Calculs algébriques

Extrait du programme officiel :

Ce chapitre a pour but de présenter quelques notations et techniques fondamentales de calcul algébrique.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Sommes et produits	
Somme et produit d'une famille finie de nombres complexes.	Notations $\sum_{i\in I} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i\in I} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.
Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$.	
Factorisation de $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.	
Sommes doubles. Produit de deux sommes finies, sommes triangulaires.	
b) Coefficients binomiaux et formule du binôme	
Factorielle. Coefficients binomiaux.	Notation $\binom{n}{p}$.
Relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.	
Formule et triangle de Pascal.	Lien avec la méthode d'obtention des coefficients binomiaux utilisée en Première (dénombrement de chemins).
Formule du binôme dans $\mathbb{C}$.	
c) Systèmes linéaires	
Système linéaire de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	⇆ PC et SI dans le cas $n = p = 2$. Interprétation géométrique : intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$, de plans dans $\mathbb{R}^3$.
Système homogène associé. ~~Structure de l'ensemble des solutions.~~	
Opérations élémentaires.	Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ($\lambda \neq 0$), $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
Algorithme du pivot.	⇆ I : pour des systèmes de taille $n > 3$ ou $p > 3$, on utilise l'outil informatique.

CONTENUS CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Table des matières

I SOMMATIONS, PRODUITS

1 Notations

Notation : Signes Σ et Π

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie de nombres complexes (i.e. I est fini et $\forall\, i\in I,\quad a_i\in\mathbb{C}$).

On note $\sum\limits_{i\in I} a_i$ la somme des nombres a_i pour i parcourant I.

On note $\prod\limits_{i\in I} a_i$ le produit des nombres a_i pour i parcourant I.

Remarques

R1 – Si $I=\{1,2,\dots,n\}$, $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1+a_2+\cdots+a_n$

R2 – La lettre i est totalement muette : on aurait aussi bien pu la noter k ou p, mais attention à na pas utiliser la même notation que dans les bornes (n ici).

R3 – Par convention, $\sum_{i\in\varnothing} a_i = 0$ et $\prod_{i\in\varnothing} a_i = 1$.

Définition : Factorielle

Soit $n\in\mathbb{N}$, on appelle ***factorielle*** de n le nombre entier

$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1\times 2\times\cdots\times n$ si $n\neq 0$ et $0!=1$

2 Propriétés

Propriété

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles finies de nombres complexes, et $\lambda\in\mathbb{C}$.

(i) $\sum_{i\in I}(a_i+b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$

(ii) $\sum_{i\in I}\lambda a_i = \lambda\sum_{i\in I} a_i$

(iii) $\sum_{i\in I}\lambda = |I|\,\lambda$

(i′) $\prod_{i\in I}(a_i b_i) = \prod_{i\in I} a_i \prod_{i\in I} b_i$

(ii′) $\prod_{i\in I}\lambda = \lambda^{|I|}$

Démonstration

Quitte à réordonner et réindexer les nombres (l'ordre n'est pas important, car la somme et le produit sont commutatifs sur $\mathbb{C}$), on peut supposer $I=[\![1,n]\!]$: $(a_i)_{i\in I}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ et $(b_i)_{i\in I}=(b_1,b_2,\dots,b_n)$, où $n=|I|$.

Les propriétés se démontrent par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, et en utilisant les propriétés de la somme et du produit sur $\mathbb{C}$. Nous allons voir **seulement une idée intuitive** de celles-ci.

(i) L'associativité et la commutativité de la somme nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) &= (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)\\ &= (a_1+a_1+\cdots+a_n)+(b_1+b_1+\cdots+b_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i\end{aligned}$$

(ii) On utilise cette fois la distributivité du produit sur la somme

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\lambda a_i &= \lambda a_1+\lambda a_2+\cdots+\lambda a_n\\ &= \lambda(a_1+a_1+\cdots+a_n)\\ &= \lambda\sum_{i=1}^{n}a_i\end{aligned}$$

(iii) Le cas particulier du point précédent avec $\forall\, i\in[\![1,n]\!],\quad a_i=1$:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda=\underbrace{\lambda+\cdots+\lambda}_{n\text{ fois}}=n\lambda$$

(i') L'associativité et la commutativité du produit nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(a_ib_i) &= (a_1b_1)(a_2b_2)\cdots(a_nb_n)\\ &= (a_1a_1\cdots a_n)(b_1b_1\cdots b_n)\\ &= \prod_{i=1}^{n}a_i\prod_{i=1}^{n}b_i\end{aligned}$$

(ii') $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\lambda=\underbrace{\lambda\cdots\lambda}_{n\text{ fois}}=\lambda^n$ □

3 Changement d'indice

Il peut parfois être bien d'utile d'effectuer des changements d'indices, c'est-à-dire de changer la façon dont les termes d'une somme (ou d'un produit) sont indexés (c'est possible par commutativité) : il faut cependant bien faire attention à ce que l'on utilise bien une et une seulement fois chaque élément (on dira que le changement d'indice est ***bijectif***).

