Calculs de primitives

Extrait du programme officiel :

Le point de vue adopté dans ce chapitre est principalement pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre des techniques de l'analyse.

Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul différentiel ou intégral utilisées sont différées à un chapitre ultérieur. Cette appropriation en deux temps est destinée à faciliter les apprentissages.

Les objectifs de formation sont les suivants :
- *le calcul de primitives ;*
- *la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable ;*

Les étudiants doivent connaître les principales techniques de calcul et savoir les mettre en pratique sur des cas simples.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. Les étudiants doivent savoir utiliser les primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour calculer celles de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$. ⇆ PC et SI : cinématique.
Primitives des fonctions puissances, trigonométriques et hyperboliques, exponentielle, logarithme, $$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $$x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Dérivée de $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ où f est continue.	Résultat admis à ce stade.
Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.	
Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.	
Intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Changement de variable : si φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors pour tous a et b dans I $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt.$$	On définit à cette occasion la classe $\mathscr{C}^1$. Application au calcul de primitives.

Table des matières

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Primitives et intégrales

Définition : Primitive

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I. On dit que F est une primitive de f sur I lorsque

- F est dérivable sur I,
- $F' = f$.

Théorème

*Soit $f : I \to \mathbb{K}$, F, G deux primitives de f sur I, avec I **intervalle**.*
Alors on a $C \in \mathbb{K}$ tel que $\forall\, x \in I,\quad F(x) = G(x) + C$.

Définition : Classe $\mathscr{C}^1$

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ où I intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que f **de classe $\mathscr{C}^1$ sur** I lorsque f est dérivable sur I et f' est continue sur I.

Remarque

On a facilement que toute somme, produit, combinaison linéaire, composée, quotient par une fonction qui ne s'annule pas de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ l'est encore.

Théorème : Théorème fondamental du calcul intégro-différentiel

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f continue sur I, $a \in I$.

Alors $F : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ *est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

Corollaire

Soit f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, F une primitive de f sur I, $a, b \in I$.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

II CALCUL DE PRIMITIVES ET D'INTÉGRALES

1 Calculs directs

On utilisera la notation suivante pour désigner les primitives d'une fonction continue f sur un intervalle : $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

⚠C'est une notation à constante près, c'est-à-dire que si F est une primitive de f sur un intervalle I, $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ où $C \in \mathbb{K}$.

Exemples

E1 – $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$ pour $C \in \mathbb{R}$ sur l'**intervalle** $\mathbb{R}$.

Il est bien entendu indispensable de connaître ses primitives usuelles (cf formulaire).

On reconnaît souvent une forme $u' \times v'(u)$ qui s'intègre en $v \circ u$ (voir aussi le changement de variable ci-après.

Exemples

E1 – $\displaystyle\int \sin(2x-3)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x-3)+C$ pour $C\in\mathbb{R}$ sur l'**intervalle** $\mathbb{R}$.

E2 – $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C_k$ pour $C_k\in\mathbb{R}$ sur l'**intervalle** $I_k = \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi,\right[$ pour $k\in\mathbb{Z}$.

E3 – $\displaystyle\int_0^3 t\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}(t^2+1)^{3/2}\right]_0^3 = \frac{10\sqrt{10}-1}{3}$.

E4 – $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \ln(\mathrm{e}^x+1)+C$ pour $C\in\mathbb{R}$ sur l'**intervalle** $\mathbb{R}$. On en déduit $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = x-\ln(\mathrm{e}^x+1)+C$.

E5 – $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln^2 t\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$.

E6 – $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|\ln x| + C_k$ pour $C_k\in\mathbb{R}$ ($k=1$ ou 2) sur l'**intervalle** $I_1 =]0,1[$ ou $I_2 =]1,+\infty[$.

On peut parfois passer par les complexes : par définition, la partie réelle (imaginaire) de la primitive est la primitive de la partie réelle (imaginaire).

Exemples

E1 – $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\cos x+\sin x)\mathrm{e}^x + C$ pour $C\in\mathbb{R}$ sur l'**intervalle** $\mathbb{R}$.

Remarque

On peut aussi directement cherche une primitive sous la forme $\mathrm{e}^x(a\cos x + b\sin x)$.

2 L'intégration par parties

Théorème

Si u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I, alors $\int uv' = uv - \int u'v$.

Si $a,b\in I$, $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration

On écrit simplement $\int(uv'+u'v) = \int(uv)' = uv(+C)$. □

a Élimination d'une fonction dont la dérivée est plus simple

Comme les fonctions $\ln, \mathrm{Arccos}, \mathrm{Arcsin}, \mathrm{Arctan}$, etc.

Exemples

E1 – Sur $\mathbb{R}_*^+$, $\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$.

E2 – Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int x \,\mathrm{Arctan}\, x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x^2+1)\,\mathrm{Arctan}\, x - \frac{x}{2} + C$.

E3 – Sur $\mathbb{R}_*^+$, $\displaystyle\int \ln^2 x \,\mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$.

E4 – $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

b Abaissement du degré, formule de récurrence

Exemples

E1 – $\displaystyle\int x^3 \sin x \,\mathrm{d}x = -x^3\cos x + 3x^2 \sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C$ sur $\mathbb{R}$.

