Calculs en analyse

Extrait du programme officiel :

Le point de vue adopté dans ce chapitre est principalement pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre des techniques de l'analyse, en particulier celles de majoration. Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul différentiel ou intégral utilisées sont différées à un chapitre ultérieur. Cette appropriation en deux temps est destinée à faciliter les apprentissages.

Les objectifs de formation sont les suivants :

- *une bonne maîtrise des automatismes et du vocabulaire de base relatifs aux inégalités ;*
- *l'introduction de fonctions pour établir des inégalités ;*
- *la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu ;*
- *le calcul de dérivées ;*

Les étudiants doivent connaître les principales techniques de calcul et savoir les mettre en pratique sur des cas simples.

A - Inégalités dans $\mathbb{R}$

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients.
Parties positive et négative d'un réel. Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	Notations x^+, x^-.
Intervalles de $\mathbb{R}$.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $\|x-a\| \leqslant b$.
Parties majorées, minorées, bornées. Majorant, minorant ; maximum, minimum.	

B - Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Graphes des fonctions $x \mapsto f(x)+a$, $x \mapsto f(x+a)$, $x \mapsto f(a-x)$, $x \mapsto f(ax)$, $x \mapsto af(x)$. Résolution graphique d'équations et d'inéquations du type $f(x)=\lambda$ et $f(x) \geqslant \lambda$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés.
Somme, produit, composée.	
Monotonie (large et stricte).	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. Une fonction f est bornée si et seulement si $\|f\|$ est majorée.

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Dérivation	
Équation de la tangente en un point.	
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont admis à ce stade. ⇆ SI : étude cinématique. ⇆ PC : exemples de calculs de dérivées partielles. À ce stade, toute théorie sur les fonctions de plusieurs variables est hors programme.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.	Résultats admis à ce stade. Les étudiants doivent savoir introduire des fonctions pour établir des inégalités.
Tableau de variation.	
Graphe d'une réciproque.	
Dérivée d'une réciproque.	Interprétation géométrique de la dérivabilité et du calcul de la dérivée d'une bijection réciproque.
Dérivées d'ordre supérieur.	
c) Étude d'une fonction	
Détermination des symétries et des périodicités afin de réduire le domaine d'étude, tableau de variations, asymptotes verticales et horizontales, tracé du graphe.	Application à la recherche d'extremums et à l'obtention d'inégalités.
d) Fonctions usuelles	
Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variation et graphe. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. ⇆ SI : logarithme décimal pour la représentation des diagrammes de Bode.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.	
Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	
Fonctions sinus, cosinus, tangente.	⇆ PC et SI.
Fonctions circulaires réciproques.	Notations Arcsin, Arccos, Arctan.
Fonctions hyperboliques.	Notations sh, ch, th. Seule relation de trigonométrie hyperbolique exigible : $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$. Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.
e) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle	
Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.	La dérivée est définie par ses parties réelle et imaginaire.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.	Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.
Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	⇆ PC et SI : électrocinétique.

TABLE DES MATIÈRES

I INÉGALITÉS DANS $\mathbb{R}$

1 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Nous disposons sur $\mathbb{R}$ de la relation $\leqslant$ appelée relation d'ordre, permettant de comparer deux nombres réels. Elle a le bon goût d'être compatible avec les opérations :

Propriété

Pour tous $x, y, u \in \mathbb{R}$,

$$x \leqslant y \Longrightarrow x + u \leqslant y + u.$$

Si, de plus, $0 \leqslant u$,

$$x \leqslant y \Longrightarrow xu \leqslant yu.$$

Remarques

- **R1 –** En particulier, si $x \leqslant y$ et $u \leqslant v$, alors $x + u \leqslant y + v$. (car $x + u \leqslant y + u \leqslant y + v$.)
- **R2 –** De même, si $0 \leqslant x \leqslant y$ et $0 \leqslant u \leqslant v$, $xu \leqslant yv$.
- **R3 –** Mais attention, on ne peut pas soustraire deux inégalités : $1 \leqslant 2$ et $3 \leqslant 4$, mais $1 - 2 = -1 > 2 - 4 = -2$.
- **R4 –** Si $x \leqslant y$, $-y \leqslant -x$ (pourquoi ?) et plus généralement si $u \leqslant 0$, $uy \leqslant ux$.
- **R5 –** Si $0 < x \leqslant y$ ou $x \leqslant y < 0$, $\dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}$ (pourquoi ?), mais si $x < 0 < y$, $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$ (pourquoi ?).
- **R6 –** On ne peut pas quotienter deux inégalités : $1 \leqslant 2$ et $2 \leqslant 5$, mais $\dfrac{1}{2} > \dfrac{2}{5}$.

2 Parties positives et négatives, valeur absolue

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **partie positive** de x le réel $x^+ = \max(x, 0) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On appelle **partie négative** de x le réel $x^- = \max(-x, 0) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On appelle **valeur absolue** d'un réel x, le réel $|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$

Propriétés

Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) $x^+ \geqslant 0$, $x^- \geqslant 0$, $|x| \geqslant 0$,

(ii) $x = x^+ \iff x \geqslant 0 \iff x = |x|$

(iii) $x = x^+ - x^-$

(iv) $|x| = x^+ + x^-$

(v) $x^+ = \dfrac{|x| + x}{2}$

(vi) $x^- = \dfrac{|x| - x}{2}$

(vii) *Plus généralement,*
$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$
$$\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

(viii) $|xy| = |x||y|$ *et si* $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

(ix) $x \leqslant |x|$, $-x \leqslant |x|$.

Remarque

$|x - a|$ s'interpréte sur la droite réelle comme la distance entre x et a. Donc $|x - a| \leqslant b$ est équivalent à $a - b \leqslant x \leqslant a + b$.

Propriété

Soit x *et* M *deux réels avec* $M \geqslant 0$.

