Nombres complexes

Extrait du programme officiel :

L'objectif de ce chapitre est de consolider et d'approfondir les notions sur les nombres complexes acquises en classe de Terminale. Le programme combine les aspects suivants :

- l'étude algébrique du corps $\mathbb{C}$, équations algébriques (équations du second degré, racines n-ièmes d'un nombre complexe) ;

- l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;

- l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.

Il est recommandé d'illustrer le cours par de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire.	La construction de $\mathbb{C}$ n'est pas exigible.
Opérations sur les nombres complexes.	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations.	
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct.
b) Module	
Module.	Interprétation géométrique de $\lvert z - z'\rvert$, cercles et disques.
Relation $\lvert z\rvert^2 = z\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient.	
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
c) Nombres complexes de module 1 ~~et trigonométrie~~	
Cercle trigonométrique. Paramétrisation par les fonctions circulaires.	Notation $\mathbb{U}$. Les étudiants doivent savoir retrouver les formules du type $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et résoudre des équations et inéquations trigonométriques en s'aidant du cercle trigonométrique.
Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme.	

Contenus	Capacités & Commentaires
~~Formules de trigonométrie exigibles : $\cos(a\pm b)$, $\sin(a\pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\cos a\cos b$, $\sin a\cos b$, $\sin a\sin b$.~~	~~Les étudiants doivent savoir factoriser des expressions du type $\cos(p)+\cos(q)$.~~
~~Fonction tangente.~~	~~La fonction tangente n'a pas été introduite au lycée.~~ ~~Notation $\tan$.~~
~~Formule exigible : $\tan(a\pm b)$.~~	
Formules d'Euler.	Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n}\cos(kt)$, de $\sum_{k=0}^{n}\sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

d) Formes trigonométriques

Contenus	Capacités & Commentaires
Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ avec $r>0$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.	Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.
Factorisation de $1\pm e^{it}$.	
Transformation de $a\cos t+b\sin t$ en $A\cos(t-\varphi)$.	⇆ PC et SI : amplitude et phase.

e) Équations du second degré

Contenus	Capacités & Commentaires
Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
Somme et produit des racines.	

f) Racines n-ièmes

Contenus	Capacités & Commentaires
Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.

g) Exponentielle complexe

Contenus	Capacités & Commentaires
Définition de e^z pour z complexe : $e^z=e^{\mathfrak{Re}(z)}e^{i\,\mathfrak{Im}(z)}$.	Notations $\exp(z)$, e^z. ⇆ PC et SI : définition d'une impédance complexe en régime sinusoïdal.
Exponentielle d'une somme.	
Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z)=\exp(z')$ si et seulement si $z-z'\in 2i\pi\mathbb{Z}$.	
Résolution de l'équation $\exp(z)=a$.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
h) Interprétation géométrique des nombres complexes	
Interprétation géométrique du module et de l'argument de $\frac{c-b}{c-a}$.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az+b$.	Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.
Interprétation géométrique de la conjugaison.	L'étude générale des similitudes indirectes est hors programme.

Table des matières

Historiquement, les nombres complexes furent introduit au XVI$^{\text{ème}}$ siècle pour exprimer toutes les solutions d'équations polynomiales de degré 2, 3 (celles de degré 3 historiquement) en particulier les nombres de carré négatif, par les mathématiciens italiens Girolamo Cardan [1] et Rafael Bombelli [2].

Cette théorie de nombres impossibles mis trois siècles à être acceptée par la communauté mathématique, et c'est leur utilisation en science physique (électricité) qui forcèrent les mathématiciens du XIX$^{\text{ème}}$ siècle (Carl Friedrich Gauss [3], Jean-Robert Argand [4] ...) à en donner une définition algébrique et géométrique plus précise.

---

1. 

Girolamo Cardan ou **Cardano** (Pavie, 1501 - Rome, 1576) est un mathématicien, un philosophe, un astrologue, un inventeur, et un médecin italien. Il fut le premier à introduire la théorie des équations algébriques. Sa méthode de résolution des équations du troisième degré (que lui fut enseignée par Niccòlo Fontana dit Tartaglia, sous serment de ne pas le publier, promesse qu'il ne tint pas) eut pour conséquence l'émergence des nombres imaginaires, qui deviendront nos nombres complexes au XIX$^{\text{ème}}$ siècle.

2. 
Rafael Bombelli (Bologne, Italie, 1526-1572) est un mathématicien et ingénieur italien. Il contribua à la compréhension des nombres complexes en en faisant la première étude algébrique dans *Algebra*. Bombelli utilisa la méthode dite des fractions continues pour calculer les racines carrées.

3. 
Carl Friedrich Gauss (Brunswick 1777 - Göttingen 1855) est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Surnommé *le prince des mathématiciens*, il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Gauss était un génie particulièrement précoce : à 7 ans (ou 10 selon les sources), il donne la formule calculant $1+2+\cdots+100$. À 19 ans, il fut le premier à démontrer la loi de réciprocité quadratique. Parmi ses autres prouesses, on peut citer la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre, dans sa thèse en 1799, l'invention de la théorie des congruences, la résolution de problèmes de construction à la règle et au compas... Il est considéré comme le fondateur de la géométrie différentielle.

4. **Jean-Robert Argand** (Genève 1768 - Paris 1822) est un mathématicien amateur suisse. En 1806, alors qu'il tient une librairie à Paris, il publie une interprétation géométrique des nombres complexes comme points dans le plan, en faisant correspondre au nombre $a+\mathrm{i}b$ le point de coordonnées (a,b). Pour cette raison, le plan, vu comme ensemble des nombres complexes, est parfois appelé *le plan d'Argand*. On lui doit le terme *module d'un nombre complexe*. Il a publié une preuve du théorème fondamental de l'algèbre.

I Le corps $\mathbb{C}$

1 Une construction de $\mathbb{C}$

Partons de l'idée suivante :

- On considère tous les couples de réels $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- On définit alors deux lois $+$ et $\times$ par, si $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$, $z + z' = (x + x', y + y')$ et $zz' = xx' - yy', xy' + x'y)$.
- On note $\mathrm{i} = (0, 1)$, couple tel que $\mathrm{i}^2 = (-1, 0)$.
- On se permet de noter x le nombre $(x, 0)$ pour x réel.
- Pour faciliter les calculs, on notera $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + \mathrm{i}y$.
  On remarque alors que les calculs avec les lois $+$ et $\times$ se passent « comme dans $\mathbb{R}$ » en utilisant $\mathrm{i}^2 = -1$.

