Équations différentielles linéaires

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Notion d'équation différentielle linéaire du premier ordre : $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
Résolution d'une équation homogène.	
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	$\leftrightarrows$ PC : régime libre, régime forcé ; régime transitoire, régime établi.
Principe de superposition.	
Méthode de la variation de la constante.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	$\leftrightarrows$ PC et SI : modélisation de circuits électriques RC, RL ou de systèmes mécaniques linéaires.
Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Notion d'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants : $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	Équation homogène associée.
Résolution de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A,\lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B,\omega) \in \mathbb{R}^2$. $\leftrightarrows$ PC : régime libre, régime forcé ; régime transitoire, régime établi.
Principe de superposition.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme. $\leftrightarrows$ PC et SI : modélisation des circuits électriques LC, RLC et de systèmes mécaniques linéaires.

Table des matières

I Équations différentielles du premier ordre

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. D est une partie de $\mathbb{R}$ qui s'écrit comme une réunion quelconque d'intervalles.

1 Définitions

Définition

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** (EDL_1) toute équation du type

$$(L)\ \forall x \in D,\quad \alpha(x) f'(x) + \beta(x) f(x) = \gamma(x)$$

où α, β, γ sont des fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, d'inconnue $f : D \to \mathbb{K}$ dérivable sur D. On note cette équation

$$(L)\quad \alpha(x) y' + \beta(x) y = \gamma(x).$$

Résoudre ou **intégrer** (L), c'est en trouver toutes les solutions.

Une courbe représentative de solution de (L) est appelée **courbe intégrale de** (L).

L'équation

$$(H)\ \alpha(x) y' + \beta(x) y = 0$$

est appelée **équation homogène associée à** (L).

La résolution d'un problème du type

$$\begin{cases} \forall\, x \in D, \quad \alpha(x) f'(x) + \beta(x) f(x) = \gamma(x) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

avec $x_0 \in D$ et y_0 fixé est appelé **problème de Cauchy**[1].

Remarque

La notation $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$ vient du fait que l'on peut l'écrire sous la forme $F(x, y, y') = 0$ où x, y, y' sont trois variables indépendantes. f est solution si et seulement si pour tout x, $F\big(x, f(x), f'(x)\big) = 0$. Dans cette notation, y et y' ne représentent pas des fonctions !

Toute la théorie sera valable sur des $\boxed{\text{intervalles } I}$ sur lesquelles $\boxed{\alpha \text{ ne s'annule pas}}$ et sur lesquels $\boxed{\alpha, \beta, \gamma \text{ sont continues.}}$ On se ramène alors a une équation, dite **normalisée**, du type

$$(L) \quad y' + a(x)y = b(x)$$

avec $a = \dfrac{\beta}{\alpha}$ et $b = \dfrac{\gamma}{\alpha}$. L'équation homogène associée est $(H) \quad y' + a(x)y = 0$.

2 Résolution de l'équation homogène

Propriété

Soit (H) $y' + a(x)y = 0$ avec a continue sur I.
L'ensemble des solutions de (H) est

$$S_H = \left\{ f : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-A(x)} \end{array} \right. , \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

*où A désigne **une** primitive de a ($A(x) = \int a(x)\mathrm{d}x$.)*

Démonstration

- **Première méthode** : On pose $g :\ x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{A(x)}$ donc $f = g\mathrm{e}^{-A}$ et montre que f est solution ssi g est constante.

$$f \text{ solution de } (H) \Longleftrightarrow (g' - ag)\mathrm{e}^{-A} + ag\mathrm{e}^{-A} \equiv 0 \Longleftrightarrow g'\mathrm{e}^{-A} \equiv 0 \Longleftrightarrow g' \equiv 0$$

car pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z \neq 0$ (car $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}\, z}$ ou bien $\mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{-z} = 1$). Le fait qu'on soit sur un **intervalle**

1.  **Augustin-Louis Cauchy** (Baron) (Paris, 1789 - Sceaux (Hauts-de-Seine), 1857) est le mathématicien français le plus prolifique (presque 800 articles publiés). Il enseigne à l'École Polytechnique, le premier cours d'analyse rigoureux ne se basant plus simplement sur l'intuition (limites, continuité, etc.). Ses travaux sur les permutations furent précurseurs de la théorie des groupes. Ses autres contributions comprennent des recherches sur la convergence et la divergence des séries infinies, les équations différentielles, les déterminants, les probabilités, l'analyse complexe et la physique mathématique.

permet de conclure.

