Limite et continuité

On se donne $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d_E, d_F, d_G les distances associées à la norme pour chaque espace.

On fixe A et B des parties non vides de E et F respectivement.

I LIMITE

1 Limite en un point

Soit $f \in F^A$, $a \in \overline{A}$, $b \in F$.

Définition

On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in A,\ \ d_E(x,a) = \|x-a\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow d_F(f(x),b) = \|f(x)-b\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Propriété

Si f admet b comme limite en a, alors f est bornée au voisinage de A.

Propriété : Caractérisation séquentielle

$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ si et seulement si pour tout suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to a$, $f(a_n) \to b$.

Propriété : Unicité de la limite

Si $f \xrightarrow[x \to a]{} b$ et $f \xrightarrow[x \to a]{} b'$, alors $b = b'$.

Propriété

Si $g \in \mathbb{R}^A$ telle que $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et si, au voisinage de a, $\|f(x)-b\| \leqslant g(x)$ alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$.

Propriété

Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$, $\|f(x)\|_F \xrightarrow[x \to a]{} \|b\|_F$.

2 Cas où F est de dimension finie

Propriété

Si F est de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F, $f \in F^A$, $b = \sum_{k=1}^{n} b_k e_k \in F$.

On note $f_k \in \mathbb{K}^A$ tel que pour tout $x \in A$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k$.

Alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $f_k \xrightarrow[x \to a]{} b_k$.

3 Fonction à valeurs dans un espace produit

Propriété

Si $(F_1, N_1), \ldots, (F_p, N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, on munit $F_1 \times \cdots \times F_p$ de la norme produit N.

Si $f \in (F_1 \times \cdots \times F_p)^A$, $a \in \overline{A}$. Pour $i \in [\![1,p]\!]$, on pose $f_i \in F_i^A$ tel que $f : x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_p(x))$.

Soit $b = (b_1, \ldots, b_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$.

Alors $f \xrightarrow[x \to a]{} b$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $f_i(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_i$.

4 Opérations algébriques

La caractérisation séquentielle permet de prouver facilement les propriétés sur les opérations algébriques sur les limites.

Propriété

Soient $f, g \in F^A$, $h \in \mathbb{K}^A$ telles que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \in F$, $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} b' \in F$, $h(x) \xrightarrow[x\to a]{} \alpha \in \mathbb{K}$.

(i) Si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f + \lambda g \xrightarrow[x\to a]{} b + \lambda b'$.

(ii) $h(x) \cdot f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \alpha \cdot b$.

(iii) Si $\alpha \neq 0$ et h ne s'annule pas sur A, alors $\dfrac{1}{h(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{1}{\alpha}$.

Propriété

Si $f \in F^A$, telle que $f(A) \subset B$, $g \in G^B$, $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$, $c \in G$ tels que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$, $g(y) \xrightarrow[y\to b]{} c$ alors $g \circ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} c$.

5 Extension à l'infini

Définition

Si A non bornée, $f \in F^A$, $b \in F$.
On dit que $f(x) \xrightarrow[\|x\|_E\to+\infty]{} b$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ \|x\|_E \geqslant M \Longrightarrow \|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Définition

Si $A \subset \mathbb{R}$, $f \in F^A$, $b \in F$.

(i) Si A n'est pas majorée, on dit que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} b$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \geqslant M \Longrightarrow \|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon.$$

(ii) Si A n'est pas minorée, on dit que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} b$ lorsque $f(-x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} b$ c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leqslant M \Longrightarrow \|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Définition

Soit $f \in \mathbb{R}^A$ et $a \in \overline{A}$.

(i) On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant M.$$

(ii) On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$ lorsque $-f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$ c'est-à-dire

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant M.$$

II RELATIONS DE COMPARAISON

Définition

Soit $f, g \in F^A$ où A partie de E, $\varphi \in \mathbb{R}^A$, $a \in \overline{A}$. Si A est une partie non minorée ou non majorée de $\mathbb{R}$, a peut aussi être $\pm\infty$.

- f est **dominée** par φ au voisinage de a, et on note $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\varphi)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(\varphi(x))$ lorsqu'il existe un réel M et un voisinage V de a tel que sur V on ait $\|f(x)\|_E \leqslant M\,|\varphi(x)|$.
  Cela revient à dire que $\|f\|_E = \mathrm{O}(|\varphi|)$.
  Lorsque φ ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a), cela revient à dire que $x \mapsto \dfrac{1}{\varphi(x)} f(x)$ est bornée au voisinage de a.
- f est **négligeable** devant φ au voisinage de a, et on note $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(\varphi(x))$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que sur V on ait $\|f(x)\|_E \leqslant \varepsilon\,|\varphi(x)|$.
  Cela revient à dire que $\|f\|_E = \mathrm{o}(|\varphi|)$.
  Lorsque φ ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a), cela revient à dire que $\dfrac{1}{\varphi(x)} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
- On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ lorsque $f - g$ est négligeable devant $\|f\|$ ou devant $\|g\|$ (cela revient au même) au voisinage de a.