(i) $|x| \leqslant M$ *si et seulement si* $-M \leqslant x \leqslant M$

(ii) $|x| \geqslant M$ *si et seulement si* $x \leqslant -M$ *ou* $x \geqslant M$

(On a les relations similaires en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.)

Propriété : Inégalité triangulaire

Soient x *et* y *deux nombres réels.*
Alors
$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|$$

Cas d'égalité :

$$|x + y| = |x| + |y| \iff x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(y)$$

3 Intervalles

Définition

Il y a neuf types d'intervalles réels :

- Les fermés non bornés : $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$
- Les ouverts non bornés : $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$
- L'ouvert-fermé non borné : $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$
- Les segments = fermés-bornés : $[a, b]$
- Les ouverts bornés : $]a, b[$ (en particulier $\varnothing$)
- Les semi-ouverts bornés : $]a, b]$, $[a, b[$

Remarques

R1 – $[a,b]=\{a+t(b-a),\ t\in[0,1]\}=\{(1-t)a+tb,\ t\in[0,1]\}$ (permet de généraliser à autre chose que $\mathbb{R}$.)

R2 – L'**intérieur** $\mathring{I}$ est l'intervalle ouvert correspondant à I (bornes exclues).
L'**adhérence** $\overline{I}$ (ce n'est pas un complémentaire !) est l'intervalle fermé correspondant à I (bornes incluses).

Par exemple, si $I=[0,2[$, $\mathring{I}=]0,2[$ et $\overline{I}=[0,2]$. Si $J=[0,+\infty[$...

4 Majorant, minorant, minimum, maximum

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
Lorsque l'on a $M\in\mathbb{R}$ (resp. $m\in\mathbb{R}$) tel que $\forall\, x\in A,\ \ x\leqslant M$ (resp. $m\leqslant x$), on dit que A est **majorée** (resp. **minorée**).
Un tel M (resp. m) est alors appelé **majorant** (resp. **minorant**) de A.
Lorsque A est à la fois majorée et minorée, on dit qu'elle est **bornée**.

Remarque

Il n'y pas unicité du majorant ou du minorant lorsqu'il existe !

Propriété

A est bornée si et seulement s'il existe $K\in\mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, x\in A,\ \ |x|\leqslant K$.

Définition

Lorsqu'il existe, on appelle **maximum** (resp. **minimum**) d'une partie A de $\mathbb{R}$ le plus grand (resp. petit) élément de A, c'est-à-dire un $a\in A$ tel que $\forall\, x\in A,\ \ x\leqslant a$ (resp. $a\leqslant x$).

Remarques

R1 – Lorsqu'il existe, il est unique. (pourquoi ?)

R2 – Il s'agit du seul majorant (resp. minorant) se trouvant lui-même dans A.

Exemple

Sur des intervalles...

II FONCTIONS NUMÉRIQUES (RÉELLES OU COMPLEXES) D'UNE VARIABLE RÉELLE

1 Généralités sur les fonctions

Définition

L'**ensemble de définition** d'une fonction f est l'ensemble des x pour lesquels $f(x)$ a bien un sens. On le note souvent $\mathscr{D}_f$.

La **représentation graphique** (ou **graphe**) d'une fonction f à valeurs réelles est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ pour x dans l'ensemble de définition de f. On la note souvent Γ_f ou $\mathscr{C}_f$.

Remarque

Pour déterminer le domaine de définition, toujours commencer par les fonctions les plus internes.

Exemple

Domaine de définition de $f : x \mapsto \dfrac{\ln\sqrt{3x+7}}{4-x^2}$.

Effet sur le graphe de transformations : (à illustrer par des courbes)

- $\boxed{f_1 : x \mapsto f(x)+a}$: $(x,y) \in \mathscr{C}_f \iff y = f(x) \iff y+a = f_1(x) \iff (x, y+a) \in \mathscr{C}_{f_1}$.
  Le graphe de f_1 se déduit de celui de f par une translation verticale d'amplitude a.

- $\boxed{f_2 : x \mapsto f(x+a)}$: $(x,y) \in \mathscr{C}_f \iff y = f(x) \iff y = f_2(x-a) \iff (x-a, y) \in \mathscr{C}_{f_2}$.
  Le graphe de f_2 se déduit de celui de f par une translation horizontale d'amplitude $-a$.

- $\boxed{f_3 : x \mapsto f(a-x)}$: $(x,y) \in \mathscr{C}_f \iff y = f(x) \iff y = f_3(a-x) \iff (a-x, y) \in \mathscr{C}_{f_3}$.
  Le graphe de f_3 se déduit de celui de f par une symétrie d'axe $x = \frac{a}{2}$.

- $\boxed{f_4 : x \mapsto f(ax)}$ (avec $a \neq 0$) :
$$(x,y) \in \mathscr{C}_f \iff y = f(x) \iff y = f_4(x/a) \iff (x/a, y) \in \mathscr{C}_{f_4}.$$
  Le graphe de f_4 se déduit de celui de f par une affinité orthogonale horizontale de rapport $\dfrac{1}{a}$.

- $\boxed{f_5 : x \mapsto af(x)}$ (avec $a \neq 0$) :
$$(x,y) \in \mathscr{C}_f \iff y = f(x) \iff y = f_5(x)/a \iff (x, ay) \in \mathscr{C}_{f_5}.$$
  Le graphe de f_5 se déduit de celui de f par une affinité orthogonale verticale de rapport a.