Il reste à vérifier que les propriétés usuelles des lois $+$ et $\times$ sont bien valables.

Propriétés

*(i) La loi $+$ est **associative** :*

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C},\quad \left(z + z'\right) + z'' = z + \left(z' + z''\right)$$

*et **commutative** :*

$$\forall z, z' \in \mathbb{C},\quad z + z' = z' + z.$$

*(ii) La loi $\times$ est **associative** :*

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C},\quad \left(z \times z'\right) \times z'' = z \times \left(z' \times z''\right),$$

***commutative** :*

$$\forall z, z' \in \mathbb{C},\quad z \times z' = z' \times z$$

*et **distributive** sur la loi $+$:*

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C},\quad z \times \left(z' + z''\right) = z \times z' + z \times z''.$$

*(iii) 0 est un **élément neutre** de $+$ sur $\mathbb{C}$: $\forall z \in \mathbb{C},\quad z + 0 = 0 + z = z.$*

*(iv) 1 est un **élément neutre** de $\times$ sur $\mathbb{C}$: $\forall z \in \mathbb{C},\quad z \times 1 = 1 \times z = z.$*

*(v) Tout élément est **symétrisable** pour la loi $+$:*

$$\forall z \in \mathbb{C},\quad \exists!\, z' \in \mathbb{C} \mid z + z' = 0.$$

On note alors $z' = -z$.

(vi) *Tout élément non nul est* ***symétrisable*** *pour la loi* $\times$:

$$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\quad \exists!\, z'' \in \mathbb{C} \mid z \times z'' = 1.$$

On note alors $z'' = z^{-1} = \frac{1}{z}$.

Démonstration

Pour *(i)* à *(iv)*, il suffit d'écrire les choses. Attention avec la formulation $x+\mathrm{i}y$: ne pas utiliser des propriétés non démontrées !

Si $z = x+\mathrm{i}y$, pour *(v)*, prendre $z' = -x-\mathrm{i}y$, et pour *(vi)*, prendre

$$z'' = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}.$$

□

Corollaire

On dit que $(\mathbb{C},+,\times)$ *est un* ***corps commutatif****, appelé* ***corps des complexes****.*

2 Partie réelle, partie imaginaire

Définition : Parties réelles et imaginaires

Soit z un élément de $\mathbb{C}$, x et y des réels tels que $z = x+\mathrm{i}y$.

On appelle **partie réelle** de z, notée $\mathfrak{Re}\, z$, le nombre x, et **partie imaginaire** de z, notée $\mathfrak{Im}\, z$ le nombre y.

Remarques

R1 – Lorsque z est un nombre complexe de partie imaginaire nulle, z est réel (par identification du nombre réel $\mathfrak{Re}\, z$ et du nombre complexe $\mathfrak{Re}\, z + \mathrm{i}\times 0$).

R2 – Lorsque z est un nombre complexe de partie réelle nulle, on dit que z est **imaginaire pur** : $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Propriété

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

En particulier, un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Démonstration

C'est l'unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire en tant que coordonnées d'un couple. □

Propriété : Linéarité de $\mathfrak{Re}$ et $\mathfrak{Im}$

Si $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathfrak{Re}(z+z') = \mathfrak{Re}\, z + \mathfrak{Re}\, z' \text{ et } \mathfrak{Re}(\lambda z) = \lambda \mathfrak{Re}\, z$$

et

$$\mathfrak{Im}(z+z') = \mathfrak{Im}\, z + \mathfrak{Im}\, z' \text{ et } \mathfrak{Im}(\lambda z) = \lambda \mathfrak{Im}\, z$$

3 Affixe

On se fixe pour le reste du chapitre un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$

Propriété

On peut identifier le nombre complexe $x + \mathrm{i}y$ avec le point de coordonnées (x, y) dans le repère fixé du plan.

*On dit que $x + \mathrm{i}y$ est **l'affixe** du point de coordonnées (x, y), ou encore ce point est l'**image** dans $\mathbb{R}^2$ du nombre complexe $x + \mathrm{i}y$.*

Remarque

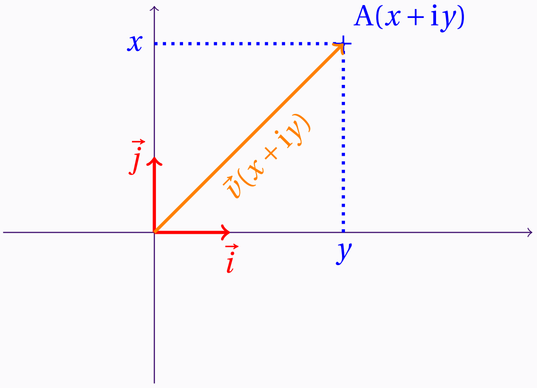
On utilise la même terminologie d'**affixe** pour le vecteur de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ du repère.

Le vecteur $x\vec{i} + y\vec{j}$ est l'**image vectorielle** du nombre complexe $x + \mathrm{i}y$.

La somme de deux nombres complexes représente alors la somme des vecteurs images vectorielles de ces nombres.

Illustration

A est le point de coordonnées (x, y), d'affixe $x + \mathrm{i}y$.



4 Conjugaison

Définition : Conjugué

Soit $z \in \mathbb{C}$, et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x + \mathrm{i}y$.
On appelle **conjugué** de z le nombre complexe $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes.

(i) $\overline{\overline{z}} = z$

(ii) $\begin{cases} \mathfrak{Re}\, z = \dfrac{z + \overline{z}}{2} \\ \mathfrak{Im}\, z = \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}} \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} z \in \mathbb{R} \iff \mathfrak{Im}\, z = 0 \iff z = \overline{z} \\ z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \mathfrak{Re}\, z = 0 \iff z = -\overline{z} \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \\ \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} \end{cases}$

(v) Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

(vi) $z\overline{z} = (\mathfrak{Re}\, z)^2 + (\mathfrak{Im}\, z)^2$

Démonstration

Très facile, à compléter en exercice !
Notons x et y les parties réelles et imaginaires de z, et x' et y' celles de z'.

(i) $\overline{\overline{z}} = \overline{x - \mathrm{i}y} = x + \mathrm{i}y = z$

(ii) $z + \overline{z} = x + \mathrm{i}y + x - \mathrm{i}y = 2x$ et $z - \overline{z} = x + \mathrm{i}y - (x - \mathrm{i}y) = 2\mathrm{i}y$.