- **Deuxième méthode** : avec un facteur intégrant :

$$f'+af=0 \underset{e^A \text{ jamais nul}}{\iff} (f'+af)e^A=0 \iff \left(ye^A\right)'=0 \iff fe^A \text{ constant}$$

car on est sur un intervalle. □

Remarques

R1 – Les solutions sont donc toutes proportionnelles à une solution, si $f_0=\exp(-A)$, $S_H=\{\lambda f_0, \lambda \in \mathbb{K}\}$: on dit que S_H est une droite vectorielle.

R2 – La fonction nulle est toujours solution.

R3 – Vu la forme des solutions, une solution de (H) sur un tel intervalle I est soit toujours nulle, soit jamais nulle.

R4 – Si l'équation est sous la forme $\alpha y'+\beta y=0$, les solutions sont les $\lambda e^{-\int \frac{\beta}{\alpha}}$.

R5 – Si $x_0 \in I$, on peut écrire les solutions sous la forme $x \mapsto \lambda e^{-\int_{x_0}^x a(t)\mathrm{d}t}$. Alors il est clair que la problème de Cauchy (H) et $f(x_0)=y_0$ admet une unique solution, il s'agit de $x \mapsto y_0 e^{-\int_{x_0}^x a(t)\mathrm{d}t}$. Cela nous dit en particulier que les courbes intégrales ne se croisent pas sur I. On généralisera plus loin pour une équation avec second membre.

R6 – Le physicien écrirait $\dfrac{y'}{y}=-a$ donc, en intégrant, $\ln|y|=-A+c$ donc $y=\pm e^c e^{-A}=\lambda e^{-A}$.

Correct ? Problème :
- y pourrait s'annuler. Mais on vient de voir que soit on est tout le temps nul, soit on ne l'est jamais.
- Ensuite le $|y|$: par continuité, comme y ne s'annule jamais, elle est de signe constant.

Donc pourquoi pas, mais pénible à justifier.

Cependant, c'est un bon moyen de retrouver la formule !

Corollaire : Cas du cœfficient constant

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

Les solutions de $y'=\alpha y$ sont les fonctions $f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda e^{\alpha x} \end{array}$ *pour $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Le problème de Cauchy $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & f'(x)=\alpha f(x) \\ f(0)=1 \end{cases}$ *admet pour unique solution $x \mapsto e^{\alpha x}$.*

Exemples

E1 – (H) $y'=xy$. Puisque $x \mapsto -x$ continue sur $\mathbb{R}$, on résout bien sur $\mathbb{R}$.

Comme $\displaystyle\int x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+C$, l'ensemble des solutions de (H) est

$$S_H=\left\{ f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda e^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}, \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

Courbes intégrales : $(f'(0)=0,\ f'(1)=f(1),\ f'(2)=2f(2))$

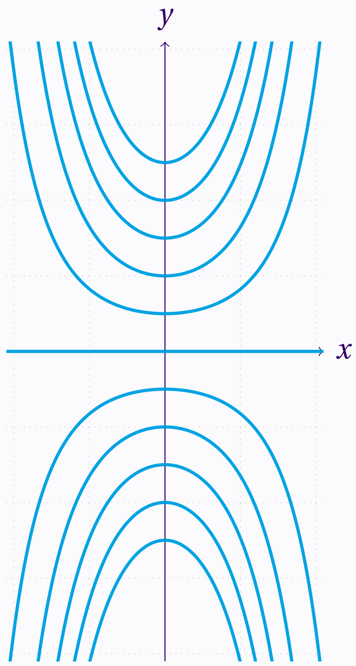

FIGURE 1 – Courbes intégrales de $y' = xy$

E2 – $(H)\ \forall x \in I,\ \ (x-1)y' + xy = 0$ se ramène à $y' + \dfrac{x}{x-1}y = 0$.