En voici quelques exemples :

Exemples

E1 – Si $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{l=1}^{n+1} \frac{1}{l^2}$.

(Changement d'indice $l = k+1$; $0 \leqslant k \leqslant n \iff 1 \leqslant l = k+1 \leqslant n+1$.)

E2 – Si $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (n-i) = \sum_{k=0}^{n} k$.

(Changement d'indice $k = n-i$; $0 \leqslant k \leqslant n \iff 0 \leqslant k = n-i \leqslant n$.)

4 Simplifications télescopiques

Voyons sur un exemple une manière bien commode de calculer une somme, lorsque les termes s'écrivent sous forme d'une différence d'un terme avec son successeur $a_k - a_{k+1}$ ou $a_{k+1} - a_k$.

Exemple

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

On remarque $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

En effectuant le changement d'indice $j = k+1$ dans la seconde somme, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j}$$

D'où $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.}$

On peut le voir également en "développant" la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

On a évidemment une version produit avec cette fois comme terme général $\frac{a_k}{a_{k+1}}$ ou $\frac{a_{k+1}}{a_k}$.

Exemple

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=n+1.$$

5 Quelques formules à (très) bien connaître

Propriété

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Remarque

Plus généralement, pour une suite arithmétique de terme général $u_k=a+kb$,

$$\sum u_k=\text{nb termes}\times\frac{\text{1er terme}+\text{dernier terme}}{2}.$$

Démonstration

- Preuve inspirée de Gauss[1], 7 ans.
  L'idée est d'écrire, pour $n=100$,

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 0 & + & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 99 & + & 100\\ + & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 1 & + & 0\\ \hline & 100 & + & 100 & + & 100 & + & \cdots & + & 100 & + & 100\end{array}$$

  Soit $S_n=\sum_{k=0}^{n} k$. Alors $2S_n=\sum_{k=0}^{n} k+\sum_{k=0}^{n} k$.
  En effectuant un changement de variable $l=n-k$ dans la deuxième somme, on obtient

$$2S_n=\sum_{k=0}^{n} k+\sum_{l=0}^{n}(n-l)=\sum_{k=0}^{n} k+\sum_{k=0}^{n}(n-k)=\sum_{k=0}^{n}(k+n-k)=\sum_{k=0}^{n} n=n\sum_{k=0}^{n} 1=n(n+1)$$

  Ainsi, $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}.}$
  Autre possibilité : on remarque que $(k+1)^2-k^2=2k+1$. En sommant pour k entre 0 et n, on obtient $(n+1)^2=2\sum_{k=0}^{n} k+(n+1)$, d'où le résultat.
- Pour calculer $\sum_{k=0}^{n} k^2$, on remarque que $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$.

Donc $\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1$.

Or $\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=(n+1)^3-0^3$ par simplification télescopique.

On obtient ainsi $(n+1)^3=3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+n(n+1)$.

$3\sum_{k=0}^{n}k^2=(n+1)\left((n+1)^2-\frac{3}{2}n-1\right)=(n+1)\frac{2n^2+n}{2}$.

Donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

- De manière similaire, $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$. Donc, on sommant pour k entre 0 et n,

$$(n+1)^4=4\sum_{k=0}^{n}k^3+6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\frac{n(n+1)}{2}+n+1$$

d'où

$$4\sum_{k=0}^{n}k^3=(n+1)\left((n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\right)=(n+1)\left(n^3+n^2\right)$$

Ainsi, $\boxed{\sum_{k=0}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$. □

Propriété

Soient $x\in\mathbb{C}$ tel que $\boxed{x\neq 1,}$ $n\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Remarque

Plus généralement, pour une suite géométrique de terme général $u_k=a\times q^k$ avec

1.  **Carl Friedrich Gauss** (Brunswick 1777 - Göttingen 1855) est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Surnommé *le prince des mathématiciens*, il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Gauss était un génie particulièrement précoce : à 7 ans (ou 10 selon les sources), il donne la formule calculant $1+2+\cdots+100$. À 19 ans, il fut le premier à démontrer la loi de réciprocité quadratique. Parmi ses autres prouesses, on peut citer la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre, dans sa thèse en 1799, l'invention de la théorie des congruences, la résolution de problèmes de construction à la règle et au compas... Il est considéré comme le fondateur de la géométrie différentielle.