(iii) • $z \in \mathbb{R} \iff b = \mathfrak{Im}\, z = 0$ d'après la convention prise ci-dessus, et par unicité des

coefficients x et y.
De plus, on a bien $z=\overline{z}$ si $y=\mathfrak{Im}\,z=0$, et réciproquement, si $z=\overline{z}$, $2y=0$ donc $y=0$.

- $z\in i\mathbb{R} \iff x=\mathfrak{Re}\,z=0$ par unicité des cœfficients x et y.
De plus, on a bien $z=-\overline{z}$ si $x=\mathfrak{Re}\,z=0$, et réciproquement, si $z=-\overline{z}$, $2ix=0$ donc $x=0$ (à nouveau par unicité des coefficients).

(iv)
- $\overline{z+z'}=x+x'-i(y+y')$ et $\overline{z}+\overline{z'}=x-iy+x'-iy'$ d'où le résultat.
- On calcule $\overline{zz'}=\overline{xx'-yy'+i(xy'+yx')}=xx'-yy'-i(xy'+yx')$ et

$$\overline{z}\,\overline{z'}=(x-iy)(x'-iy')=xx'-yy'-i(xy'+yx'),$$

d'où le résultat.

(v) On a $\frac{z'}{z}\times z=z'$.
Donc, d'après ce que l'on vient de prouver, $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}\times\overline{z}=\overline{z'}$.
Et comme $\bar{z}\neq 0$, $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

(vi) $z\overline{z}=x^2+y^2+xy-xy$. □

5 Module d'un nombre complexe

Définition : Module

Soit z un nombre complexe, on définit le module de z par

$$|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{(\mathfrak{Re}\,z)^2+(\mathfrak{Im}\,z)^2}$$

Remarques

R1 – Le module est donc un nombre réel bien défini car $z\overline{z}=(\mathfrak{Re}\,z)^2+(\mathfrak{Im}\,z)^2\in\mathbb{R}^+$.

R2 – Ce module prolonge bien la valeur absolue, d'où la notation (si $z=a\in\mathbb{R}$, $|z|=\sqrt{a^2}=|a|$).

R3 – Dans la pratique, on essayera de travailler avec le carré du module plutôt que le module.

R4 – **Important** : l'inverse d'un nombre complexe non nul s'exprime très facilement en fonction de son module et de son conjugué

$$\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Propriétés

Soient z et z' des nombres complexes.

(i) $|z|$ *est la distance, dans le plan euclidien* $\mathbb{R}^2$ *muni d'un repère orthonormal direct, entre l'origine* O *et le point d'affixe* z*.*
$|z-z'|$ *est la distance entre le point d'affixe* z *et celui d'affixe* z'*.*

(ii) $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$

(iii) $\begin{cases} |\mathfrak{Re}(z)| \leqslant |z| & \text{avec égalité si et seulement si } z \in \mathbb{R} \\ |\mathfrak{Im}(z)| \leqslant |z| & \text{avec égalité si et seulement si } z \in i\mathbb{R} \end{cases}$

(iv) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

(v) $|zz'| = |z|\,|z'|$

(vi) *Si* $z \neq 0$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$

Démonstration

(i) Direct.

(ii) Direct.

(iii) $|z|^2 = (\mathfrak{Re}\,z)^2 + (\mathfrak{Im}\,z)^2 \geqslant (\mathfrak{Re}\,z)^2$, donc, comme $|z| \geqslant 0$, $|z| \geqslant |\mathfrak{Re}\,z|$. Il y a égalité si et seulement si $\mathfrak{Im}\,z = 0$ i.e. $z \in \mathbb{R}$.
De même, $|z| \geqslant |\mathfrak{Im}\,z|$ avec égalité si et seulement si $\mathfrak{Re}\,z = 0$ i.e. $z \in i\mathbb{R}$.

(iv) Si $z = 0$, $|z| = 0$.
Réciproquement, si $|z| = 0$, montrons que $z = 0$ i.e. $\mathfrak{Re}\,z = \mathfrak{Im}\,z = 0$.
D'après la propriété précédente,

$$0 \leqslant |\mathfrak{Re}\,z| \leqslant |z| = 0$$

d'où $|\mathfrak{Re}\,z| = 0$ et $\mathfrak{Re}\,z = 0$.
De même $\mathfrak{Im}\,z = 0$.
On a alors $z = 0$.

(v) $|zz'|^2 = \overline{z}\overline{z'} \cdot zz' = z\overline{z} \cdot z'\overline{z'} = |z|^2\,|z'|^2$.
Comme les modules sont positifs, on obtient le résultat en prenant la racine des membres extrêmes de l'égalité.

(vi) Si $z \neq 0$, $|z'| = \left|\dfrac{z'}{z} \times z\right| = \left|\dfrac{z'}{z}\right| |z|$ d'où le résultat car $|z| \neq 0$. □

Corollaire : de la propriété (v)

Si z est un nombre complexe, et $k \in \mathbb{N}$, $\left|z^k\right| = |z|^k$.
Si $z \neq 0$, c'est encore valable pour $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration

Fixons un nombre complexe z et appelons $\mathcal{H}_k$, pour $k \in \mathbb{Z}$, la proposition « $\left|z^k\right| = |z|^k$ ».

Montrons la véracité de $\mathcal{H}_n$, pour $n \in \mathbb{N}$ par récurrence sur n :

- **Initialisation** : Comme $\left|z^0\right| = |1| = |z|^0$, $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- **Hérédité** : Si $\mathcal{H}_n$ est vrai pour un $n \geqslant 0$, alors, d'après la propriété (v),
$$\left|z^{n+1}\right| = \left|z^n z\right| = \left|z^n\right||z|$$
d'où, d'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$,
$$\left|z^{n+1}\right| = |z|^n|z| = |z|^{n+1}.$$
$\mathcal{H}_{n+1}$ est donc vérifiée et la récurrence est établie.

De plus, si $k \in \mathbb{Z}^-$, $n := -k \in \mathbb{N}$, donc $|z^n| = |z|^n$ et
$$\left|z^k\right| = \left|\frac{1}{z^n}\right| = \frac{1}{|z^n|} = \frac{1}{|z|^n} = |z|^k$$
Le résultat est donc démontré pour tout k dans $\mathbb{Z}$. □

Propriété : Inégalités triangulaires

Soient z et z' deux nombres complexes.
Alors
$$\left||z| - \left|z'\right|\right| \leqslant \left|z \pm z'\right| \leqslant |z| + \left|z'\right|$$
Cas d'égalité :
$$\left|z + z'\right| = |z| + \left|z'\right| \iff z = 0 \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid z' = \lambda z$$
*On dit alors que z et z' sont **positivement liés**.*

Démonstration

TRÈS IMPORTANTE, À CONNAÎTRE !

