Séries numériques et vectorielles

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$., $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non nul de dimension finie.

On pose $p = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.

I Généralités sur les séries vectorielles

1 Sommes partielles, convergence, divergence, somme

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite.

Étudier la **série de terme général** u_n, notée $\sum u_n$, c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \in E$.

S_n est appelée **somme partielle d'ordre** n de la série $\sum u_n$.

$\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque $(S_n)_n$ converge, **divergente** sinon.

Lorsqu'elle est convergente, on appelle **somme de la série** $\sum u_n$ le nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Propriété : Séries géométriques

Si $q \in \mathbb{K}$, la série dite géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Lorsque c'est le cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

2 Correspondance suite et séries

On a déjà vu qu'étudier la série de terme général u_n, c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles. On a alors (avec $S_{-1} = 0$)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = S_n - S_{n-1}}$$

Propriété

*Étudier la suite $(v_n)_n$, c'est étudier la série $\sum(v_n - v_{n-1})$ (en posant $v_{-1} = 0$) appelée **série télescopique**.*

Corollaire

Soit $(v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La suite (v_n) et la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ ont même nature et, si elles sont convergentes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0.$$

3 Espace vectoriel des séries convergentes

Propriété

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum(u_n + \lambda v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Propriété

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^{p} u_n^{(k)} e_k$.

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la série $\sum u_n^{(k)}$ converge. Lorsque c'est le cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} \right) e_k.$$

Corollaire

Si $\sum u_n$ est une série à termes complexe, elle converge si et seulement si les séries $\sum \mathfrak{Re}\, u_n$ et $\sum \mathfrak{Im}\, u_n$ convergent, et on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Re}\, u_n + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Im}\, u_n$$

4 Condition nécessaire de convergence, divergence grossière

Propriété : Divergence grossière

Si $u_n \not\to 0_E$, alors $\sum u_n$ diverge. On parle de ***divergence grossière****.*

⚠ *La réciproque est fausse !*

Si $u_n \to 0_E$, ***ON NE PEUT RIEN DIRE*** *sur la convergence de $\sum u_n$.*

5 Reste d'une série convergente

Définition

Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On appelle **reste d'ordre n de la série** $\sum u_n$ le nombre $R_n = S - S_n$ qui n'a un sens que si la série converge.

Propriété

Avec les mêmes hypothèses, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k$.

Propriété

Soit $\sum u_n$ une série ***convergente*** *et R_n son reste d'ordre n, alors $R_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.*

6 Séries alternées

Théorème : Critère Spécial sur des Séries Alternées

Si $u = (u_n)_n$ est une suite ***réelle*** *telle que*

H1 *u décroissante*

H2 $u_n \to 0$

alors $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.

De plus, si on note $v_n = (-1)^n u_n$,
- *La somme S a le même signe que $v_0 = u - 0$.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n, R_n, a le même signe que v_{n+1} et vérifie $|R_n| \leqslant |v_{n+1}| = u_{n+1}$.*

II Séries à termes réels positifs

Les résultats de cette partie sont valables pour des séries à terme général réel positif. Cependant, l'étude étant asymptotique, ils s'appliquent plus généralement pour des séries à terme général positif à partir d'un certain rang.

Dans le cas où le terme général, est de signe constant (à partir d'un certain rang), on se ramène à un terme général positif quitte à étudier $\sum(-u_n)$ si le signe est négatif.

1 Critères de convergence

Propriété

Soit (u_n) suite ***réelle positive****, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors*

(i) *(S_n) est croissante*

(ii) *(S_n) à une limite finie ou $+\infty$.*

(iii) *$\sum u_n$ converge si et seulement si (S_n) est majorée.*

2 Comparaisons de termes généraux réels positifs

Théorème : Comparaison des séries à termes réels positifs : cas de convergence

*Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes réels positifs**.*
Si $\sum v_n$ converge et que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

- $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, • $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, • apcr $u_n \leqslant v_n$, • $u_n \sim v_n$

alors $\sum u_n$ converge.

Corollaire : Comparaison des séries à termes positifs : cas de divergence

*Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**.*
Si $\sum u_n$ diverge et que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

- $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, • $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, • apcr $u_n \leqslant v_n$, • $u_n \sim v_n$

alors $\sum v_n$ diverge.