On résout sur $I = I_k$ pour $k = 1$ ou 2 avec $I_1 =]1, +\infty[$ et $I_2 =]-\infty, 1[$.

$x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ continue sur I_k. $\displaystyle\int \frac{x}{x-1}\,\mathrm{d}x = x + \ln|x-1| + C$ sur I_k.

f solution de (H) sur I_k

si et seulement si $\exists \lambda_k \in \mathbb{K},\ \ \forall x \in I_k,\ \ f(x) = \lambda_k \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{|x-1|}$

si et seulement si $\exists \mu_k \in \mathbb{K},\ \ \forall x \in I_k,\ \ f(x) = \mu_k \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x-1}$ car $x-1$ ne change pas de signe sur I_k.

Les solutions sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ sont donc les $x \mapsto \begin{cases} \mu_1 \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \mu_2 \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x-1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Y a-t-il des solution sur $\mathbb{R}$?

Analyse : si c'est le cas, la continuité en 1 impose $\mu_1 = \mu_2 = 0$. On n'a pas besoin d'étudier la dérivabilité en 1 ici.

Synthèse : la fonction nulle est bien solution sur $\mathbb{R}$, et c'est donc la seule.

3 Équations avec second membre

a Structure de l'ensemble des solutions

Théorème

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, a, b des fonctions définies sur D, (L) $y' + a(x)y = b(x)$, S_L l'ensemble de ses solutions, (H) l'équation homogène associée est S_H l'ensemble de ses solutions.

Si f_0 est solution (particulière) de (L), alors

$$f \in S_L \iff f - f_0 \in S_H$$

soit

$$S_L = \{f_0 + h,\ h \in S_H\} = f_0 + S_H.$$

Démonstration

$$f \in S_L \iff f' + af = b = f_0' + af_0 \iff (f - f_0)' + a(f - f_0) = 0$$ □

Remarque

Lorsque S_L n'est pas vide (ce sera toujours le cas avec les hypothèses habituelles sur a, b), on dit que c'est une droite affine de direction la droite vectorielle S_H.

Pour résoudre (L), il suffit donc de trouver **une** solution de (L) après avoir résolu (H). Comment faire ?

- Soit il y a une solution évidente,
- soit on utilise les techniques suivantes.

b Principe de superposition

Propriété

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, a, b définies sur I avec $b(x) = \alpha_1 b_1(x) + \cdots + \alpha_n b_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k(x)$ où les α_k sont des scalaires et les b_k des fonctions.

Si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est une solution particulière de (L_k) $y' + a(x)y = b_k(x)$, alors $f_0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$ est solution de (L) $y' + a(x)y = b(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$.

Démonstration

$$f_0' + af_0 = \sum \alpha_k (f_k' + af_k) = \sum \alpha_k b_k = b.$$ □

c Méthode de variation de la constante

Comment trouver une solution particulière dans le cas général ? Exactement comme pour résoudre l'équation homogène, avec le facteur intégrant :

$$f' + af = b \iff f'e^A + afe^A = be^A \iff (fe^A)' = be^A \iff f = \left(\int be^A\right)e^{-A}$$

Les solutions sont donc à chercher sous la forme $f(x) = g(x)e^{-A(x)}$.

Propriété

*Avec les hypothèses habituelles, on peut trouver une solutions particulières de la forme $x \mapsto g(x)e^{-A(x)}$. C'est la **méthode de variation de la constante** (à partir de la solution générale de l'équation homogène.)*

Remarques

R1 – Les termes en g doivent se simplifier en traduisant que $x \mapsto g(x)e^{-A(x)}$ est solution. Il ne doit rester que du g'. (car e^{-A} est solution de (H)).

R2 – On obtient en fait toutes les solutions en primitivant g' avec la constante d'intégration.