On va démontrer les inégalité pour $+$, on les obtient pour $-$ en changeant z' en $-z'$.

- **Inégalité triangulaire :**

Comme souvent, on préfère travailler avec le carré du module, plutôt qu'avec le module lui-même.
Or

$$\begin{aligned}|z+z'|^2 &= (z+z')\overline{(z+z')}\\ &= z\overline{z}+z'\overline{z}+z\overline{z'}+z'\overline{z'}\\ &= |z|^2+2\mathfrak{Re}(z'\overline{z})+|z'|^2\end{aligned}$$

Mais $\mathfrak{Re}(z'\overline{z}) \leqslant |\mathfrak{Re}(z'\overline{z})| \leqslant |z'\overline{z}|$.
On obtient ainsi

$$|z+z'|^2 \leqslant |z|^2+2|z'||\overline{z}|+|z'|^2$$

et donc

$$|z+z'|^2 \leqslant |z|^2+2|z'||z|+|z'|^2$$

D'où enfin

$$|z+z'|^2 \leqslant (|z|+|z'|)^2$$

Les quantités sous les carrés étant positives, on a bien

$$|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$$

- **Cas d'égalité :** la condition suffisante est directe. Pour la condition nécessaire, si $|z+z'| = |z|+|z'|$, les inégalités de la démonstration de l'inégalité triangulaire deviennent des égalités :

$$\mathfrak{Re}(z'\overline{z}) = |\mathfrak{Re}(z'\overline{z})| = |z'\overline{z}|$$

La première égalité nous dit qu l'on doit avoir $\mathfrak{Re}(z'\overline{z}) \geqslant 0$, la deuxième que $z'\overline{z} \in \mathbb{R}$.
On a ainsi $z'\overline{z} \in \mathbb{R}^+$. Alors soit $z=0$, soit ce n'est pas la cas et on a $z' = \dfrac{\mu}{|z|^2}z$.
On a donc bien $\lambda := \dfrac{\mu}{|z|^2} \in \mathbb{R}^+$ tel que $z' = \lambda z$.

- **Inégalité triangulaire inverse :**
On la démontre à l'aide de l'inégalité triangulaire appliquée à $z+z'$ et $-z'$:

$$|(z+z')-z'| \leqslant |z+z'|+|z'|$$

donc

$$|z| \leqslant |z+z'|+|z'|$$

d'où

$$|z|-|z'| \leqslant |z+z'|$$

En échangeant z et z' dans le raisonnement précédent, on obtient similairement

$$|z'|-|z| \leqslant |z+z'|$$

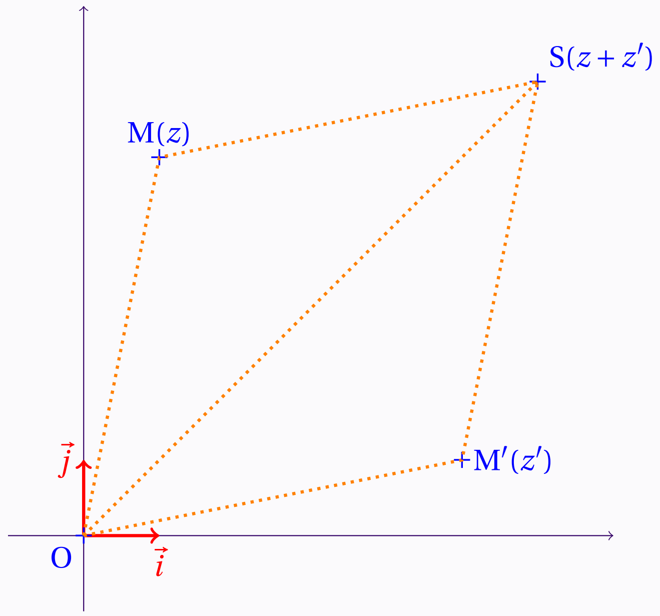
D'où finalement

$$\big||z|-|z'|\big| \leqslant |z+z'| \quad \square$$

Illustration : géométrique

Soit, dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points M, M' et S d'affixe respective z, z' et $z+z'$.

On a alors $OS \leqslant OM + OM'$.



Propriété

Soient $c \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_*^+$. On note C l'image de c dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormal direct.

L'ensemble des images des nombres complexes z tels que

- $|z-c| = r$ *est le cercle de centre C et de rayon r.*
- $|z-c| \leqslant r$ *est le disque fermé de centre C et de rayon r.*
- $|z-c| < r$ *est le disque ouvert de centre C et de rayon r.*

6 Groupe des nombres complexes de module 1

Notation

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Remarque

C'est l'ensemble des affixes des points du cercle de centre O et de rayon 1 appelé **cercle trigonométrique**. Il est parfois également noté $\mathbb{S}^1$.

Propriétés

(i) $\forall z, z' \in \mathbb{U},\ \ z \times z' \in \mathbb{U}$ *(donc $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{U}$).*

(ii) La loi $\times$ est associative sur $\mathbb{U}$.

(iii) La loi $\times$ possède un élément neutre sur $\mathbb{U}$: il s'agit de 1.

(iv) Elle est telle que tout élément a un inverse sur $\mathbb{U}$:

$$\forall z \in \mathbb{U},\ \ \exists z' \in \mathbb{U} \mid z \times z' = 1$$

On note $z' = z^{-1}$: il s'agit de $\dfrac{1}{z}$.

(v) La loi $\times$ est commutative sur $\mathbb{U}$.

Démonstration

Découle des propriétés sur $\mathbb{C}$. □

Corollaire

*Les propriétés (i) à (iv) nous disent que $(\mathbb{U}, \times)$ est un **groupe**. Comme, de plus, (v) est vérifié, le groupe est dit **commutatif** ou **abélien**.*

Remarques

- **R1 –** Comme $(\mathbb{C}^*, \times)$ vérifie les mêmes propriétés, c'est aussi un groupe abélien.
- **R2 –** Comme $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$, on dit que $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
- **R3 –** Par contre, l'ensemble des nombres complexes de module 2 n'est pas en groupe pour $\times$, par exemple (pas stable par produit).

II EXPONENTIELLE COMPLEXE, ARGUMENT

1 Exponentielle d'un imaginaire pur

Notation : Notation d'Euler[1]

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Propriété

(i) $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \quad e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.