Résolution graphique d'équation $f(x) = \lambda$ et $f(x) \geqslant \lambda$.

b Partie positive, partie négative

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$.
On appelle **partie positive** de f la fonction f^+ définie sur D par
$$f^+(x) = (f(x))^+ = \max(f(x), 0) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \, x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
On appelle **partie négative** de f la fonction f^- définie sur D par
$$f^-(x) = (f(x))^- = \max(-f(x), 0) = \begin{cases} -f(x) & \text{si} \, f(x) \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dessin

c Parité, périodicité

Définition : Parité, périodicité

Si D est une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction,

- f est dite ***paire*** si
$$\forall x \in D, \quad \Big(-x \in D \text{ et } f(-x) = f(x)\Big)$$
- f est dite ***impaire*** si
$$\forall x \in D, \quad \Big(-x \in D \text{ et } f(-x) = -f(x)\Big)$$
- f est dite T***-périodique*** avec $T \in \mathbb{R}^*$ si
$$\forall x \in D, \quad \Big(x + T \in D \text{ et } f(x+T) = f(x)\Big)$$

Remarque

Si f est T-péridodique et D n'est ni majoré, ni minoré, f est kT-périodique pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$.

Propriété

(i) Une fonction est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

(ii) Une fonction est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

(iii) Une fonction est T-périodique si et seulement si son graphe est invariant par translation horizontale d'amplitude T.

(iv) Toute combinaison linéaire de fonction paire, impaire ou T-périodique l'est encore.

Démonstration

(i) à (iii) cf transformations graphiques au début. □

Exemple : Très classique

toute fonction f se décompose de manière unique comme la somme d'une fonction paire et une fonction impaire, appelées parties paire et impaire de f.

d Somme, produit, composée

Définition : Somme, produit

Si $f, g : D \to \mathbb{R}$, on peut définir $f+g : D \to \mathbb{R}$ et $f \times g : D \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in D, \qquad (f+g)(x) = f(x)+g(x) \qquad \text{et} \qquad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

Définition : Composée

Si $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $u : D_u \to \mathbb{R}$ telles que $u(D_u) \subset D_f$ c'est-à-dire $\forall x \in D_u, \quad x \in D_f$, on peut définir la composée de f et u par $f \circ u : D_u \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in D, \quad f \circ u(x) = f(u(x))$$

On représente souvent la composition par un diagramme du type

$$x \in D_u \overset{u}{\mapsto} u(x) \in D_f \overset{f}{\mapsto} f \circ u(x).$$

Remarques

R1 – ⚠ Dans $f \circ u$, on commence par appliquer u, puis on applique f.

R2 – La composée n'est pas commutative : en général, $f \circ u \neq u \circ f$. Exemple : $f : x \mapsto 2x$ et $u : x \mapsto x^2$.

e Monotonie

Définition : Monotonie

Si D est une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \ D \mapsto \mathbb{R}$ une fonction,

- f est dite ***croissante*** (respectivement ***strictement croissante***) sur D si
$$\forall (x,y) \in D^2, \ \left(x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)\right)$$
$$\left(\text{respectivement } \forall (x,y) \in D^2, \ \left(x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\right)\right)$$
- f est dite ***décroissante*** (respectivement ***strictement décroissante***) sur D si
$$\forall (x,y) \in D^2, \ \left(x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)\right)$$
$$\left(\text{respectivement } \forall (x,y) \in D^2, \ \left(x < y \Rightarrow f(x) > f(y)\right)\right)$$
- Lorsque f est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante), on dit qu'elle est ***monotone*** (respectivement ***strictement monotone***).

Remarques

R1 – f est décroissante si et seulement si $-f$ est croissante.

R2 – Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes), $f+g$ l'est encore.

R3 – Si f croissante (resp. décroissante) et $\lambda \geqslant 0$, λf est croissante (resp. décroissante).
Si f croissante (resp. décroissante) et $\lambda \leqslant 0$, λf est décroissante (resp. croissante).

R4 – Si f, g positives et croissantes (resp. décroissantes), $f \times g$ l'est encore.

f Fonctions majorées et minorées

Définition : Caractère majoré, minoré, borné

Si D est une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \mapsto \mathbb{R}$ une fonction,

- f est dite ***majorée*** lorsque l'on peut trouver un réel M tel que

$$\forall x \in D, \quad f(x) \leqslant M$$

- f est dite ***minorée*** lorsque l'on peut trouver un réel m tel que

$$\forall x \in D, \quad m \leqslant f(x)$$

- f est dite ***bornée***, lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée.

Cela revient à avoir les mêmes propriétés pour la partie $\{f(x), x \in D\}$ de $\mathbb{R}$.

Remarque

⚠ M et m ne doivent pas dépendre de x !!!

Propriété

Une fonction f est bornée ssi $|f|$ majorée ssi on a $K \geqslant 0$ tel que $|f| \leqslant K$.

Remarques

R1 – Une combinaison linéaire, un produit de fonctions bornées sont encore bornées.

R2 – Ne jamais composer les inégalités par la valeur absolue, qui n'est pas croissante ! (On ne majore pas et on ne minore pas « sous » une valeur absolue !)

2 Fonctions bijectives

Définition : bijection, réciproque

Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et à valeur dans une partie J de $\mathbb{R}$.

On dit que f est une bijection (de I sur J) lorsque pour tout y dans J, il existe un unique x dans I tel que $y = f(x)$.

L'unique x solution de l'équation $f(x) = y$ dépend de y et est noté $f^{-1}(y)$, ce qui définit, une fonction $f^{-1} : J \mapsto I$ appelée ***réciproque*** de f.

Remarques

R1 – On a alors, pour $y \in J$, $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ et pour $x \in I$, $f^{-1}(f(x)) = x$.

R2 – Les graphes d'une bijection et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

$$(x, y) \in \mathscr{C}_f \iff y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \iff (y, x) \in \mathscr{C}_{f^{-1}}$$

Exemple

$x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème : dit de la bijection

Soit $f : D \mapsto \mathbb{R}$ une fonction, $I = [a, b] \subset D$ (où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$).
On suppose que

H1 f ***continue*** *sur I*

H2 f ***strictement monotone*** *sur I*

Alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution : on dit aussi que f réalise (ou induit) une bijection de $I = [a, b]$ sur $J = [f(a), f(b)]$ si f est croissante, ou $J = [f(b), f(a)]$ si f est décroissante.