E2 – $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)\mathrm{e}^x + C$ pour $C \in \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

E3 – $\displaystyle\int x\mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(x(\cos x + \sin x) - \sin x) + C$ sur $\mathbb{R}$.

E4 – $\displaystyle F_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}$.

$\displaystyle F_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n}F_n(x) + \frac{x}{2n(1+x^2)^n}$ $\left(1 = 1 + t^2 - t^2 \text{ et } t^2 = \frac{t}{2} \times 2t\right)$.

E5 – **Intégrales de Wallis** : $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$.

Grâce à $\sin^2 = 1 - \cos^2$ et une intégration par parties, si $n \geqslant 2$, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

3 Le changement de variable

Théorème

Si f est continue sur I et $\varphi : J \to I$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J, on peut faire le changement de variable $x = \varphi(t)$:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si $a, b \in J$,

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

⚠ Bien changer les bornes quand il y en a !!
On écrit formellement « $x = \varphi(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t.$ ».
Deux utilisations sont possibles.

a On veut calculer $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

C'est en fait le cas où on reconnaît une forme $\varphi' \times f \circ \varphi$.

Exemples

E1 – Sur $\mathbb{R}$, $F(t) = \int \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t$. On pose $x = \cos t$, alors « $\mathrm{d}x = -\sin t\mathrm{d}t$ » et

$$F(t) = -\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = -\mathrm{Arctan}\, x + C = -\mathrm{Arctan}(\cos t) + C.$$

E2 – $\int_1^2 \frac{x}{(2x^2+3)^3}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4}\frac{1}{(2t+3)^2}\right]_1^4$. Pratique : pas besoin de revenir à x ici !

b On veut calculer $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

Dans ce cas, il faut écrire $x = \varphi(t)$ avec φ de classe $\mathscr{C}^1$. Mais attention, si on fait un calcul de primitive, il faudra choisir φ **bijective** pour pouvoir à la fin du calcul revenir de t à x ($t = \varphi^{-1}(x)$). Si c'est un calcul d'intégrale avec des bornes, φ n'a pas besoin d'être bijective !

Exemples

E1 – $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{Arcsin}\, x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$ sur $[-1,1]$ ($x = \sin t$).

E2 – $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \mathrm{ch}^2\, t\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(x = \mathrm{sh}\, t)$.
α tel que $\mathrm{sh}\,\alpha = 1$ alors $\mathrm{ch}\,\alpha = \sqrt{2}$ et $\mathrm{e}^{\alpha} = 1+\sqrt{2}$.
On peut aussi pose $x = \tan t$.

E3 – $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{t}{2} + \frac{\mathrm{ch}\, t\,\mathrm{sh}\, t}{2}\right]_0^{\ln(2+\sqrt{3})} = \sqrt{3} - \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{2}$ $(x = \mathrm{ch}\, t)$
$\displaystyle\int_{-2}^{-1} \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \ldots$ $(x = -t)$.

Comment déterminer un bon changement de variable ? Pas toujours facile, mais voici quelques tuyaux pour y parvenir.

4 Les fonctions rationnelles

Parfois, un simple changement de variable, ou des astuces du type $+1-1$ permettent de calculer les primitives.

Exemples

E1 – $\dfrac{x^3}{1+x^4}$ avec $t = x^2$ (Y penser en général pour les fractions **impaires**) ou même mieux : $t = x^4$.

E2 – $\dfrac{x^{11}}{2+x^6}$ avec $t = x^6$.

E3 – $\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

Si ce n'est pas possible de simplifier « à vue », l'idée est de se ramener à des fractions simples pour utiliser, si $a \in \mathbb{R}$, sur $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)(t-a)^{n-1}} + C \text{ si } n \neq 1 \quad \text{et} \quad \int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \ln|t-a| + C.$$

Pour se faire on procède à ce qu'on appelle une **décomposition en éléments simples**. Elles seront étudiées plus tard dans l'année. Le principe est le suivant : on s'arrange pour que le degré du numérateur soit inférieur à celui du dénominateur (division polynomiale). Puis on factorise le dénominateur. Enfin, on écrit la fraction comme une somme de fractions plus simples, du type ci-dessus avec la règle suivante : un facteur $(x-a)^n$ au dénominateur donne des termes $\dfrac{\alpha_1}{x-a} + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{(x-a)^n}$ où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des constantes à déterminer.

Exemples

E1 – On veut primitiver $f(x) = \dfrac{x^4 - x^3 - x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$. On commence par poser la division :

$$x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = (x^3 - x^2 - x + 1)x + 1$$

donc $f(x) = x + \dfrac{1}{x^3 - x^2 - x + 1}$. Mais 1 est racine de $x^3 - x^2 - x + 1$, donc

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1).$$

On cherche donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$ et on trouve $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$ et $c = \frac{1}{4}$.