(ii) $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Longleftrightarrow \theta \equiv \theta' \; [2\pi] \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = \theta' + 2k\pi$.

Démonstration

(i)
$$\begin{aligned}\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')\end{aligned}$$

(ii) Égalité du sinus et du cosinus. □

Propriété

$$\mathbb{U} = \left\{e^{i\theta} \; ; \; \theta \in \mathbb{R}\right\} = \left\{e^{i\theta} \; ; \; \theta \in [0, 2\pi[\right\}$$

Démonstration

Par double inclusion, $\mathbb{U}$ correspondant aux couples $(\cos\theta, \sin\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. □

1. 

Leonhard Euler (Bâle, 1707 - Saint-Petersbourg 1783) est un scientifique suisse à l'œuvre considérable en astronomie, en sciences physiques et en mathématiques. Il est entre autre à l'origine du concept de fonction qui permis à l'analyse de se développer, de la formule qui porte son nom reliant le nombre de S sommet, A d'arrêtes et F de faces d'un polyèdre convexe : $F - A + S = 2$. Il fit d'importantes découvertes en calcul différentiel et intégral, géométrie et théorie des nombre. On lui doit par exemple la formule $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ou la relation $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. C'est d'ailleurs lui qui introduisit le symbole Σ pour les sommations. Il fût aveugle pendant 12 ans, ce qui ne l'empêcha pas d'être extraordinairement prolifique avec 886 ouvrages réunis en 80 volumes.

Propriétés

(i) $\forall\,\theta\in\mathbb{R},\quad \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$

(ii) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=1\,;\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}=1\,;\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1\,;\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$

(iii) *Si* $k\in\mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{ik\pi}=(-1)^k$.

2 Formules d'Euler et de Moivre

Propriété : Formules d'Euler

Soit $\theta\in\mathbb{R}$. *Alors*

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\quad\text{et}\quad\sin\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

Propriété : Formule de De Moivre[1]

Soient $k\in\mathbb{Z}$ *et* $\theta\in\mathbb{R}$.

$$\left(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\right)^k=\cos k\theta+\mathrm{i}\sin k\theta$$

i.e.

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$$

Démonstration

Par récurrence pour $n\in\mathbb{N}$ puis on en déduit $\mathbb{Z}^-$. $\square$

1. 

Abraham de Moivre (Vitry-le-François, 1667 - Londres, 1754) est un mathématicien français qui travailla sur les écrits de Newton et améliora le calcul différentiel introduit par celui-ci. Ses recherches portèrent sur l'astronomie, la résolution d'équations, les probabilités et statistiques (il établit par exemple la formule $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$), les suites (il trouve entre autre la formule donnant le terme général de la suite de Fibonacci et la mal-nommée formule de Stirling $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$), la trigonométrie : il est célèbre pour la formule $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$.

Calculs à savoir refaire : si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$e^{ix} + e^{iy} = e^{i\frac{x+y}{2}}\left(e^{i\frac{y-x}{2}} + e^{-i\frac{y-x}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{y-x}{2}\right)e^{i\frac{x+y}{2}}$$

$$e^{ix} - e^{iy} = 2i\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)e^{i\frac{x+y}{2}}$$

Cas particulier :

$$1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad\qquad 1 - e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Remarques

R1 – **Calculs de sommes :** $\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kb)$, $\sum_{k=0}^{n}\sin(a+kb)$

R2 – Calcul de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$: on peut utiliser les formules trigonométrique ou la formule de Moivre et le binôme. Par exemple,

$$\cos 2t + i\sin 2t = e^{2it} = (\cos t + i\sin t)^2 = \cos^2 t - \sin^2 t + 2i\sin t\cos t$$

redonne $\cos 2t$ et $\sin 2t$.

R3 – **Linéarisation :** mise sous forme $\sum a_k\sin(k\theta) + \sum b_k\cos(k\theta)$. Si la fonction initiale est paire, il n'y aura que des $\cos$, si elle est impaire, il n'y aura que des $\sin$.

Exemple

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta\cos\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)\\
&= \frac{i}{16}\left(e^{3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}\right)\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\\
&= \frac{i}{16}\left(e^{4i\theta}-3e^{2i\theta}+3-e^{-2i\theta}+e^{2i\theta}-3+3e^{-2i\theta}-e^{-4i\theta}\right)\\
&= \frac{i}{16}(2i\sin(4\theta)-4i\sin(2\theta))\\
&= \frac{1}{4}\sin(2\theta)-\frac{1}{8}\sin(4\theta)
\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser les formules de trigonométrie :

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta\cos\theta = \sin^2\theta\sin\theta\cos\theta &= \frac{1-\cos 2\theta}{2}\frac{\sin 2\theta}{2}\\
&= \frac{1}{4}(\sin 2\theta - \cos 2\theta\sin 2\theta) = \frac{1}{4}\sin 2\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta
\end{aligned}$$

3 Exponentielle d'un nombre complexe

Définition : Exponentielle d'un nombre complexe

Si $z \in \mathbb{C}$, et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x + \mathrm{i}y$, on pose

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

Remarques

- **R1 –** $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}\, z}$ (donc une exponentielle complexe ne s'annule jamais). $\mathfrak{Im}\, z$ est un argument de e^z.
- **R2 –** $\mathfrak{Re}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}\, z} \cos \mathfrak{Im}\, z$ et $\mathfrak{Im}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}\, z} \sin \mathfrak{Im}\, z$.

Propriété

(i) $\exp : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{C},+) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*,\times) \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^z \end{array} \right.$ *morphisme de groupe, i.e.*

$$\forall\, z, z' \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'}$$

(ii) $\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$

(iii) $\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad (\mathrm{e}^z)^k = \mathrm{e}^{kz}$

(iv) *En particulier,* $\forall\, z \in \mathbb{Z}, \quad \dfrac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$

Démonstration

Repasser à la définition et utiliser les propriétés de l'exponentielle réelle et imaginaire pure . □

4 Argument d'un nombre complexe

Propriété : Écriture trigonométrique

Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un nombre réel θ tel que $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, écriture de la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_*^+$.

Définition

θ est appelé un argument de z, noté $\arg z$ uniquement défini modulo 2π.

Parmi les différents arguments possibles celui dans $]-\pi, \pi]$ est appelé argument principal (parfois noté Arg).