La réciproque est de plus continue sur J et de même monotonie que f.

Démonstration

admis. □

Remarque

Le théorème se généralise à un intervalle quelconque et au cas où a, b sont éventuellement infinis. On remplace alors $f(a)$ et $f(b)$ par $\lim\limits_{x\to a} f$ et $\lim\limits_{x\to b} f$ (lorsque ces limites existent, bien sûr) et on ouvre les bornes correspondantes dans I et J. J est appelé image de I par f noté $J = f(I)$.

Exemple

$x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$.

3 Dérivation

Définition

f est dite dérivable en un point x_0 de son domaine de définition lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque $x \to x_0$. Cette limite est alors notée $f'(x_0)$.

Propriété : Équation de la tangente

Si une fonction f est dérivable en un point x_0, sa courbe représentative admet une tangente d'équation

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Remarque

$f'(x_0)$ est la pente de la tangente, et celle-ci passe par $(x_0, f(x_0))$.

Propriété

Si f et g sont dérivables sur D, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f+g$, λf, $f \times g$ le sont aussi et si de plus g ne s'annule pas sur D, $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ le sont aussi et

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f' \qquad (fg)' = f'g + fg$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Si de plus u dérivable sur D' et $u(D') \subset D$, $f \circ u$ est dérivable et

$$(f \circ u)' = u' \times (f' \circ u)$$

$$\Big(ie\ \forall\, x \in D,\ \ (f \circ u)'(x) = u'(x) f'\big(u(x)\big)\Big)$$

Exemple

Si $f(x) = \sin\left(\mathrm{e}^{\cos x}\right)$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $f'(x) = ...$

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur une ***intervalle*** *I.*

(i) Si $f' \equiv 0$ sur I, f est constante sur I.

(ii) Si $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur I, f est croissante (resp. décroissante) sur I.

(iii) Si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur I sauf en des points ***isolés*** *où elle peut s'annuler, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.*

Remarque

⚠ Il faut être sur un intervalle !!!!!

Propriété : Dérivée de la réciproque

Si $f : I \to J$ est une fonction bijective, dérivable sur I et telle que f' ***ne s'annule pas sur*** *I, alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et*

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Si pour un $x \in I$, $f'(x) = 0$, la courbe représentative de f^{-1} admet en $f(x)$ une tangente verticale.

Remarque

Se retrouve en dérivant $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$.

Exemple

Dérivée de $\sqrt{\cdot}$.

Définition

Lorsqu'elle existe, on note $f^{(n)}$ la fonction obtenue en dérivant n fois de suite la fonction f.

Exemple

Calculs de $f^{(n)}$ pour f parmi $x \mapsto x^p$, cos, sin, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

4 Asymptotes et branches infinies

a Asymptotes horizontales et verticales

Une droite est asymptote lorsque la courbe représentative de la fonction f tend à se rapprocher de celle-ci.

Propriété

Soient $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

(i) Si $f(x) \to \pm\infty$ pour $x \to x_0$, la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.

(ii) Si $f(x) \to y_0$ pour $x \to \pm\infty$, la droite d'équation $y = y_0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f.

Remarque

Dans ce dernier cas, le signe de $f(x) - y_0$ donne la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

b Cas général au voisinage de $\pm\infty$

La courbe d'équation $y = g(x)$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $\pm\infty$ lorsque $f(x) - g(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$. Le signe de $f(x) - g(x)$ permet de connaître la position relative des deux courbes.

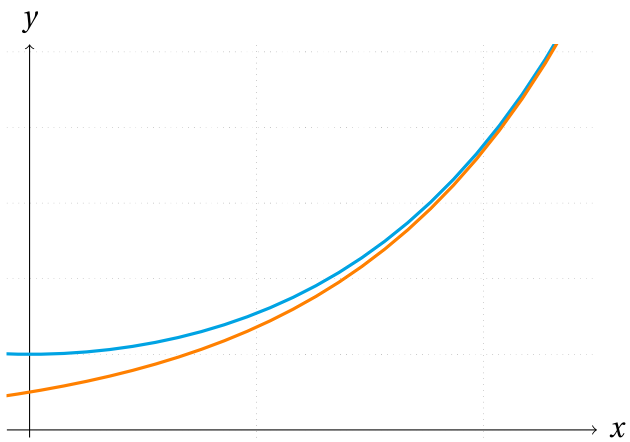

FIGURE 1 – Courbes asymptotes en $+\infty$

Propriété

Les limites sont prises pour $x \to \pm\infty$ et on suppose que $f(x) \to \pm\infty$.

(i) *Si $\dfrac{f(x)}{x} \to a$ et $f(x) - ax \to b$, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f.*

(ii) *Si $\dfrac{f(x)}{x} \to \pm\infty$, la courbe a tendance à être plutôt verticale : on parle de* ***branche parabolique verticale*** *(mais on ne se rapproche pas d'une droite en particulier.)*
Exemple : $\exp$; $x \to x^2$.

(iii) *Si $\dfrac{f(x)}{x} \to 0$, la courbe a tendance à être plutôt horizontale : on parle de* ***branche parabolique horizontale*** *(mais on ne se rapproche pas d'une droite en particulier.)*
Exemple : $\sqrt{\cdot}$; $\ln$.

(iv) *Si $\dfrac{f(x)}{x} \to a \in \mathbb{R}$ mais $f(x) - ax$ n'a pas de limite finie, on a une* ***branche parabolique de direction*** $y = ax$.

5 Étude de fonctions

Pour étudier une fonction, il faut :

- Déterminer son domaine de définition.