Exemples

E1 – Résoudre $y' - y = x^2e^x$. Les solutions sont les $x \mapsto \left(\lambda + \dfrac{x^3}{3}\right)e^x$.

E2 – $y' - y = \cos x$ a comme solutions $x \mapsto \lambda e^x + \dfrac{\sin x - \cos x}{2}$.

E3 – Résoudre $xy' + y = x$. Sur $I_1 = \mathbb{R}_+^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_-^*$, en reconnaissant la dérivée d'un produit, $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{C_k}{x}$. Raccord en 0 : $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ est la seule solution définie en 0.

E4 – Résoudre $xy' - y = x$. Sur $I_1 = \mathbb{R}_+^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_-^*$, en reconnaissant la dérivée d'un quotient, $f(x) = x\ln|x| + C_kx$. Raccord en 0 : pas de solution.

d Existence et unicité de la solution au problème de Cauchy

Propriété

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a, b des fonctions continues sur I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} (L)\ \forall x \in I,\ \ f'(x) + a(x)f(x) = b(x) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$ *admet une unique solution sur I.*

Par tout point de coordonnées $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ passe une et une seule courbe intégrale.
En particulier, les courbes intégrales ne se croisent jamais sur I.

Démonstration

Les solutions sont de la forme $\lambda \mathrm{e}^{-A} + f_0$, et valent y_0 en x_0 si et seulement si

$$\lambda = \left(y_0 - f_0(x_0)\right) \mathrm{e}^{A(x_0)}.$$

□

e Applications en sciences physiques

Régime libre : Équation homogène $\tau \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0$ ou $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{y}{\tau} = 0$ avec $\tau > 0$ homogène à un temps (dit de relaxation).

Solutions en $y(t) = \lambda \mathrm{e}^{-t/\tau}$ ($\to 0$ en $+\infty$)

Régime forcé : Avec second membre : $\tau \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = b(t)$. Cas particuliers :

- Si b est constant, solutions en $y(t) = b + \lambda \mathrm{e}^{-t/\tau} \to b$ en $+\infty$: état d'équilibre, atteint plus rapidement si τ est petit.

Exemples

E1 – Échange thermique :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -r(T - T_{env}) \Longrightarrow T = T_{env} + (T_0 - T_{env})\mathrm{e}^{-rt}$$

E2 – Charge de condensateur :

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = U \Longrightarrow q = UC + (q_0 - UC)\mathrm{e}^{-t/RC}$$

E3 – Chute libre d'un corps :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\alpha v - mg \Longrightarrow v = \left(v_0 + \frac{mg}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{-\alpha t/m} - \frac{mg}{\alpha}$$

(α cœfficient de frottements)

- Si $\tau \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = A\cos(\omega t)$, on trouve des solutions de la forme $y(t) = B\cos(\omega t + \varphi) + \lambda \mathrm{e}^{-t/\tau}$.
  - ⋆ Si $t \to \infty$: régime sinusoïdal de même fréquence avec un déphasage de φ (**régime permanent**)
  - ⋆ Avant de l'atteindre : **régime transitoire**.

