Topologie

On se donne $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé fixé, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d la distance associée.

I Ouverts, fermés, voisinages

1 Voisinage

Définition : Voisinage

Soient $a \in E$ et V une partie de E.

On dit que V est un **voisinage** de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset V$, c'est-à-dire qu'il existe une boule ouverte centrée en a contenue dans V.

Propriété

(i) Si V voisinage de a et $V \subset W$, alors W est un voisinage de a.

(ii) Une réunion quelconque de voisinages de a est un voisinage de a.

*(iii) Une intersection **finie** de voisinages de a est un voisinage de a.*

Propriété

Si N_1 est une norme dominée par N_2, alors les voisinages pour N_1 sont des voisinages pour N_2.

Si les normes sont équivalentes, les voisinages pour l'une sont exactement les voisinages pour l'autre.

2 Parties ouvertes

Définition : Ouvert

Une partie $\mathcal{O}$ de E est dite **ouverte** ou **un ouvert** de E lorsque $\mathcal{O}$ est voisinage de tout ses points, autrement dit $\forall a \in \mathcal{O}, \ \exists \varepsilon > 0, \ B(a, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$.

Par convention, $\varnothing$ est ouvert.

Propriété

Toute boule ouverte est ouverte (!)

Propriété

(i) $\varnothing$, E sont ouverts.

(ii) Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte.

*(iii) Une intersection **finie** d'ouverts est ouverte.*

Propriété

Si N_1 est une norme dominée par N_2, alors les ouverts pour N_1 sont des ouverts pour N_2.

Si les normes sont équivalentes, les ouverts pour l'une sont exactement les ouverts pour l'autre.

3 Parties fermées

Définition : Fermé

Une partie F de E est dite fermée lorsque son complémentaire ${}^cF$ est ouvert.

Propriété

Toute boule fermée est fermée (!)

Propriété

(i) $\emptyset$, E *sont fermés.*
(ii) *Une intersection quelconque d'ouverts est ouverte.*
(iii) *Une réunion* ***finie*** *d'ouverts est ouverte.*

Propriété

Toute sphère de E *est fermée.*

Propriété : Caractérisation séquentielle

Une partie F *de* E *est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de* F *a sa limite dans* F.

II Adhérence, densité, intérieur

1 Points adhérents, adhérence

Définition : Point adhérent

Soit A une partie de E et $x \in E$. On dit que x est adhérent à A lorsque $\forall \varepsilon > 0,\ \ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Propriété : Caractérisation séquentielle

x *est adhérent à* A *si et seulement s'il existe une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* A *qui converge vers* x.

Définition : Adhérence

L'adhérence $\overline{A}$ de A est l'ensemble des points adhérents à A.

Propriété

Si $A \subset B$*, alors* $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Propriété : Caractérisation

$\overline{A}$ *est le plus petit fermé contenant* A.

Propriété

F *est un fermé de* E *si et seulement si* $\overline{F} = F$.

Propriété

Si A *est un sous-espace vectoriel de* E*, alors* $\overline{A}$ *l'est aussi.*

2 Densité

Définition : Densité

D est **dense** dans E lorsque $\overline{D} = E$, c'est-à-dire lorsque toute boule ouverte rencontre D.

Propriété : Caractérisation séquentielle

D *est dense dans* E *si et seulement si tout élément de* E *est limite d'une suite d'élément de* D.

3 Intérieur

Définition

Soit A une partie de E, $x \in E$.

x est un **point intérieur** à A lorsque A est un voisinage de x, c'est-à-dire qu'il existe une boule ouverte centrée en x incluse dans A.

L'ensemble des points intérieurs à A est appelé **intérieur** de A, noté $\mathring{A}$.

Propriété

Si $A \subset B$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

Propriété : Caractérisation

$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

Propriété

$\mathcal{O}$ est ouvert si et seulement si $\mathring{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$.

4 Frontière

Définition : Frontière

On appelle **frontière** de A l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

III Ouverts, fermés, voisinages relatifs

On se fixe une partie A non vide de E.

1 Voisinage relatif

Définition

Soit $a \in A$. On appelle **voisinage de a dans** A toute partie V' de A s'écrivant $V' = A \cap V$ où V est un voisinage de a.

2 Ouverts relatifs

Définition

Une partie $\mathcal{O}'$ de A est un **ouvert de** A (ou **pour la topologie induite sur** A) lorsqu'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{O}' = 0 \cap A$.

3 Fermés relatifs

Définition

Une partie F' de A est un fermé **de** A s'il existe une fermé F tel que $F' = F \cap A$.

Propriété

Soit F' une partie de A.

F' fermé de A si et seulement si F' est une partie de A telle que toute suite d'éléments de F' convergeant dans A a sa limite dans F'.

4 Densité

Définition

Soit B partie de A.

B est dense dans A si et seulement si $A \subset \overline{B}$ si et seulement si tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de B.