- Réduire le domaine d'étude par périodicité, (im)parité, etc.
- Étudier la dérivabilité, calculer la dérivée, **la factoriser** pour avoir son signe.
- Dresser le tableau des variations.
- Calculer les limites aux bornes.
- Étudier les branches infinies, asymptotes.
- Tracer le graphe.

Exemple

Étude de $f = \cos^4 + \sin^4$ puis de $g : x \mapsto \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

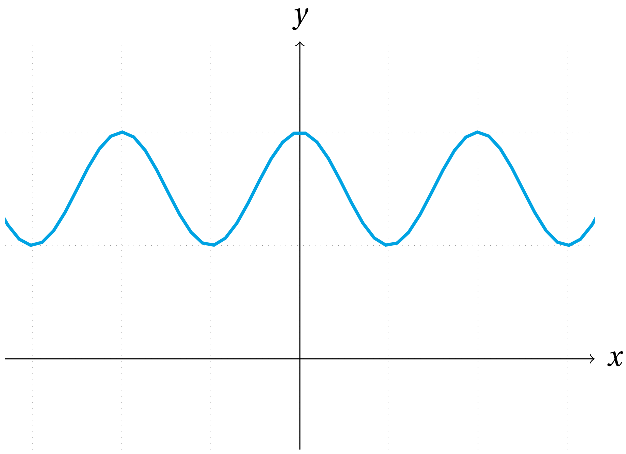

FIGURE 2 – $f = \cos^4 + \sin^4$

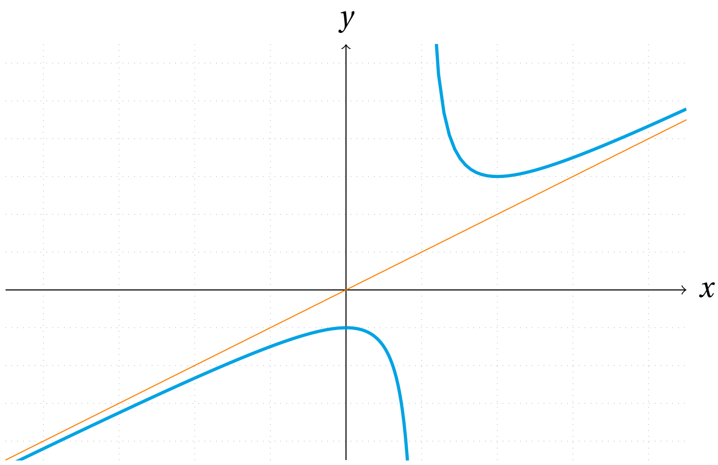

FIGURE 3 – $g : x \mapsto \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

III FONCTIONS USUELLES

1 Fonctions cos, sin, tan

a Définition

Les fonctions circulaires *cosinus*, *sinus* et *tangente* sont définies géométriquement, dans un repère orthonormal direct (O, I, J) du plan (voir la figure ci-après).

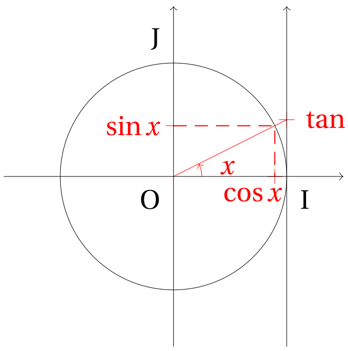

FIGURE 4 – Définition géométrique de *cosinus* et *sinus*

Remarque

En particulier, par construction, si a et b sont des réels tels que $a^2+b^2=1$, alors le point de coordonnées (a,b) est sur le cercle, et on peut donc trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a=\cos\theta$ et $b=\sin\theta$ (ou, par symétrie $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $a=\sin\varphi$ et $b=\cos\varphi$.

Valeurs particulières :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Propriété

Si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\sin x=\sin y \iff \left|\begin{array}{lcl} x & \equiv & y\ [2\pi] \\ ou & & \\ x & \equiv & \pi-y\ [2\pi] \end{array}\right. \iff \exists\, k\in\mathbb{Z},\quad x=y+2k\pi \text{ ou } x=\pi-y+2k\pi$$

$$\cos x=\cos y \iff \left|\begin{array}{lcl} x & \equiv & y\ [2\pi] \\ ou & & \\ x & \equiv & -y\ [2\pi] \end{array}\right. \iff \exists\, k\in\mathbb{Z},\quad x=y+2k\pi \text{ ou } x=-y+2k\pi$$

Remarque

En particulier, $\cos x=0$ si et seulement si $x\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $\sin x=0$ si et seulement si $x\equiv 0\ [\pi]$

Pour $x\in\mathbb{R}$, il faut savoir retrouver rapidement les relations :

y	$-x$	$\pi/2-x$	$\pi/2+x$	$\pi-x$	$\pi+x$
$\cos y$	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$
$\sin y$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$

Remarque

Si $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x+k\pi) = (-1)^k \cos x$ et $\sin(x+k\pi) = (-1)^k \sin x$.

Propriétés

(i) *Les fonctions* sinus *et* cosinus *sont définies, continues, dérivables et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. De plus,* sinus *est impaire et* cosinus *est paire.*

(ii) $\sin' = \cos$ *et* $\cos' = -\sin$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leq 1$ *et* $|\cos x| \leq 1$ (cos *et* sin *sont dites bornées par 1).*

(iv) $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

Graphes :

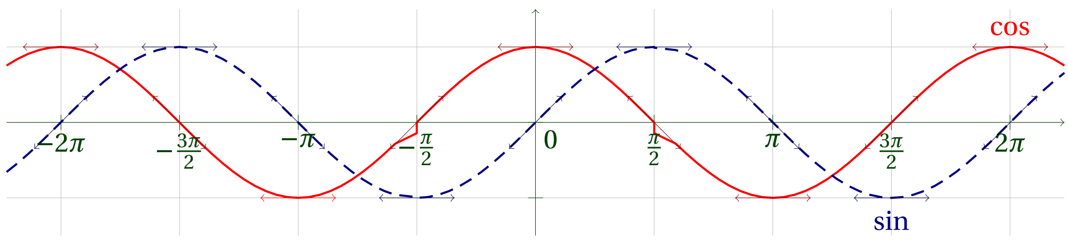

Figure 5 – Graphe des fonctions *cosinus* et *sinus*

foncusu1$_2 grillesincos.pgf Graphedelafonctionsinus$

Définition : Tangente

La fonction ***tangente*** est l'application

$$\tan : \left| \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{array} \right.$$

définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Propriétés

(i) *La fonction* tangente *est continue, dérivable et π-périodique sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(ii) *C'est une fonction impaire.*

(iii) $\tan' = \dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$.