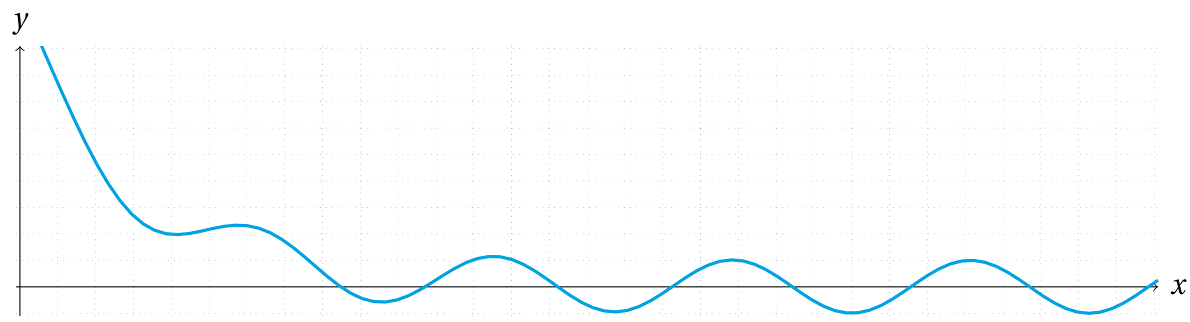

FIGURE 2 – Graphe de la fonction $t \mapsto \cos t + 10\mathrm{e}^{-t/3}$

II ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

1 Définitions

Définition

On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre** (EDL_2) toute équation du type

$$(L)\ \forall x \in D,\quad \alpha(x) f''(x) + \beta(x) f'(x) + \gamma(x) f(x) = \delta(x)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, d'inconnue $f : D \to \mathbb{K}$ dérivable sur D. On note cette équation $(L)\ \ \alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y = \delta(x)$.

Résoudre ou **intégrer** (L), c'est en trouver toutes les solutions. Une courbe représentative de solution de (L) est appelée **courbe intégrale de** (L).

L'équation $(H)\ \alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y = 0$ est appelée **équation homogène associée à** (L)**.**

La résolution d'un problème du type

$$\begin{cases} \forall x \in D,\quad \alpha(x) f'(x) + \beta(x) f'(x) + \gamma(x) f(x) = \delta(x) \\ f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

avec $x_0 \in D$ et y_0, y'_0 fixé est appelé **problème de Cauchy**.

Seules sont au programmes les EDL_2 à cœfficients constants, de type

$$(L)\ \ ay'' + by' + cy = \delta(x)$$

avec $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et δ continue. L'équation homogène associée est

$$(H)\ \ ay'' + by' + cy = 0$$

2 Résolution de l'équation homogène

Pour les EDL_1, les solutions sont naturellement apparues sous forme exponentielle.
Posons-nous la questions : quelles sont les $x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$ solutions ici ?
Réponse : $ar^2 + br + c = 0$.

Définition

$ar^2 + br + c = 0$ est l'**équation caractéristique** associée à (L).

Propriété

Soit (E) $ar^2 + br + c = 0$ *équation caractéristique associée à* (H) $ay'' + by' + cy = 0$ *avec* $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$.

(i) *Si* (E) *possède deux solutions distinctes* $r_1, r_2 \in \mathbb{K}$.

$$S_H = \left\{ f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \end{array} \right. ; (A, B) \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

(ii) *Si* (E) *possède une solution double* $r \in \mathbb{K}$.

$$S_H = \left\{ f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & (A + Bx)e^{rx} \end{array} \right. ; (A, B) \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

(iii) *Pour* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *si* (E) *ne possède pas de solution dans* $\mathbb{R}$, *il y a deux solutions complexes conjuguées* $\alpha \pm i\omega \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} S_H &= \left\{ f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))e^{\alpha x} \end{array} \right. ; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A\cos(\omega x + \varphi)e^{\alpha x} \end{array} \right. ; (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\} \end{aligned}$$

Remarque

Solutions d'une EDL_2 homogène = combinaisons linéaires de 2 fonctions non colinéaires (proportionnelles). On parle de plan vectoriel. Si on a deux solutions non colinéaires, alors les solutions sont les combinaisons linéaires de ces deux fonctions. Par exemple, Les solutions de $y'' = y$ sont les fonctions $A\,\mathrm{ch} + B\,\mathrm{sh}$.

Démonstration

Si r est une racine de (E), soit $g(x) = f(x)e^{-rx}$.
Alors $ag'' = -(2ar + b)g'$.

- Si $\Delta = 0$, $g'' = 0$ d'où le résultat.
- Si $\Delta \neq 0$ et $r = r_2$, on a $A, B \in \mathbb{C}$ tel que pour tout x,

$$g(x) = Ae^{-(2r_2 + b/a)x} + B = Ae^{(r_1 - r_2)x} + B$$

d'où le résultat.