Démonstration

Ok si $z = 0$. Sinon $\dfrac{z}{|z|}$ st de module 1. □

Remarques

R 1 – L'écriture $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ s'appelle **écriture trigonométrique** par opposition à **l'écriture cartésienne** ou **algébrique** $z = x + \mathrm{i}y$.

R 2 – « $\arg 0$ » n'est pas défini.

R 3 – Tout argument de z est une mesure de l'angle $\left(\vec{\mathrm{i}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ si M est le point d'affixe z.

Propriété

Soient r, r' deux nombres réels strictement positifs et θ, θ' deux nombres réels,

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' \ [2\pi] \end{cases}$$

En particulier, si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$, r est unique (et vaut $|z|$) et θ est « unique modulo 2π ».

Démonstration

Sens $\Longleftarrow$ facile.
Si $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$, alors $r = \left|re^{i\theta}\right| = \left|r'e^{i\theta'}\right| = r'$ donc $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$, d'où le résultat. □

Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls,

$$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$$

Démonstration

Si θ est un argument de z et θ' un argument de z', $zz' = |zz'|e^{i(\theta+\theta')}$.
De même, $z/z' = |z/z'|e^{i(\theta-\theta')}$. □

Propriété : Équation $e^z = a$

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Les solutions complexes de l'équation $e^z = a$ sont les nombres complexes $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = \ln|a|$ et y est un argument de a.

Remarque

Il n'y a pas une unique solution... C'est la raison pour laquelle il n'existe pas une fonction logarithme définie sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Démonstration

$e^z = a \Longleftrightarrow a = e^x e^{iy}$ i.e. $|a| = e^x$ et $e^{iy} = \dfrac{a}{|a|}$. □

Corollaire

$e^z = e^{z'} \Longleftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

III RACINES DES NOMBRES COMPLEXES ET RÉSOLUTION DE TRINÔMES DU SECOND DEGRÉ

1 Racines carrées des nombres complexes

Définition : Racine carrée

Soit a un nombre complexe. z est une **racine carré** de a si et seulement si $z^2 = a$.

Remarque

⚠ la notation « $\sqrt{a}$ » n'a pas de sens pour un complexe.

Propriété

Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées complexes opposées.
Si a s'écrit $re^{i\theta}$ sous forme trigonométriques, il s'agit de $\pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Démonstration

$$z^2 = a \iff z^2 = \left(\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 \iff \left(z-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)\left(z+\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 0.$$

□

Remarque : Méthode pratique pour déterminer la forme cartésienne des racines

Si $z = a+iy$ où $(a,b \in \mathbb{R})$, le nombre complexe $\alpha + i\beta$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ est une racine carrée de z si et seulement si $\begin{cases} \alpha^2-\beta^2 & = & a \\ 2\alpha\beta & = & b \end{cases}$

Il faut de plus avoir $|z| = |a+iy| = |\alpha+i\beta|^2 = \alpha^2+\beta^2$, d'où

$$\alpha^2 = \frac{|z|+a}{2} \quad \text{et} \quad \beta^2 = \frac{|z|-a}{2}$$

Cela fixe $|\alpha|$ et $|\beta|$. Leurs signes sont donnés par la relation $2\alpha\beta = b$.

Exemple

Calcul des racines de $-3+4\mathrm{i}$, de la forme $\alpha+\mathrm{i}\beta$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$: $|\alpha+\mathrm{i}\beta|^2=\alpha^2+\beta^2=|-3+4\mathrm{i}|=5$ et $\mathfrak{Re}\left((\alpha+\mathrm{i}\beta)^2\right)=\alpha^2-\beta^2=\mathfrak{Re}(-3+4\mathrm{i})=-3$.

Donc $|\alpha|=\sqrt{\dfrac{5-3}{2}}=1$ et $|\beta|=\sqrt{\dfrac{5+3}{2}}=\sqrt{4}=2$.

De plus, $\mathfrak{Im}\left((\alpha+\mathrm{i}\beta)^2\right)=2\alpha\beta=\mathfrak{Im}(-3+4\mathrm{i})=4>0$, α et β sont donc de même signe, et les racines de $-3+4\mathrm{i}$ sont donc $1+2\mathrm{i}$ et $-1-2\mathrm{i}$.

2 Équations du second degré

Théorème

Soit l'équation du second degré, d'inconnue z, $az^2+bz+c=0$ où $a,b,c\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$.

On définit le discriminant de l'équation $\Delta=b^2-4ac$.

On a alors deux cas possibles :

1) *Si $\Delta=0$, il y a une seule solution qui vaut $z_0=-\dfrac{b}{2a}$ et alors $az^2+bz+c=0=a(z-z_0)^2$.*
2) *Si $\Delta\neq 0$, on note δ **une** racine de Δ. Il y a deux solutions distinctes : $z_1=\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et alors $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$.*

Démonstration

$$\begin{aligned}\forall z\in\mathbb{C},\quad az^2+bz+c&=a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)\\&=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]\\&=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\\&=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\delta^2}{4a^2}\right]\\&=a\left(z+\frac{b-\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b+\delta}{2a}\right)\quad\square\end{aligned}$$

Propriété : Relations cœfficients racines

Soient $a,b,c\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$, et z_1,z_2 les racines de az^2+bz+c (éventuellement confondues).

Alors $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ *et* $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

Démonstration

Il suffit d'utiliser les expressions ci-dessus, ou alors d'écrire

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1 z_2$$

et d'invoquer l'unicité des cœfficient d'un polynôme (on verra plus tard que c'est correct dès que l'identité polynomiale est vraie pour plus de valeurs que le degré : une infinité de valeurs de z, ici : tout $\mathbb{C}$!). □

Exemple

Trouver les complexes dont la somme vaut $1 + 3\mathrm{i}$ et le produit vaut $2\mathrm{i} - 2$.