(iv) *La fonction* tangente *n'est pas bornée :* $\tan x \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}^+]{} -\infty$ *et* $\tan x \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}^-]{} +\infty$.

(v) $\dfrac{\tan x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

Valeurs particulières :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-

Graphe :

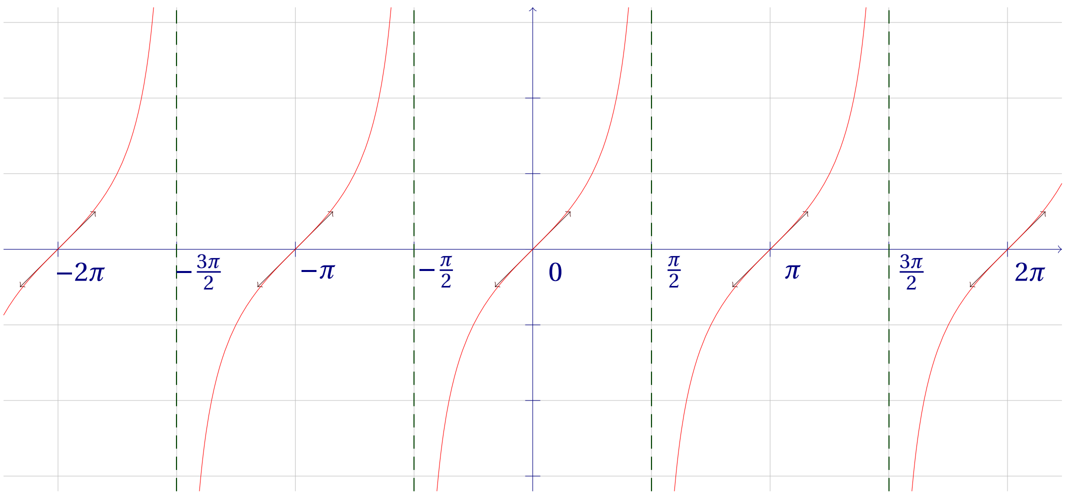

FIGURE 6 – Graphe de la fonction tangente

Propriété

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\tan x = \tan y \iff x \equiv y \ [\pi] \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = y + k\pi$$

Remarque

On définit aussi classiquement la cotangente : $\text{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$ sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

b Trigonométrie

Propriété : Formules d'addition

Si $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \qquad \sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a \tag{1}$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \qquad \sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a \tag{2}$$

Si, de plus, $a\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $b\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ *ainsi que* $a+b\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ *pour la première et* $a-b\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ *pour la seconde,*

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b} \qquad \tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b} \tag{3}$$

Démonstration

Les formules (1) seront démontrées géométriquement en TD.
(2) s'en déduisent en changeant b en $-b$.
Pour (3), on peut écrire $\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b+\sin a\sin b}=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ en divisant numérateur et dénominateur par $\cos a\cos b$. □

Remarque

Ces formules, comme toutes celles qui vont suivre, sont bien sûr à connaître absolument **par cœur** : trouvez des moyens mnémotechniques ! En cas de doute, sachez les retrouver très très rapidement. Par exemple, on peut écrire (mais ce n'est pas une preuve valable, pourquoi ?)

$$\cos(a+b)=\mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)}\right)=\mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}\right)=\mathfrak{Re}\left((\cos a+\mathrm{i}\sin a)(\cos b+\mathrm{i}\sin b)\right)=\cdots$$

On en déduit alors les très importantes formules de duplication :

Propriété : Formules de duplication

Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x=\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$

et donc

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

Si, de plus, $x\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ *et* $x\not\equiv\frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

Exemple

Calculs de $\cos(3x)$, $\cos(4x)$....

Propriété : Linéarisation et factorisation

Si $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\Big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\Big) \qquad \sin a\cos b = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\Big)$$

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\Big)$$

Si $(p,q)\in\mathbb{R}^2$,

$$\cos p+\cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin p+\sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p-\cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin p-\sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Démonstration

Pour les formules de linéarisation, il suffit de remplacer le second membre avec les formules d'addition.

Pour les formules de factorisation, il suffit de remarquer que $p=\dfrac{p+q}{2}+\dfrac{p-q}{2}$ et $q=\dfrac{p+q}{2}-\dfrac{p-q}{2}$ et d'appliquer les formules d'addition. □

Remarque

On ne donne pas de formule pour $\cos p \pm \sin q$, mais on se souviendra que $\sin q = \cos\left(\frac{\pi}{2}-q\right)$...

Propriété : Arc moitié

Soit $x\in\mathbb{R}$ *tel que* $x\not\equiv\pi\ [2\pi]$. *On pose* $t=\tan\dfrac{x}{2}$, *alors*

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Démonstration

La troisième a déjà été vue (duplication).

Puis $\cos x = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)$ et enfin $\sin x = \tan x\cos x$. □

Remarque

Pour les retrouver : se souvenir que l'on voit apparaître $1-t^2$, $1+t^2$ et $2t$. Il n'y a plus qu'à les remettre dans le bon ordre ! Souvenez-vous que cos et sin sont définis partout, donc le dénominateur ne peut être que $1+t^2$. De plus, cos est pair : son numérateur est donc $1-t^2$, sin est impair : son numérateur est donc $2t$. Pour finir, $\tan = \frac{\sin}{\cos}$...