(iii) D'après le résultat dans $\mathbb{C}$, $f(x) = (A_1 + iA_2)e^{\alpha + i\omega x} + (B_1 + iB_2)e^{\alpha - i\omega x}$.

Mais $f(x) = \mathfrak{Re}(f(x)) = ((A_1 + B_1)\cos(\omega x) + (B_2 - A_2)\sin(\omega x))\,e^{\alpha x}$ avec $A_1 + B_1$ et $B_2 - A_2$ qui décrivent tous les réels.

Réciproque facile. $\square$

Exemple

$y'' - y' + (1+\mathrm{i})y = 0 : x \mapsto A\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + B\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}$.

3 Applications en sciences physiques

Équations du type

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y = 0$$

avec $\lambda \geqslant 0$ en général (cœfficient de dissipation/frottement).

- Si $\lambda^2 > \omega_0^2$, $y(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(A\mathrm{e}^{\alpha t} + B\mathrm{e}^{-\alpha t}\right)$ avec $\alpha = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$: **régime apériodique**.
- Si $\lambda^2 = \omega_0^2$, $y(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}(At + B)$: **régime critique**.
- Si $\lambda^2 < \omega_0^2$, $y(t) = A\mathrm{e}^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$: **régime pseudo-périodique**.

Cas particulier : $\lambda = 0$: $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 y = 0$.
$y(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$: **régime périodique**.

4 Équations avec second membre

a Structure de l'ensemble des solutions

Théorème

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{K}$ et δ définie sur D, (L) $ay'' + by' + cy = \delta(x)$, S_L l'ensemble de ses solutions, (H) l'équation homogène associée est S_H l'ensemble de ses solutions.

Si f_0 est solution (particulière) de (L), alors

$$f \in S_L \Longleftrightarrow f - f_0 \in S_H$$

soit

$$S_L = \{f_0 + f,\ f \in S_H\} = f_0 + S_H.$$

Démonstration

Comme à l'ordre 1. □

Remarque

Lorsque S_L n'est pas vide (ce sera toujours le cas avec les hypothèses habituelles sur a, b, c, δ), on dit que c'est un plan affine de direction la plan vectoriel S_H.

Pour résoudre (L), il suffit donc de trouver **une** solution de (L) après avoir résolu (H). Comment faire ?

- Soit il y a une solution évidente,
- soit on utilise les techniques suivantes.

b Principe de superposition

Propriété

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, $a,b,c \in \mathbb{K}$, δ définie sur D avec $\delta = \sum_{k=1}^{n} d_k\delta_k$ où les d_k sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, f_k est une solution particulière de $ay''+by'+cy=\delta_k(x)$, alors $f_0 = \sum_{k=1}^{n} d_k f_k$ est solution de (L) $ay''+by'+cy=\delta(x) = \sum_{k=1}^{n} d_k\delta_k(x)$.

Démonstration

Comme à l'ordre 1. □

c Cas de quelques seconds membres simples

Pas de méthode de variation des constantes au programme, mais il faut savoir trouver une solution particulière lorsque le second membre est simple.

- S'il est constant, c'est facile.
- S'il est sous forme exponentielle :

Propriété

Une EDL$_2$ de la forme $ay''+by'+cy = A\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $A,\lambda \in \mathbb{K}$ admet $\boxed{\text{une}}$ solution de la forme $x \mapsto Cx^k\mathrm{e}^{\lambda x}$ où k est l'ordre de λ comme racine de l'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$ (0, 1 ou 2, donc.)

