\mathrm{A},\mathrm{B}),(\mathrm{C},\mathrm{D})\in\mathscr{P}^2,\quad (\mathrm{A},\mathrm{B})\mathscr{R}(\mathrm{C},\mathrm{D}) \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} \iff \mathrm{ABDC}\text{ parallélogramme.}$$

Définition : Congruences

(i) Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. On définit la relation de **congruence modulo** n sur

$\mathbb{Z}$ par

$$a \equiv b \ [n] \iff n|(a-b) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid a = b + kn$$
$$\iff a \text{ et } b \text{ ont même reste de division par } n.$$

(ii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. On définit la relation de **congruence modulo** α sur $\mathbb{R}$ par

$$x \equiv y \ [\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid x = y + k\alpha$$

Propriété

Ces deux relations sont des relations d'équivalence.

Démonstration

Facile. □

Définition : Classes d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E et $x \in E$.
On appelle **classe d'équivalence** de x pour $\mathcal{R}$ l'ensemble

$$\overline{x} = \mathrm{cl}(x) = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

que l'on note aussi $\dot{x}$, $\mathrm{cl}(x)$ ou $[x]$ ou $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x)$ ou $[x]_{\mathcal{R}}$ s'il y a ambiguïté.

L'ensemble de toutes les classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$ est **l'ensemble quotient** noté $E/_{\mathcal{R}}$. C'est une partie de $\mathcal{P}(E)$.

Si $X \in E/_{\mathcal{R}}$, on a $x \in E$ tel que $X = \mathrm{cl}(x)$. On dit que x est un **représentant** de X.

Remarques

R1 – Pour tout $x \in E$, on a, par réflexivité, $x \in \mathrm{cl}(x)$.

R2 – L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E/_{\mathcal{R}} \\ x & \longmapsto & \mathrm{cl}(x) \end{array} \right.$ est appelée **surjection canonique**.

R3 – Lecture sur un graphe : les classes d'équivalences sont les parties reliées entre elles par des flèches.

Exemples

- **E1 –** $\iff$ sur les assertions : la classe de P contient toutes les assertions équivalentes à P.
- **E2 –** $=$ sur n'importe quoi : toute classe d'équivalence est un singleton.
- **E3 –** $//$ sur l'ensemble D des droites : la classe d'une $\mathscr{D}$ contient toutes les droites parallèles à $\mathscr{D}$.

  $D/_{//}$ représente l'ensemble des directions.
- **E4 –** Sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, $(p,q)\mathscr{R}(p',q') \iff pq' = p'q$: $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/_{\mathscr{R}}$ est la définition rigoureuse de l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ dont les éléments sont plutôt notés $\frac{p}{q}$.

  On continue sa construction en définissant des opérations qui ne doivent pas dépendre du représentant (p,q) d'une fraction rationnelle.

  Exemple avec la loi + : $\frac{p}{q}\times\frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}$ ne doit pas dépendre des représentants.
- **E5 –** Les classes d'équivalences pour la relation « avoir les mêmes parents » sont les fratries.
- **E6 –** Les classes d'équivalences de la relation d'équipollence de bipoints sont les vecteurs en géométrie.
- **E7 –** Pour la congruence modulo n, on a exactement n classes d'équivalences correspondant aux restes possibles dans la division par n. On note :

  $$\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \{\overline{0},\overline{1},\cdots,\overline{n-1}\}$$

  Pour tout a, $\overline{a} = \{a+kn,\ k\in\mathbb{Z}\}$.
  Par exemples, $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} = \{\overline{0},\overline{1}\}$ avec $\overline{0} = 2\mathbb{Z}$ et $\overline{1} = 2\mathbb{Z}+1$
- **E8 –** Pour la relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$, $\overline{\theta}$ correspond à toutes les mesures possibles pour un angle de mesure θ.

Propriété

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.

(i) $\forall\, x,y\in E,\qquad \mathrm{cl}(x)=\mathrm{cl}(y) \iff x\mathscr{R}y$

(ii) $\forall\, x,y\in E,\qquad \mathrm{cl}(x)=\mathrm{cl}(y)\ \text{ ou }\ \mathrm{cl}(x)\cap\mathrm{cl}(y)=\varnothing.$

(iii) $\bigcup_{x\in E}\mathrm{cl}(x) = E$

(iv) Les classes d'équivalence (donc $E/_{\mathscr{R}}$) forment une partition de E.

Exemples

E1 – $E = \{$suites réelles u admettant une limite finie$\}$
$u\mathscr{R}v$ si et seulement si $\lim u = \lim v$.

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que $E/_{\mathscr{R}}$ est équipotent à $\mathbb{R}$ (utiliser la surjection canonique).

E2 – Si f fonction, $x\mathscr{R}x' \iff f(x) = f(x')$. Classes d'équivalences : $f^{(-1)}(\{y\})$ pour $y \in f(E)$.

3 Relations d'ordre

a Définitions

Définition : Ordre

Une **relation d'ordre** (ou **ordre**) sur un ensemble E est une relation binaire $\trianglelefteq$ réflexive, antisymétrique et transitive.