Propriété

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Il existe des réels φ, ψ tels que

$$\forall\,\theta \in \mathbb{R},\quad a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\psi).$$

Remarque

Ce n'est pas tant le résultat qu'il faut retenir mais surtout la méthode pour y parvenir. C'est très classique : plutôt que de se lancer dans des calculs formels, voyons celà sur un exemple.

Exemple

Transformons $\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta$.

Le première étape consiste à mettre $\sqrt{a^2+b^2}$ en facteur : ici $\sqrt{1+3} = 2$.

On obtient $2\left(\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$. On a alors automatiquement que $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$. On peut alors, pour reconnaître une formule d'addition, écrire que $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$.

On obtient finalement $\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = 2\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$.

Pour reconnaître l'autre formule d'addition, il suffit de remarquer que $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$ et alors $\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = 2\left(\cos\theta\sin\frac{\pi}{6} - \sin\theta\cos\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$.

2 Fonction exponentielle

Définition

On appelle fonction exponentielle l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\exp' = \exp \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1$$

Démonstration

Existence admise.

Unicité : Si f et g conviennent.

Supposons que f ne s'annule pas. alors $\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f-gf'}{f^2} = 0$ sur $\mathbb{R}$ intervalle, donc $\frac{g}{f} \equiv 1$ donc $f = g$.

Pourquoi ne f s'annule-t-elle pas ?

Soit $u(x) = f(x)f(-x)$. u dérivable et $u'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = 0$ donc u constamment égal à 1. Donc f ne s'annule pas.

On a montré au passage que $\exp(x)\exp(-x) = 1$ soit $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$. □

Définition

On pose $\mathrm{e} = \exp 1$.

Remarque

$\mathrm{e} \simeq 2,72$.

Propriété

(i) $\exp$ *est continue, dérivable sur* $\mathbb{R}$, $\exp' = \exp$.

(ii) $\exp > 0$.

(iii) $\exp$ *est strictement croissante.*

(iv) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp(x+y) = \exp x \exp y$.

(v) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n, \quad \exp\left(\sum_i x_i\right) = \prod_i \exp x_i$.

(vi) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$.

(vii) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp(x-y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$.

(viii) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp x \geqslant x + 1$.

(ix) $\exp x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$; $\exp x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$; $\dfrac{\exp x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$; $x \exp x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$.

Démonstration

(iv) $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp y}$ vérifie les propriétés définissant $\exp$ et $x \exp x$ s'en déduit par changement de variable $X = -x$.

(viii) étude de $\exp - \mathrm{id}$.

(ix) en $+\infty$ par (viii), en 0 par (vi), $\dfrac{\exp x}{x}$: $\exp x = 1 + \int_0^x \exp$ puis (viii). $\square$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp' = \exp$		$+$	1	$+$	
$\exp$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
infos	$\leftrightarrow$		$\swarrow\!\nearrow$		BPV

$\dfrac{\exp x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ donc branche parabolique verticale en $+\infty$.

L'inégalité $\exp x \geqslant x + 1$ se traduit sur le graphe par le fait que la courbe est au-dessus de la tangente en 0.

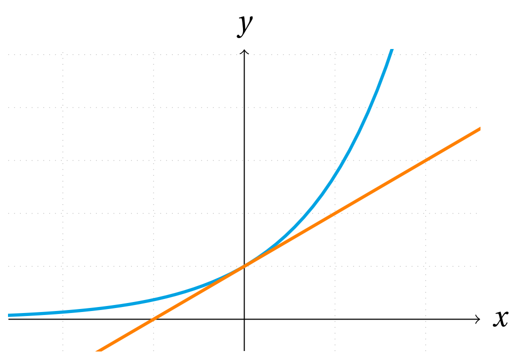

FIGURE 7 – Graphe de la fonction exponentielle et sa tangente en 0 d'équation $y = x + 1$.

3 Fonction logarithme

Définition

$\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est la bijection réciproque de exp.

Propriété

(i) $\ln$ *est continue, dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

(ii) $\ln(1) = 0$.

(iii) $\ln$ *est strictement croissante.*

(iv) Si u *dérivable,* $\ln|u|$ *dérivable et* $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$.

(v) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_*^+)^2,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y$.

(vi) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ \ \ln\left(\prod_i x_i\right) = \sum_i \ln x_i$.

(vii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \ln \frac{1}{x} = -\ln x$.

(viii) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ \ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$.

(ix) $\forall x > -1,\ \ \ln(1 + x) \leqslant x$.

(x) $\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$; $\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$; $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$; $x \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^-$; $\dfrac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1$.

Démonstration

D'après les propriétés de l'exponentielle. □

x	0		1		$+\infty$
$\ln'$	||	$+$	1	$+$	
$\ln$	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Infos	as. $x = 0$		$\nearrow$		BPH

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe.

Le graphe est symétrique de celui de l'exponentielle par rapport à la première bissectrice.

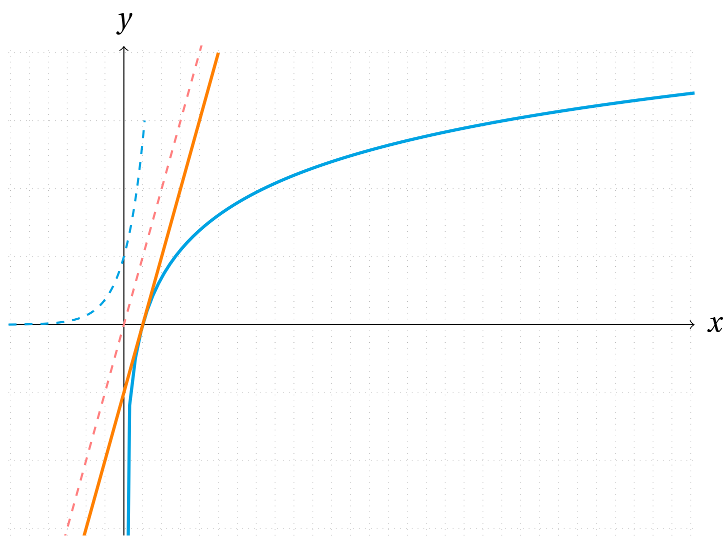

FIGURE 8 – Graphe de la fonction logarithme et sa tangente en 1 d'équation $y = x - 1$.