3 Comparaison série-intégrale

a Comparaison et caractérisation de convergence

Propriété : Comparaison série-intégrale d'une fonction décroissante

Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ décroît et est continue par morceaux alors

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \ f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)$$

On a alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

et

$$\int_p^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=p}^{n} f(k) \leqslant \int_{p-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

si f est continue par morceaux sur $[p-1, n]$.

Propriété

*Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ décroissante, **positive** et continue par morceaux alors*

(i) $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge.

(ii) Si $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$, alors $\sum w_n$ converge.

b Séries de Riemann

Théorème : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Longleftrightarrow \alpha > 1$$

c Évaluation des sommes partielles et des restes

4 Formule de Striling

Théorème : Formule de Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

5 Critère de d'Alembert

Propriété : Critère de d'Alembert

*Soit (u_n) suite **à termes réels strictement positifs** tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in [0, +\infty].$$

- *Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
- *Si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire en général (cas douteux).*

III CONVERGENCE ABSOLUE

Définition

Une série $\sum u_n$ à valeur dans E est dite **absolument convergente** lorsque $\sum \|u_n\|$ converge.

Théorème : En dimension finie, convergence absolue ⇒ convergence

Si E est de dimension finie et si $\sum u_n$ converge absolument (donc si $\sum \|u_n\|$ converge), alors $\sum u_n$ converge.
La réciproque est fausse.

Propriété

Si $\sum u_n$ est absolument convergente, $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$.

IV SOMMATION DES RELATIONS COMPARAISON

1 Cas de divergence

Théorème

*Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **diverge**.*

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

(i) Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors $S_n = \mathrm{O}(\Sigma_n)$.

(ii) Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $S_n = \mathrm{o}(\Sigma_n)$.

(iii) Si $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $u_n \sim v_n$, alors $S_n \sim \Sigma_n$.

2 Cas de convergence

Théorème

*Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **converge**.*

On note, sous réserve d'existence, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

(i) Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \mathrm{O}(\rho_n)$.

(ii) Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \mathrm{o}(\rho_n)$.

(iii) Si $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n \sim \rho_n$.

V DES SÉRIES CLASSIQUES

1 Séries de Bertrand

Méthode : Séries de Bertrand

Il s'agit des séries de terme général $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geqslant 0$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Hors programme, mais très classique.

Intuitivement, le terme en ln n'a pas une grande influence, donc le comportement correspond à celui d'une série de Riemann, sauf dans le cas limite où $\alpha = 1$, dans lequel le terme en ln peut permettre d'accélérer la convergence du terme général vers 0 et rendre la série convergente à condition que $\beta > 1$.

On montre donc que $\boxed{\text{la série converge si et seulement si } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)}$.

- Si $\alpha < 0$ ou si $\alpha = 0$ et $\beta \leqslant 0$, il y a divergence grossière.
- Si $\alpha < 1$ (englobe le cas précédent), ou si $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$, $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geqslant \frac{1}{n}$ à partir d'un certain rang et $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge.
- Si $\alpha > 1$, avec $\gamma \in]1, \alpha[$, $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ et donc par comparaison de termes généraux positifs et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ étant convergente, $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge.
- Si $\alpha = 1$ et $\beta > 0$, on obtient la nature de la série à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

2 Série exponentielle

Soit $(\mathscr{A},+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie munie d'une norme sous-multiplicative, c'est-à-dire telle que

$$\forall\, a,b \in \mathscr{A},\quad \|a\times b\| \leqslant \|a\|\,\|b\|\,.$$

Propriété

Pour tout $a \in \mathscr{A}$, la série de terme général $\frac{1}{n!}a^n$ est convergente.

Définition : Exponentielle

Si $a \in \mathscr{A}$, on pose $\exp a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} a^n$ appelé **exponentielle de** a.

3 Série géométrique

On se donne toujours $(\mathscr{A},+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie munie d'une norme telle que

$$\forall\, a,b \in \mathscr{A},\quad \|a\times b\| \leqslant \|a\|\,\|b\|\,.$$

Propriété

Si $a \in \mathscr{A}$ et $\|a\| < 1$, alors la série de terme général a^n converge.

VI Produit de Cauchy

Définition : Produit de Cauchy

Soient $u,v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.
La série de terme général w_n est appelée **produit de Cauchy** de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Théorème

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors $\sum w_n$ l'est aussi. De plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.