Lorsqu'une telle relation $\trianglelefteq$ existe, on dit que $(E, \trianglelefteq)$ est un **ensemble ordonné**.

Exemples

E1 – $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ E2 – $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$ E3 – $|$ sur $\mathbb{N}$

Remarque

$\geqslant$ est aussi une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, mais pour le vocabulaire, les relations d'ordre considérées seront des « plus petit que ».

Définition : Ordre total, partiel

Une ordre $\trianglelefteq$ sur E est dit **total** lorsque

$$\forall\, x, y \in E, \quad x \trianglelefteq y \text{ ou } y \trianglelefteq x$$

$(E, \trianglelefteq)$ est alors **totalement ordonné**.

Sinon, c'est un ordre **partiel** et $(E, \trianglelefteq)$ est un **ensemble partiellement**

ordonné, ce qui se traduit par

$$\exists\, x, y \in E \mid x \ntrianglelefteq y \text{ et } y \ntrianglelefteq x$$

Remarque

Ordre total : $x \ntrianglelefteq y \Longrightarrow y \trianglelefteq x$.
Ordre partiel : Ce n'est pas parce que $x \ntrianglelefteq y$, que $y \trianglelefteq x$.

Exemples

E 1 – $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est totalement ordonné.

E 2 – $(\mathscr{P}(E), \subset)$ est partiellement ordonné dès que E contient deux éléments distincts.

E 3 – $(\mathbb{N}, |)$ est partiellement ordonné.

E 4 – Il n'existe pas d'ordre total sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opération + et ×.
En effet, si on avait un tel ordre $\trianglelefteq$,
- Soit $z \trianglerighteq 0$, $z \times z \trianglerighteq z \times 0 = 0$
- Soit $z \trianglelefteq 0$, $z - z = 0 \trianglelefteq 0 - z$ donc $-z \trianglerighteq 0$ et $z^2 = (-z)^2 \trianglerighteq 0$.

En particulier, $\mathrm{i}^2 = -1 \triangleright 0$ et $1^2 = 1 \triangleright 0$. Donc $0 \triangleright 0$.

Remarque

Si $\trianglelefteq$ est une relation d'ordre sur E, on définit la relation d'ordre strict associée $\triangleleft$ par $x \triangleleft y \iff x \trianglelefteq y \text{ et } x \neq y$. Cette relation binaire n'est pas réflexive, mais elle est transitive. (Elle est anti-symétrique, mais cela n'a pas beaucoup d'intérêt car l'hypothèse n'est jamais vérifiée.)

b Majorants et minorants

Définition : Majorants, minorants

Soit $(E, \trianglelefteq)$ ordonné, $x \in E$, $A \subset E$, $A \neq \varnothing$.
On dit que $M \in E$ est un **majorant** dans E (ou **majore**) x lorsque $x \trianglelefteq M$.
On dit que $M \in E$ est un **majorant** (ou **majore**) A lorsqu'il majore tous ses éléments :

$$\forall\, a \in A, \quad a \trianglelefteq M$$

On dit que $m \in E$ est un **minorant** dans E (ou **minore**) x lorsque $m \trianglelefteq a$.
On dit que $m \in E$ est un **minorant** (ou **minore**) A lorsqu'il minjore tous ses éléments :

$$\forall a \in A, \quad m \trianglelefteq x$$

Exemples

E1 – Dans $(\mathbb{N}, \leqslant)$, l'ensemble des majorants de $A = \{1,2,3\}$ est $\text{Maj}(A) = [\![3, +\infty[\![$. L'ensemble des minorants de A est $\text{Min}(A) =]\!]-\infty, 1]\!]$.

E2 – Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, l'ensemble des majorants de $A = \{1,2,3\}$ est $[3, +\infty[$, l'ensemble des minorants de A est $]-\infty, 1]$.

E3 – Dans $(\mathbb{N}, |)$, l'ensemble des majorants de 3 est $3\mathbb{N}$, l'ensemble des minorants de 3 est $\{1,3\}$.

E4 – Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, l'ensemble des majorants de $A = [a, b[$ est $[b, +\infty[$. L'ensemble des minorants de A est $]-\infty, a]$

Remarques

R1 – Il n'y a pas unicité des majorants/minorants.

R2 – $\mathbb{R}$ n'a ni majorant, ni minorant pour $\leqslant$.

R3 – Les majorants et les minorants dépendent de E et de l'ordre.

C Éléments extrémaux

Définition : Plus grand, plus petit élément

Soit $(E, \trianglelefteq)$ ordonné, $A \subset E$, $A \neq \varnothing$.
On appelle **plus grand élément** ou **maximum** de A, s'il existe, tout $\boxed{g \in A}$ tel que g majore A :

$$\forall a \in A, \quad a \trianglelefteq g$$

On appelle **plus petit élément** ou **minimum** de A, s'il existe, tout $\boxed{p \in A}$ tel que p minore A :

$$\forall a \in A, \quad p \trianglelefteq x$$

Propriété : Unicité

S'il y a un plus grand élément, il est unique et on le note $\max A$*.*
S'il y a un plus petit élément, il est unique et on le note $\min A$*.*

Exemples

- **E1 –** Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $A = [a, b[$. $\min A = a$ et pas de max.
- **E2 –** Dans $(\mathscr{P}(E), \subset)$, $\min \mathscr{P}(E) = \varnothing$ et $\max \mathscr{P}(E) = E$.
- **E3 –** Dans $(\mathbb{N}, \leqslant)$, $\min \mathbb{N} = 0$, pas de max.
- **E4 –** Dans $(\mathbb{N}, |)$, $\min \mathbb{N} = 1$, $\max \mathbb{N} = 0$.