Il ne reste plus qu'à intégrer, sur $I_1 =]-\infty, -1[$ ou $I_2 =]-1, 1[$ ou $I_3 =]1, +\infty[$:

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int x + \frac{1/2}{(x-1)^2} - \frac{1/4}{x-1} + \frac{1/4}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{\ln|x-1|}{4} + \frac{\ln|x+1|}{4} + C.$

Il y a un autre cas à traiter : c'est celui pour lequel on obtient un facteur $ax^2 + bx + c$ au dénominateur sans racine réelle : cela donne dans la décomposition un terme en $\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$, qui se primitive en ln et Arctan comme dans l'exemple ci-après :

Exemples

E1 – Sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3/2(2x+1) + 1/2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1/2)^2 + 3/4}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{2}{3}\int \frac{1}{(2x/\sqrt{3} + 1/\sqrt{3})^2 + 1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

5 Les fonctions trigonométriques

Si on veut intégrer une fonctions polynomiale en $\cos x$ et $\sin x$, le plus simple est de linéariser. Cependant, si on a un terme en $\sin^p x \cos^q x$ avec p ou q impair, on peut poster $t = \cos x$ si q est impair et $t = \sin x$ si p est impaire en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Exemples

E1 – Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

E2 – Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int \cos^3 x \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$.

Si on veut intégrer une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$, on applique les règles de Bioche :

Propriété : Règles de Bioche

Si $f(x)\mathrm{d}x$ est invariant par

- $x \mapsto -x$, *on pose* $t = \cos x$;
- $x \mapsto \pi - x$, *on pose* $t = \sin x$;
- $x \mapsto \pi + x$, *on pose* $t = \tan x$;
- *Sinon, on pose* $t = \tan \frac{x}{2}$.

Exemples

E1 – $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin^2 x + 2\sin x - 3\ln(2+\sin x) + C$.

E2 – $\displaystyle\int \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\tan\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + C_k$ sur $I_k = \left](2k-1)\pi, (2k+1)\pi\right[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

6 Les fonctions hyperboliques

Pour les fonctions faisant intervenir ch, sh, th et exp, on peut poser $t = \mathrm{e}^x$ ($\mathrm{ch}\, x = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right)$, $\mathrm{sh}\, x = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right)$, $\mathrm{th}\, x = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.)

Si l'on a une fraction rationnelle en ch, sh, th, il est plus efficace d'appliquer un changement de variable obtenu grâce aux règles de Bioche appliquées à la fraction rationnelle dans laquelle on aura remplacé mentalement ch, sh, th par cos, sin, tan respectivement.

Exemples

E1 – Sur $I_1 = \mathbb{R}_*^+$ ou $I_2 = \mathbb{R}_-^*$, $\displaystyle\int \frac{e^x}{\operatorname{sh} x}\,dx = \ln\left|e^{2x}-1\right| + C_k$ en posant $t = e^x$. On peut aussi écrire $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$ et intégrer en $x + \ln|\operatorname{sh} x| + C_k$ (et c'est bien la même chose !)

E2 – Sur $I_1 = \mathbb{R}_*^+$ ou $I_2 = \mathbb{R}_-^*$, $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x}\,dx = -\frac{1}{\operatorname{sh}(x)} - 2\operatorname{Arctan}(e^x) + C_k$.

7 Les fonctions avec radical

- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ (x et $\sqrt{ax+b}$ en particulier), on pose $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

Exemples

E1 – Sur $I_1 =]-3,+\infty[$, ou $I_2 =]-\infty,-3[$, $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{2+x}}\,dx = x + \frac{3}{4}(2+x)\sqrt[3]{2+x} + C_k$.

E2 – Sur $I_1 =]-\infty,-1[$ ou $I_2 =]-1,+\infty[$, en posant $t = \sqrt[3]{2+x}$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx = \frac{3}{4}\ln\left|\sqrt[3]{2+x}-1\right| + \frac{9}{8}\ln\left(\sqrt[3]{2+x}^2 + \sqrt[3]{2+x}+2\right) + \frac{3}{4\sqrt{7}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2\sqrt[3]{2+x}+1}{\sqrt{7}}\right) + C_k.$$

- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ($a \neq 0$), il faut mettre ce dernier sous forme canonique pour obtenir du $\sqrt{\pm(\alpha x+\beta)^2 \pm 1}$ puis poser $t = \alpha x + \beta$. Ensuite, pour :
  - ⋆ $\sqrt{t^2+1}$ on pose $t = \operatorname{sh} u$ ($\operatorname{sh}^2 + 1 = \operatorname{ch}^2$) ou $t = \tan u$ ($1+\tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$, attention à l'intervalle dans ce cas là.)
  - ⋆ $\sqrt{t^2-1}$ on pose $t = \pm\operatorname{ch} u$ suivant le signe de t. ($\operatorname{ch}^2 - 1 = \operatorname{sh}^2$.)
  - ⋆ $\sqrt{1-t^2}$ on pose $t = \sin u$ ou $t = \cos u$ ($1-\cos^2 = \sin^2$ et $1-\sin^2 = \cos^2$.)

Exemples

E1 – Sur $]1,2[$, $\displaystyle\int \frac{1}{(3x-x^2-2)^{3/2}}\,dx = \frac{4x-6}{\sqrt{3x-x^2-2}} + C$.