3 Racines $n^{\text{èmes}}$

a Définition

Définition : Racines $n^{\text{èmes}}$

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle **racine $n^{\text{ème}}$** de a tout nombre complexe z tel que $z^n = a$.

b Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Le nombre 1 *a exactement* n *racines* $n^{\text{èmes}}$*, appelées racines* $n^{\text{èmes}}$ *de l'unité. On note* $\mathbb{U}_n$ *leur ensemble, et on a*

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} \;;\; k \in [\![0, n-1]\!] \right\} \subset \mathbb{U}$$

Démonstration

Désignons un nombre complexe z sous sa forme trigonométrique $z = \rho e^{i\varphi}$. Alors

$$z^n = 1 \iff \rho^n e^{in\varphi} = 1e^{i0} \iff \begin{cases} \rho^n &= 1 \quad (\text{car } \rho^n \geqslant 0) \\ n\varphi &\equiv 0 \ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \quad (\text{car } \rho \geqslant 0) \\ \exists\, k \in \mathbb{Z} \mid \varphi = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Donc $z^n = 1 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \mid z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

Notons, pour $k \in \mathbb{Z}$, $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. À quelle condition sur $k, k' \in \mathbb{Z}$ a-t-on $\omega_k = \omega_{k'}$?

$$\omega_k = \omega_{k'} \iff 2\frac{k\pi}{n} \equiv 2\frac{k'\pi}{n} \ [2\pi] \iff \exists\, p \in \mathbb{Z} \mid k = k' + pn$$

Lemme : Division euclidienne (admis)

Si $k \in \mathbb{Z}$, on peut trouver un couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ unique tel que $k = nq + r$ et $0 \leqslant r < n$ (r est appelé reste de la division euclidienne).

Ainsi, si $k \in \mathbb{Z}$, on peut donc trouver $r \in [\![0, n-1]\!]$ et $q \in \mathbb{Z}$ tels que $k = nq + r$, et alors $\omega_k = \omega_r$.

Et donc $\mathbb{U}_n = \{\omega_k \ ; \ k \in \mathbb{Z}\} = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \ ; \ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.

Dernier point : ces derniers sont-ils distincts deux à deux ? Si $w_k = w_{k'}$ avec $k, k' \in [\![0, n-1]\!]$, on peut trouver $p \in \mathbb{Z}$ tel que $k - k' = pn$. Or $k - k' \in]-n, n[$ donc $p = 0$ et on a nécessairement $k' = k$.

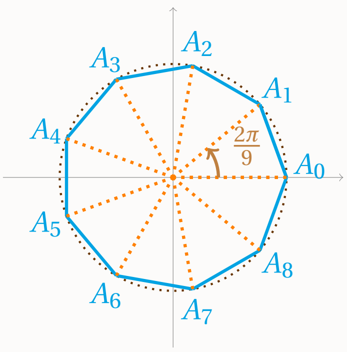
Il y a donc bien exactement n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. □

Remarques

R1 – C'est un sous-groupe de $\mathbb{U}$: si $z, z' \in \mathbb{U}_n$, $z, z' \in \mathbb{U}$, $z \times z' \in \mathbb{U}_n$ et $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$.

R2 – Si $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$, d'après la formule de Moivre.

R3 – Géométriquement, les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité sont les affixes des sommets A_k d'un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle trigonométrique : $\left(\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_{k-1}}\right) = \frac{2\pi}{n}$.



Exemples

E 1 – $\mathbb{U}_1 = \{1\}$.

E 2 – $\mathbb{U}_2 = \{-1; 1\}$.

E 3 – $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ où $j = e^{2i\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Remarquons que $j^2 = \bar{j}$.

ATTENTION : j n'est pas le même qu'en physique (en électricité, on utilise j au lieu du i complexe pour éviter de confondre avec l'intensité électrique).

E 4 – $\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$.

Remarque

Il y a un cycle d'ordre n dans les racines n^e de l'unité.

Par exemple, Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $j^{3k} = 1$, $j^{3k+1} = j$ et $j^{3k+2} = j^2 = \overline{j}$ et on retrouve toutes les racines cubique de l'unité.

Pour i le cycle est d'ordre 4.

Attention, tout de même, cela ne fonctionne pas pour toutes.

On peut montrer que celles pour lesquelles c'est le cas sont de la forme $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec k et n premiers entre eux. On parle de racines primitives de l'unité.

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. La somme des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité est nulle, i.e. $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = 0$.

Démonstration

Si on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega}$ car $\omega \neq 1$.

Et comme $\omega^n = 1$, on a bien $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = 0$. □

Exemple

$1 + j + j^2 = 0$

C Racines n^e d'un nombre complexe

Méthode pour déterminer les racines n^e d'un nombre complexe $a \in \mathbb{C}^*$:

- Trouver une solution particulière z_0 (par exemple, si $a = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $z_0 = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$ convient).
- Se ramener aux racines n^e de l'unité.

$$\begin{aligned} z^n = a \iff z^n = z_0^n &\iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \\ &\iff \exists\, k \in [\![0, n-1]\!] \mid \frac{z}{z_0} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &\iff \exists\, k \in [\![0, n-1]\!] \mid z = z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{aligned}$$

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout nombre complexe a non nul a exactement n racines n^e distinctes.

Remarque

0 n'en a qu'une !

IV Nombres complexes et géométrie plane

On a vu que dans le plan complexe identifié au plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$, muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, un point M est repéré par son affixe z, qui est également l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$. $|z|$ est la distance OM et $\arg z$ une mesure le l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.

1 Premiers résultats

Propriété

Soit M d'affixe $z \in \mathbb{C}$

(i) $M \in (Ox) \iff z \in \mathbb{R}$

(ii) $M \in (Oy) \iff z \in i\mathbb{R}$

(iii) $M \in \mathscr{C}(O, 1) \iff z \in \mathbb{U}$

Propriété

Si M est le point d'affixe z et M' le point d'affixe z', l'affixe de $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$ est $z'-z$ et $\|MM'\| = |z'-z|$.

Démonstration

Si $z' = x' + \mathrm{i}y'$ et $z = x + \mathrm{i}y$, les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$ sont $(x'-x, y'-y)$ et $\left\|\overrightarrow{\mathrm{MM}'}\right\| = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$. □

Propriété

Soit M un point d'affixe $z \in \mathbb{C}$.

(i) Si $t \in \mathbb{C}$ affixe de $\vec{v}$. Le point M_1 d'affixe $z+t$ est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$ de M.

(ii) Le point M_2 d'affixe $\overline{z}$ est l'image de M par la symétrie d'axe $(\mathrm{O}x)$.

(iii) Le point M_3 d'affixe $-\overline{z}$ est l'image de M par la symétrie d'axe $(\mathrm{O}y)$.

(iv) Le point M_4 d'affixe $-z$ est l'image de M par la symétrie de centre O.

Démonstration

(i) $\overrightarrow{\mathrm{MM}_1} = \vec{v}$ □

Propriété

Soient A et B des points du plan d'affixe respective des nombres complexes a et b, et C un point d'affixe c, distinct de A et B.

$\dfrac{c-a}{c-b}$ a pour module $\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}$ et pour argument une mesure de $\left(\overrightarrow{\mathrm{CB}}, \overrightarrow{\mathrm{CA}}\right)$.