Remarque

Les éléments extrémaux ne dépendent pas de E (mais de l'ordre, oui).

d Borne inférieure, borne supérieure

Définition : Borne inférieure, borne supérieure

Soit $(E, \trianglelefteq)$ ordonné, $A \subset E$, $A \neq \varnothing$.

Si l'ensemble des majorant de A dans E est non vide et admet un plus petit élément, on l'appelle **borne supérieure** de A dans E et on le note $\sup A$ ou $\sup_E A$.

Si l'ensemble des minorant de A dans E est non vide et admet un plus grand élément, on l'appelle **borne inférieure** de A dans E et on le note $\inf A$ ou $\inf_E A$.

Remarques

- **R1 –** Borne supérieure = plus petit des majorants.
  Borne inférieure = plus grand des minorants.
- **R2 –** Si le $\sup$ existe, c'est un majorant : $\forall\, a \in A,\quad a \trianglelefteq \sup A$.
  Si l'$\inf$ existe, c'est un minorant : $\forall\, a \in A,\quad \inf A \trianglelefteq a$.
- **R3 –** Si $\sup A$ (respectivement $\inf A$) existe, il est unique, mais **pas nécessairement dans** A.
- **R4 –** Pour $f : D \to \mathbb{R}$, on définit aussi $\inf f$ et $\sup f$, s'ils existent, comme le $\sup$ et l'$\inf$ de $\{f(x), x \in D\}$.

Exemples

E1 – $A=[a,b[$. Ensemble des majorants : $[b,+\infty[$, $\sup[a,b[$ existe et vaut b.
$\inf[a,b[=\min[a,b[=a$.

E2 – $A=\{1,2,3\}$ dans $(\mathbb{N},|)$. On remarque que le $\sup$ correspond au ppcm et que l'$\inf$ correspond au pgcd.

E3 – $\inf(\exp)=0$, pas de $\sup$.

E4 – Ni $\inf$, ni $\sup$ pour $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x$.

E5 – $(\mathscr{P}(E),\subset)$. $\sup\{A,B\}=A\cup B$, $\inf\{A,B\}=A\cap B$.

Propriété

Soit $(E,\trianglelefteq)$ ordonné, $A\subset E$, $A\neq\varnothing$.

(i) $\sup A$ existe et $\sup A\in A\Rightarrow\max A$ existe et vaut $\sup A$.

(ii) $\max A$ existe $\Rightarrow\sup A$ existe et vaut $\max A$.

(idem avec $\inf$ et $\min$.)

e Cas particulier de $(\mathbb{R},\leqslant)$

Théorème

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Démonstration

Admis. □

Remarque

C'est faux sur $\mathbb{Q}$. Par exemple, $\{x\in\mathbb{Q}^+\mid x^2\leqslant 2\}=\mathbb{Q}\cap[0,\sqrt{2}[$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Corollaire

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Démonstration

On considère $-A=\{-a \mid a\in A\}$ non vide, majorée et telle que $-\sup(-A)$ est le plus grand des minorants de A. □

Remarque

On a montré que $\sup(-A)=-\inf A$. On en déduit aussi $\inf(-A)=-\sup A$.

Propriété : Caractérisation du sup et de l'inf

$$\alpha=\sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x\in A,\quad x\leqslant \alpha & (\alpha \text{ majore } A)\\ \forall M'\in\mathbb{R} \mid M'<\alpha,\quad \exists x\in A \mid M'<x & \text{(Pas de majorant plus ptt)}\end{cases}$$

$$\beta=\inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x\in A,\quad \beta\leqslant x & (\beta \text{ minore } A)\\ \forall m'\in\mathbb{R} \mid \beta<m',\quad \exists x\in A \mid x<m' & \text{(Pas de minorant plus grd)}\end{cases}$$

(Dessin)

Propriété : Énoncé local

$$\alpha=\sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x\in A,\quad x\leqslant \alpha & (\alpha \text{ majore } A)\\ \forall \varepsilon>0,\quad \exists x\in A \mid \alpha-\varepsilon<x & \text{(Pas de majorant plus petit)}\end{cases}$$

$$\beta=\inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x\in A,\quad \beta\leqslant x & (\beta \text{ minore } A)\\ \forall \varepsilon>0,\quad \exists x\in A \mid x<\beta+\varepsilon & \text{(Pas de minorant plus grand)}\end{cases}$$

Propriété : Caractérisation séquentielle

La borne supérieure de A est le seul majorant limite d'une suite d'éléments de A.

La borne inférieure de A est le seul minorant limite d'une suite d'éléments de A.

Démonstration

Prendre $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$. $\square$