III CONTINUITÉ

1 En un point, sur une partie

Soient $f : A \subset E \to F$ et $a \in A$.

Définition : Continuité

f est **continue en** a lorsque f admet une limite (finie) en a.
f est **continue sur** A si et seulement si f est continue en tout point de A.

Propriété

Si f est continue en a, la limite de f en a vaut $f(a)$.

Propriété : Caractérisation séquentielle

f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to a$, $(f(a_n))$ converge.

Propriété : Opérations

- *Si f est continue, $x \mapsto \|f(x)\|$ l'est aussi.*
- *Toute combinaison linéaire, toute composée de fonctions continues est continue.*
- *Si $f : A \to F$ et $h : A \to \mathbb{K}$ sont continues, $h \cdot f$ l'est aussi. Si h ne s'annule pas, $\frac{1}{h} \cdot f$ l'est aussi.*

2 Continuité et topologie

Propriété

L'image réciproque d'un ouvert (respectivement fermé) par une application continue est un ouvert (respectivement un fermé) relatif de l'ensemble de départ.

Propriété

Des applications continues coïncidant sur des parties denses sont égales.

3 Uniforme continuité

Définition

Soit $f : A \subset E \to \mathbb{F}$. On dit que f est **uniformément continue** sur A si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in A,\ \|x - y\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Propriété

Une fonction uniformément continue sur A est continue sur A. Réciproque fausse.

Propriété : Caractérisation séquentielle

f est uniformément continue sur A si et seulement si $\forall (x_n)_n, (y_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \mid x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\ f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Propriété

Une combinaison linéaire, une composée de fonctions uniformément continue l'est encore.

Théorème : Théorème de Heine

On suppose que $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{K}$.
Tout fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

4 Fonctions lipschitziennes

Définition

$f : A \subset E \to F$ est dite k-lipschitzienne sur A (où $k \in \mathbb{R}_+^*$ si

$$\forall x, y \in A, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k \|x - y\|_E.$$

Propriété

Toute fonction lipschitzienne sur A y est uniformément continue. La réciproque est fausse.

Définition : distance à une partie

Si A est une partie non vide de E, $x \in E$, on appelle **distance de x à A** le réel $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ qui est bien défini.

Propriété

$\left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x, A) \end{array} \right.$ *est 1-lipschitzienne donc uniformément continue sur E.*

C'est en particulier le cas de $x \mapsto d(x, a)$ où $a \in E$ avec $A = \{a\}$.

5 Applications linéaires

Propriété : Continuité des applications linéaires

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Les cinq propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est continue sur E.

(ii) u est continue en 0_E.

(iii) $\boxed{\text{Il existe } C \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que pour tout } x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E.}$

(iv) u est lipschitzienne sur E.

(v) u est uniformément continue sur E.

Définition

On note $\mathscr{L}_c(E, F) = \mathscr{L}(E, F) \cap \mathscr{C}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur E.

Méthode : Étudier la continuité d'une application linéaire en dimension infinie

- Pour montrer qu'une application linéaire est continue, on cherche une constante C telle que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$.
- Pour montrer qu'une application linéaire n'est pas continue, on cherche à nier la caractérisation séquentielle de la continuité en 0 en trouvant une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to 0_E$ (ie $\|x_n\|_E \to 0$) et pourtant $u(x_n) \not\to 0_F$ (ie $\|u(x_n)\|_F \not\to 0_F$.)

IV DIMENSION FINIE

1 Coordonnées

Propriété

On suppose F de dimension finie $n > 1$.

Soit A une partie non vide de E, $f \in F^A$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F. On pose $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

Alors f est continue sur A si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est continue sur A.

2 Applications linéaires

Théorème

Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E vers F est continue sur E. Autrement dit, $\mathscr{L}_c(E, F) = \mathscr{L}(E, F)$.

3 Applications polynomiales

Définition

Soit $f : E \to K$, où E est de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Pour $x \in E$, on note $x_1, \dots, x_n$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$.

f est dite **monomiale** s'il existe $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N}^p$ tels que $f : x \mapsto x_1^{k_1} \cdots x_p^{k_p}$.

f est dite **polynomiale** si elle est combinaison linéaire de fonctions monomiales.

Propriété

Toute fonction polynomiale sur E de dimension finie est continue.

4 Applications multilinéaires

Propriété : Continuité des applications bilinéaires en dimension finie

Si $(E, \|\|_E)$, $(F, \|\|_F)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $(G, \|\cdot\|_G)$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors toute application bilinéaire de $E \times F$ dans G est continue.

Propriété : Généralisation

Plus généralement, toute application multilinéaire définie sur un produit d'espaces de dimension finie est continue.