$q \neq 1$,

$$\sum u_k = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb termes}}}{1-q}.$$

Démonstration

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = 1 - x^{n+1}.$$ □

Remarque

Si $x = 1$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

Propriété

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \end{aligned}$$

Démonstration

Soit en développant le membre de droite, soit on commence par $1 - x^n$ (somme géométrique) puis on factorise par a^n. □

Remarques

- **R1** – Cas particulier de $1 - x^n$.
- **R2** – Si n est impair, $a^n + b^n$.
- **R3** – Factorisation de $a^3 \pm b^3$.

6 Sommes doubles

Propriété

Soit $n_0, n, m_0, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n_0 \leqslant n$ et $m_0 \leqslant m$, et $(a_{i,j})_{\substack{n_0 \leqslant i \leqslant n \\ m_0 \leqslant j \leqslant m}}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{\substack{n_0 \leqslant i \leqslant n \\ m_0 \leqslant j \leqslant m}} a_{i,j} = \sum_{i=n_0}^{n} \left(\sum_{j=m_0}^{m} a_{i,j} \right) = \sum_{j=m_0}^{m} \left(\sum_{i=n_0}^{n} a_{i,j} \right)$$

Démonstration

Toutes ces formules ne sont que des conséquences de la commutativité et de l'associativité de la somme de nombres complexes. On veut sommer tous les nombres $a_{i,j}$: ce qui change, c'est l'ordre dans lequel on somme. Voyons ce qui se passe pour les sommes (cela marche de la même manière pour les produits). Pour cela, on peut représenter les nombres dans un tableau :

i \ j	m_0	m_0+1	$\cdots$	m
n_0	a_{n_0,m_0}	a_{n_0,m_0+1}	$\cdots$	$a_{n_0,m}$
n_0+1	a_{n_0+1,m_0}	a_{n_0+1,m_0+1}	$\cdots$	$a_{n_0+1,m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	a_{n,m_0}	a_{n,m_0+1}	$\cdots$	$a_{n,m}$

- Sommation par lignes

$$\begin{aligned}\sum_{i=n_0}^{n} \left(\sum_{j=m_0}^{m} a_{i,j} \right) =& (a_{n_0,m_0} + a_{n_0,m_0+1} + \cdots + a_{n_0,m}) \\ &+ (a_{n_0+1,m_0} + a_{n_0+1,m_0+1} + \cdots + a_{n_0+1,m}) \\ &+ \cdots + (a_{n,m_0} + a_{n,m_0+1} + \cdots + a_{n,m})\end{aligned}$$

  On somme tous les nombres, ligne par ligne.
- Sommation par colonnes

$$\begin{aligned}\sum_{j=m_0}^{m} \left(\sum_{i=n_0}^{n} a_{i,j} \right) =& (a_{n_0,m_0} + a_{n_0+1,m_0} + \cdots + a_{n,m_0}) \\ &+ (a_{n_0,m_0+1} + a_{n_0+1,m_0+1} + \cdots + a_{n,m_0+1}) \\ &+ \cdots + (a_{n_0,m} + a_{n_0+1,m} + \cdots + a_{n,m})\end{aligned}$$

  On somme tous les nombres, colonne par colonne. □

Exemples

E 1 – $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)^2=\frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$

E 2 – $S=\displaystyle\sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\ 1\leqslant i+j\leqslant n}}(i+j)$: ici, il est plus facile de sommer par diagonales $i+j=$ constante.

$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i+j=k}(i+j)=\sum_{k=1}^{n}\left(k\,\#\{(i,j)\mid i+j=k\}\right)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$

Remarque

⚠ n_0, n ,m_0 et m doivent être indépendants de i et j ! Voici des cas fréquents où il n'y a pas indépendance :

Propriété

Soit $n_0, n\in\mathbb{N}^*$ tels que $n_0\leqslant n$, et $(a_{i,j})_{n_0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{n_0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}a_{i,j}=\sum_{i=n_0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}a_{i,j}\right)=\sum_{j=n_0}^{n}\left(\sum_{i=n_0}^{j}a_{i,j}\right)$$

$$\sum_{n_0\leqslant i<j\leqslant n}a_{i,j}=\sum_{i=n_0}^{n}\left(\sum_{j=i+1}^{n}a_{i,j}\right)=\sum_{j=n_0}^{n}\left(\sum_{i=n_0}^{j-1}a_{i,j}\right)$$

Démonstration

Ici encore, un tableau vaut mieux qu'un long discours.