Démonstration

Posons $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{-\lambda x}$ soit $f(x) = g(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$.
Après simplifications, on obtient f solution si et seulement si

$$ag''+(2a\lambda+b)g'+(a\lambda^2+b\lambda+c)g = A.$$

- Si λ n'est pas racine de (E), $g = \dfrac{A}{a\lambda^2+b\lambda+c} = C$ convient.
- Si λ est racine simple de (E), on obtient que f est solution si et seulement si g' est solution de $ay'+(2a\lambda+b)y = A$. $g' = \dfrac{1}{2a\lambda+b} = C$ convient, ce qui peut s'intégrer en $g(x) = Cx(+0)$.
- Si λ est racine double de (E), on obtient que f est solution si et seulement si g est solution de $ag'' = A$. $g'' = \frac{A}{a} = C$ convient. Et en intégrant deux fois avec des constantes d'intégration nulles, on obtient $g(x) = Cx^2$. □

Remarque

Le résultat s'adapte si le second membre est de la forme $P(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ où P polynôme avec une solution de la forme $x \mapsto Q(x)x^k\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $\deg Q = \deg P$.

Exemple

$y'' - 4y' + 3y = \operatorname{sh} x : x \mapsto -\frac{e^{-x}}{16} - \frac{xe^{x}}{4} + Ae^{x} + Be^{3x}.$

- S'il est sous forme d'un sinus ou d'un cosinus : pour une EDL_2 de la forme $ay''+by'+cy = B\cos(\omega x)$ ou $B\sin(\omega x)$ avec $a, b, c, B, \omega \in \mathbb{R}$, on se ramène au cas des exponentielles en écrivant

$$\cos(\omega x) = \mathfrak{Re}\left(e^{i\omega x}\right) \text{ et } \sin(\omega x) = \mathfrak{Im}\left(e^{i\omega x}\right).$$

On a facilement que si f est solution de $ay'' + by' + cy = Be^{i\omega x}$, alors, comme $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont solution de $ay'' + by' + cy = B\cos(\omega x)$ et $ay'' + by' + cy = B\sin(\omega x)$.
On trouvera donc $\boxed{\text{une}}$ solution de la forme

$$x \mapsto x^k (C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x))$$

où k est l'ordre de $\lambda = i\omega$ comme racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ (0, 1 ou 2, donc.)

Remarque

Si $a, b, c \in \mathbb{C}$, on peut aussi passer par les formules d'Euler : $\cos(\omega x) = \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}$ et $\sin(\omega x) = \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}$ et utiliser le principe de superposition.

Exemple

$y'' + y = \sin^3 x : x \mapsto \frac{\sin 3x}{32} + \left(A - \frac{3x}{8}\right)\cos x + B\sin x.$

- Quand le second membre est polynomial : on cherche une solution polynomiale en commençant par trouver le terme de plus haut degré.

Exemple

$y'' + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2 : x \mapsto 2 + 3x + 5x^2 + Ae^{2x} + Be^{-3x}.$

d Existence et unicité de la solution au problème de Cauchy

Propriété

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, δ continue sur I, $x_0 \in I$ et $y_0, y'_0 \in \mathbb{K}$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} (L)\ \forall x \in I, \\ \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \delta(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$ *admet une unique solution sur I.*

Démonstration

Lemme

Une système de deux équations à deux inconnues admet une unique solution si et seulement si son déterminant est non nul.

On admet l'existence d'une solution particulière.

On sait que les solutions de (L) sont de la forme $f_0 + Af_1 + Bf_2$ où f_0 solutions de (L) et f_1, f_2 solutions indépendantes de (H) déterminées avec l'équation caractéristique.

Le système devient équivalent à $\begin{cases} Af_1(x_0) + Bf_2(x_0) = y_0 - f_0(x_0) \\ Af_1'(x_0) + Bf_2'(x_0) = y_0 - f_0'(x_0) \end{cases}$ d'inconnue (A, B).

Le déterminant du système est $f_1(x_0)f_2'(x_0) - f_1'(x_0)f_2(x_0)$. On vérifie que dans tous les cas de figure, il est non nul :

$$\big(f_1(x), f_2(x)\big) \in \left\{\big(\mathrm{e}^{r_1 x}, \mathrm{e}^{r_2 x}\big), \big(\mathrm{e}^{rx}, x\mathrm{e}^{rx}\big), \big(\cos(\omega x)\mathrm{e}^{\alpha x}, \sin(\omega x)\mathrm{e}^{\alpha x}\big)\right\}. \quad \square$$