Démonstration

Pour le module, c'est direct ; pour l'argument :

$$\arg\frac{c-a}{c-b} = \arg\frac{a-c}{b-c} = \arg(a-c) - \arg(b-c) = \left(\vec{i}, \overrightarrow{\mathrm{CA}}\right) - \left(\vec{i}, \overrightarrow{\mathrm{CB}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{CB}}, \overrightarrow{\mathrm{CA}}\right).$$

□

Corollaire

Les points distincts A, B, C *d'affixes respectives* a, b, c

- *sont alignés si et seulement si* $\dfrac{c-a}{c-b} \in \mathbb{R}$
- *sont tels que* $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$ *si et seulement si* $\dfrac{c-a}{c-b} \in i\mathbb{R}$

Exemples

E1 – Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les points $M_1(z)$, $M_2\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right)$ et $M_3(z^2)$ soient alignés.

C'est le cas ssi $z = 1$ (tous confondus) ou $\dfrac{\frac{1}{\bar{z}} - z}{z^2 - z} \in \mathbb{R}$ $(\star)$. Or

$$(\star) \iff \frac{1-|z|^2}{|z|^2\,(z-1)} \in \mathbb{R} \iff \frac{(1-|z|^2)(\bar{z}-1)}{|z(z-1)|^2} \in \mathbb{R} \iff |z| = 1 \text{ ou } z \in \mathbb{R}.$$

Il s'agit de $\boxed{\mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}.}$

Remarque

On peut faire une démonstration plus géométrique en remarquant que $\dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{z}{|z|^2}$ donc (faire un dessin), si $|z| \neq 1$, M_2 est sur la droite (OM_1). Pour que M_2 soit alignés avec ceux-ci, il faut et il suffit que l'argument de son affixe soit le même que celui de z à π près, i.e. $e^{i\arg z} = \pm e^{i\arg z^2}$, c'est-à-dire $e^{i\arg z} = \pm e^{2i\arg z}$ i.e. $e^{i\arg z} = \pm 1$ ou encore $z \in \mathbb{R}\ldots$

E2 – Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}^*$ tels que, les points $M(z)$ et $M'\left(\dfrac{1}{z}\right)$ sont tels que $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM'}$.

C'est le cas ssi $z^2 \in i\mathbb{R}$ ssi $\mathfrak{Re}\, z^2 = 0$ ssi $x^2 - y^2 = 0$ où $x = \mathfrak{Re}\, z$ et $y = \mathfrak{Re}\, z$.

Il s'agit donc de $\boxed{(1+i)\mathbb{R}^* \cup (1-i)\mathbb{R}^*.}$

Là encore, il est possible de faire une démonstration géométrique.

2 Similitudes

Définition : Rotations, homothétie

- On appelle **rotation** de centre le point Ω et d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$ la transformation du plan qui envoie un point M sur le point

M' tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta \ [2\pi]$.

- On appelle **homothétie** de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ et de centre le point Ω la transformation du plan qui envoie un point M sur le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

Remarques

R1 – La rotation conserve les distances. On dit que c'est une **isométrie**.

R2 – L'homothétie de centre Ω et de rapport k laisse fixe le point Ω (et seulement ce point si $k \neq 1$) et multiplie les distances par $|k|$: c'est une contraction si $|k| < 1$ et une dilatation si $|k| > 1$. On dit que c'est une **similitude**.

Propriété

Soient Ω d'affixe z_0, $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^*$.

- *L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ est*

$$r_{\Omega,\theta}(z) = e^{i\theta}(z - z_0) + z_0.$$

- *L'écriture complexe de l'homothétie de rapport k et de centre Ω est*

$$h_{\Omega,k}(z) = k(z - z_0) + z_0.$$

Démonstration

- $\Omega M' = \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$ a pour mesure θ.
- $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. □

Corollaire

Par composition des propriétés précédentes, l'application $z \mapsto az$ où $a \in \mathbb{C}^*$ est l'écriture complexe la composée de l'homothétie de centre O et de rapport $|a|$ et de la rotation de centre O et d'angle $\arg a$.

Définition

On appelle **similitude du plan** toute application φ du plan telle qu'on puisse trouver $k \in \mathbb{R}^*$ vérifiant

$$\forall\,(\mathrm{M},\mathrm{M}') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\quad \left\|\overrightarrow{\varphi(\mathrm{M})\varphi(\mathrm{M}')}\right\| = k\left\|\overrightarrow{\mathrm{MM}'}\right\|.$$

Remarque

C'est donc dire que φ conserve le rapport des distances.

Propriété

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. L'application $f : z \mapsto az+b$ correspond à une similitude de rapport $|a|$.

Démonstration

Si on note φ l'application du plan correspondant à f, et z et z' sont les affixes de M et M',

$$\varphi(\mathrm{M})\varphi(\mathrm{M}') = \left|f(z)-f(z')\right| = \left|az+b-az'-b\right| = |a|\left|z-z'\right| = |a|\,\mathrm{MM}'. \quad \square$$

Propriété

Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto az+b$.

- *Si $a=1$ et $b=0$, alors $f = \mathrm{id}$;*
- *si $a=1$ et $b \neq 0$, alors f correspond à la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b ;*
- *si $a \neq 1$, il existe un unique point fixé par f i.e. un unique $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $f(z_0) = z_0$, et f est la composée commutative de $r_{\Omega,\arg a}$ correspondant à la rotation de centre $\Omega(z_0)$ et d'angle $\arg a$, et de $h_{\Omega,|a|}$ correspondant à l'homothétie de centre $\Omega(z_0)$ et de rapport $|a|$.*

Démonstration

Dans le troisième cas, $f(z) = z \iff z = \dfrac{b}{a-1} =: z_0$.
Alors $f(z) - z_0 = f(z) - f(z_0) = a(z-z_0)$, donc $f(z) = z_0 + a(z-z_0)$.
Or, si $z \in \mathbb{C}$,

$$r_{\Omega,\arg a}(z) - z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg a}(z-z_0) \;\text{ et }\; h_{\Omega,|a|}(z) - z_0 = |a|\,(z-z_0)$$

donc
$$r_{\Omega,\arg a}\left(h_{\Omega,|a|}(z)\right) = r_{\Omega,\arg a}(z_0 + |a|(z - z_0)) = z_0 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg a}|a|(z - z_0) = f(z)$$
On obtient de même $f = h_{\Omega,|a|} \circ r_{\Omega,\arg a}$. □