- Première série : sommation par lignes, puis par colonnes.

i \ j	n_0	n_0+1	$\cdots$	n
n_0	a_{n_0,m_0}	a_{n_0,n_0+1}	$\cdots$	$a_{n_0,n}$
n_0+1		a_{n_0+1,n_0+1}	$\cdots$	$a_{n_0+1,n}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$
n				$a_{n,n}$

- Seconde série : sommation par lignes puis par colonnes

i \ j	n_0	n_0+1	n_0+2	$\cdots$	n
n_0		a_{n_0,n_0+1}	a_{n_0,n_0+1}	$\cdots$	$a_{n_0,n}$
n_0+1			a_{n_0+1,n_0+1}	$\cdots$	$a_{n_0+1,n}$
$\vdots$				$\ddots$	$\vdots$
$n-1$					$a_{n-1,n}$
n					

□

Remarques

R1 – ⚠ Cette fois on ne peut pas inverser directement les deux sommes !

R2 – Pour ne pas se tromper dans les indices :
- Dire que $n_0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, c'est dire que $(n_0 \leqslant i \leqslant n$ et $i \leqslant j \leqslant n)$ ou bien que $(n_0 \leqslant j \leqslant n$ et $n_0 \leqslant i \leqslant j)$;
- Dire que $n_0 \leqslant i < j \leqslant n$, c'est dire que $(n_0 \leqslant i < n$ et $i < j \leqslant n)$ ou bien que $(n_0 < j \leqslant n$ et $n_0 \leqslant i < j)$.

Exemple

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{24}.$$

7 Produits de sommes

Propriété

Soient $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ *et* $(b_j)_{j\in J} \in \mathbb{C}^J$.

$$\sum_{i\in I} a_i \sum_{j\in J} b_j = \sum_{(i,j)\in I\times J} (a_i b_j)$$

Démonstration

Distributivité de $\times$ sur $+$. □

Remarques

R1 – ⚠ : indice muet, mais si $J = I$,

$$\sum_{i\in I} a_i \sum_{j\in I} b_j = \sum_{i\in I} a_i \sum_{i\in I} b_i \neq \sum_{i\in I} a_i b_i$$

Cela ne fonctionne déjà pas avec deux termes si $a, b, a', b' \in \mathbb{C}$ $(a+a')(b+b') \neq ab + a'b'$!

R2 – $\sum_{i\in I} a_i \sum_{j\in I} a_j = \sum_{i,j\in I} a_i a_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)^2 \neq \sum_{i\in I} a_i^2$

R3 – Lorsque l'on multiplie deux polynômes, il est judicieux de sommer par diagonales :

$$\sum_i a_i x^i \times \sum_j b_j x^j = \sum_{i,j} a_i b_j x^{i+j} = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) x^k$$

II Cœfficients binomiaux et formule du binôme

1 definition

Définition : Cœfficients binomiaux

Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $\binom{n}{k}$ (prononcer k parmi n) le nombre de parties à k éléments dans un ensemble qui en contient n.

Remarques

R1 – C'est aussi le nombre de possibilités d'avoir k succès parmi n tirages à pile ou face, comme vous l'avez appris en classe de première en dessinant des arbres.

R2 – $\binom{n}{0} = 1$ car la seule partie à 0 élément est $\varnothing$.

R3 – $\binom{n}{1} = n$ car il y a n parties à un seul élément.

R4 – $\binom{n}{n} = 1$ car il y a une seule partie à n éléments : E.

R5 – Si $k > n$ ou $k < 0$, $\binom{n}{k} = 0$ car il n'y a pas de partie de E qui convienne.

2 Propriétés usuelles

Propriété

Si $k > n$ ou $k < 0$, $\binom{n}{k} = 0$.

Si $0 \leqslant k \leqslant n$, $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}^{k \text{ termes}}}{k!}$.

Démonstration

Ok si $k > n$, admis sinon. □

Propriété

Si $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Démonstration

Lorsque l'on prend une partie à k éléments de E, il reste une partie à $n-k$ éléments de E.

Compter le nombre de parties à k élément revient alors à compter le nombre de supplémentaires de ces parties, i.e. de parties à $n-k$ éléments. D'où le résultat.

Ou alors : avec les factorielles (attention aux cas particuliers). □

Propriété : Formule de Pascal

Si $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Démonstration

Pour choisir k éléments parmi n, l'un d'eux étant noté x, il y a deux cas de figure (disjoints).

Soit on choisit x et $k-1$ autres éléments parmi les $n-1$ autres : il y a $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.

Soit on ne choisit pas x et on choisit donc k éléments parmi les $n-1$ autres : il y a $\binom{n-1}{k}$ possibilités.

Au final, on a $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$ choix possibles. (Il est possible que l'un des deux soit nul : si $k=n$.)

Ou alors : avec les factorielles (attention aux cas particuliers). □

Remarque

Triangle de Pascal

Propriété

Si $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Remarques

R1 – Hors-programme donc à savoir redémontrer.

R2 – Facile à retenir en écrivant, pour $k \neq 0$, sous forme de factorisation,

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

.

Démonstration

On cherche le nombre de couples (x, A) tels que $x \in A \subset B$ avec $|A| = k$ et $|B| = n$. Il s'agit de l'élection du conseil municipal et du maire.

Deux stratégies :

- Soit on choisit d'abord la partie A de B ($\binom{n}{k}$ choix) puis x dans A (k choix) ce qui donne $k\binom{n}{k}$ possibilités.
- Soit on choisit d'abord x dans B (n choix) puis les $k-1$ éléments de $A \setminus \{x\}$ dans $B \setminus \{x\}$ ($\binom{n-1}{k-1}$ choix) ce qui donne $n\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.

Autre preuve : Avec les factorielles (attention aux cas particuliers). □

3 Formule du binôme de Newton

Propriété : Formule du binôme de Newton

Soit a et b deux nombres réels ou complexes et n un entier naturel.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Démonstration

- **Preuve par dénombrement** :

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ fois}}$$

En développant, on obtient des termes de la forme $x_1 x_2 \cdots x_n$ avec $x_i = a$ ou b. Si on veut k termes a, on $\binom{n}{k}$ choix, et le terme vaut $a^k b^{n-k}$ car a et b commutent.

- **Preuve par récurrence** sur n, c'est simple si $n = 0$ ou 1. Si c'est vrai pour $n-1$,

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1} = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k}$$

(associativité, distributivité, a et b commutent, dans la seconde somme)

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k}$$

(changement d'indice $k \mapsto k-1$)

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k}$$

(les termes ajoutés sont nuls)

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) a^k b^{n-k}$$

(associativité, distributivité,

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

(formule de Pascal étendue)

□

Corollaire

Soit $n \in \mathbb{N}$,

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ *si* $n \neq 0$, *1 sinon.*

Remarque

D'où le nombre d'éléments de $\mathscr{P}(E)$ lorsque E contient n éléments...

III Systèmes linéaires, méthode du pivot de Gauss

1 Définition

Définition : Système linéaire

On appelle **système linéaire** sur $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) tout système du type

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array} \right.$$

de n équations à p inconnues $x_1, \ldots, x_p$, de second membre $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ et de cœfficients $(a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{K}^{np}$.

On appelle **matrice augmentée** associée au système la matrice :

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} & b_n \end{array} \right)$$

On appelle **système homogène associé** le système obtenu en annulant les seconds membres de chaque équation.

Remarques

R1 – Dans le cas où il y a deux inconnues, cela revient à prendre l'intersection de n droites du plan (on doit donc trouver une droite, un point, ou rien).

R2 – Dans le cas où il y a trois inconnues, cela revient à prendre l'intersection de n plans de l'espace (on doit donc trouver un plan, une droite, un point, ou rien).

2 Opérations élémentaires

Définition : Opérations élémentaires

On appelle opération élémentaire sur le système linéaire toute :

- **Transposition** de deux lignes L_i et L_j notée $L_i \leftrightarrow L_j$.
- **Transvection** : à une ligne L_i on ajoute λ fois une autre ligne L_j, avec $\lambda \in \mathbb{K}$, notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
- **Dilatation** : on multiplie une ligne L_i par λ, avec $\boxed{\lambda \neq 0,}$ notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

Propriété

Chaque opération élémentaire change un système linéaire en un système équivalent, c'est-à-dire ayant même ensemble de solutions.

Remarque

⚠ Une opération du type $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ n'est possible que si $a \neq 0$, il s'agit de la transvection $L_i \leftarrow L_i + \frac{b}{a} L_j$ puis de la dilatation $L_i \leftarrow aL_i$.

3 Méthode du pivot de Gauss

Définition : Système échelonné, pivot

Un système linéaire est dit **échelonné** si les cœfficients de chaque ligne commence par un nombre strictement croissant de zéros (jusqu'à être éventuellement tous nuls). Le premier cœfficient non nul sur chaque ligne est appelé **pivot**.

Exemples

E1 – $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \boxed{7}x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & \boxed{4}y & + & z & = & 1 \\ & & & & \boxed{5}z & = & 12 \end{array}\right.$ est échelonné (et même triangulaire) avec comme pivots 7, 4 et 5.

E2 – $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \boxed{3}x & + & y & + & 7z & = & 19 \\ & & & & \boxed{2}z & = & 1 \end{array}\right.$ est échelonné avec comme pivots 3, 2.

E3 – $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} \boxed{2}x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & - & 5x_5 & + & x_6 & = & 0 \\ & & \boxed{3}x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & - & 3x_5 & - & 3x_6 & = & 0 \\ & & & & & & \boxed{-4}x_4 & + & x_5 & & & = & 0 \\ & & & & & & & & & & \boxed{6}x_6 & = & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right.$ est échelonné avec comme pivots $2, 3, -4, 6$.

Propriété

Tout système est équivalent à un système échelonné en ligne.

Exemple

$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 5z & = & 12 \\ x & + & 4y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$ est équivalent à $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & + & z & = & 1 \\ & & -5y & + & 3z & = & 10 \\ & & & & -6z & = & -23 \end{array}\right.$ par $L_1 \leftrightarrow L_3$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$.

Méthode du pivot de Gauss

On suppose qu'au moins un cœfficient est non nul dans le système (!)

1. Si tous les cœfficients sont nuls, le système est échelonné, c'est terminé.
2. Sinon, soit j_0 le numéro de la première colonne non nulle : au moins un cœfficients de la j_0^e inconnue (la colonne numéro j_0) n'est pas nul, disons $a_{i_0,j_0} = p \neq 0$, ce sera un pivot [1] : le mettre dans la première ligne grâce à $L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$.

1. On peut montrer qu'informatiquement, le meilleur choix est le plus grand cœfficient non nul en valeur absolue. À la main : c'est sympathique lorsqu'il vaut ± 1 !

3. On annule ensuite tous les cœfficients de la première colonne avec les opérations $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{p} L_1$. On obtient un système de matrice augmentée de la forme

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & \dots & 0 & \boxed{p} & * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * & * \end{array}\right)$$

4. On recommence à l'étape 1 avec les lignes 2 à n.

On obtient finalement un système de matrice augmentée de la forme

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & \boxed{p_1} & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & & b'_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \boxed{p_2} & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & & b'_2 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \boxed{p_r} & * & \dots & * & & b'_r \\ & & & & & & & & & & & & & & & b'_{r+1} \\ & & & & & & & (0) & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & & & & b'_n \end{array}\right)$$

avec $p_1, \dots, p_r$ tous non nuls : ce sont les pivots, et r s'appelle le **rang** du système.

Ce qui donne comme système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} p_1 x_{i_1} & + & \dots & & & & = & b'_1 \\ & & p_2 x_{i_2} & + & \dots & & = & b'_2 \\ & & & & & & \vdots & \\ & & & & p_r x_{i_r} & + \dots & = & b'_r \\ & & & & & 0 & = & b'_{r+1} \\ & & & & & & \vdots & \\ & & & & & 0 & = & b'_n \end{array}\right.$$

Les dernières lignes avec membre de gauche nul s'appellent **relations de compatibilité**. Si elles sont correctes, on dit que le système est **compatible** : il y a des solutions.

On finit alors la résolution en remontant les équations : on exprime x_{i_r}, puis $x_{i_{r-1}}$, etc. jusqu'à x_{i_1} en fonction des $p-r$ autres inconnues. C'est possible car les pivots sont non nuls.

Si $r=p$, il y a une unique solution.

Exemples

E1 – On termine la résolution du système de l'exemple précédent.

E2 – $\begin{cases} x+3y+5z=2 \\ 3x+7y+z=3 \\ 4x+10y+6z=5 \end{cases}$

Remarque

Déterminant pour les systèmes 2x2.

4 Exemple de résolution de système linéaire à paramètre

$$(S_\lambda)\begin{cases} 2x + \lambda y - z = 5 \\ (\lambda-5)x + 3y + 7z = 7 \\ x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$$