4 Fonctions puissances

Définition

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.

Remarques

R1 – La définition de x^α se prolonge à $x \in \mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}$, et à $x = 0$ si $\alpha \in \mathbb{Q}$.
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ unique réel > 0 dont la puissance n^e vaut a.
Si n impair, c'est l'unique réel tout court et on peut prolonger à $\mathbb{R}$ tout entier.

R2 – Log en base a et sa réciproque exp en base a (a^x).

R3 – Justification de la notation e^x...

Propriété

Si $x, y > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
- $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$
- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$
- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$.

Démonstration

Propriétés de exp. □

Remarque

Ces propriétés s'étendent à $\mathbb{R}$ si les puissances sont entières (récurrences...)

Étude des fonctions puissance $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha$. (Séparer $\alpha < 0$, $0 < \alpha < 1$ et $\alpha > 1$.)

5 Croissances comparées

Propriété

Si $\alpha, \beta > 0$,

(i) $\dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

(ii) $|x|^\alpha e^{\beta x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0^+$.

(iii) $\dfrac{\ln^\alpha x}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$,

(iv) $x^\beta |\ln x|^\alpha \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^+$.

(Si $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, on peut enlever les valeurs absolues !)

Démonstration

(i) passer à la forme exponentielle ou $\dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha}=\left(\dfrac{e^{\frac{\beta}{\alpha}x}}{\frac{\beta}{\alpha}x}\times\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha$; (ii) $|x|^\alpha e^{\beta x}=\dfrac{(-x)^\alpha}{e^{\beta(-x)}}$; (iii) et (iv) poser $y=\ln x$. □

Remarques

R1 – ⚠ ce n'est pas parce qu'il y a du ln et de l'exp que ce sont des croissances comparées !!! Exemple : $\frac{e^{x^2}}{x}$ en $+\infty$.

R2 – Plus généralement, si P polynôme non constant, $\dfrac{P(x)}{\ln^\alpha x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\pm\infty$, $\dfrac{\exp(\beta x)}{P(x)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$, $P(x)\exp(\beta x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$.

6 Fonctions hyperboliques

Définition

Les fonctions **cosinus hyperbolique**, notée ch, **sinus hyperbolique**, notée sh et **tangente hyperbolique**, notée th sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\qquad \operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\qquad \operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Remarques

R1 – $\operatorname{th} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

R2 – ch et sh sont respectivement la partie paire et la partie impaire de exp.

R3 – $e^a+e^b=2e^{\frac{a+b}{2}}\operatorname{ch}(\frac{a+b}{2})$ et $e^a-e^b=2e^{\frac{a+b}{2}}\operatorname{sh}(\frac{a+b}{2})$.

Propriété

Les seules formules de trigonométrie hyperbolique au programme sont

$$\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x=e^x\qquad\text{et}\qquad \operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$$

Remarque

Les formules de trigo H ressemblent aux formules de trigo, mais il y a qques pièges.
Si on en a besoin, il faut les redémontrer.

Elles se retrouvent au brouillon en écrivant « $\cos(ix)=\operatorname{ch} x$ » et « $\sin(ix)=\dfrac{\operatorname{sh} x}{i}=-i\operatorname{sh} x$ », mais ce n'est pas une preuve.

Par exemple, $\cos^2+\sin^2=1$ devient... $\operatorname{ch}^2-\operatorname{sh}^2=1$.
$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ devient $\operatorname{ch}(a+b)=\operatorname{ch} a\operatorname{ch} b+\operatorname{sh} a\operatorname{sh} b$.

Vraie démonstration : .....

Propriété

(i) ch, sh, th *sont définies, continues, dérivables sur* $\mathbb{R}$*. La première est paire, les deux autres sont impaires.*

(ii) $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}\,;\ \mathrm{sh}' = \mathrm{ch}\,;\ \mathrm{th}' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2} = 1 - \mathrm{th}^2.$

(iii) $\mathrm{ch} > 0$ *et* sh *et* th *sont strictement croissantes.*

(iv) $\mathrm{ch}\,x \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty\,;\ \mathrm{sh}\,x \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty\,;\ \mathrm{th}\,x \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm 1.$

(v) th *est bornée par 1 (strictement).*

(vi) $\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ *et* $\dfrac{\mathrm{th}\,x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$

Variations et graphes. $y = \dfrac{e^x}{2}$ est asymptote à ch et sh.

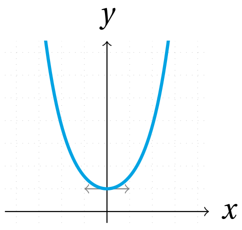

FIGURE 9 – cosinus hyperbolique (chaînette)

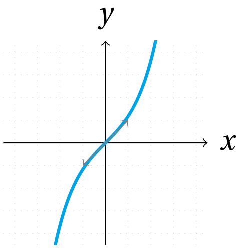

FIGURE 10 – sinus hyperbolique

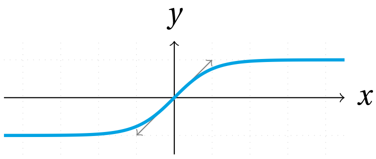

FIGURE 11 – tangente hyperbolique

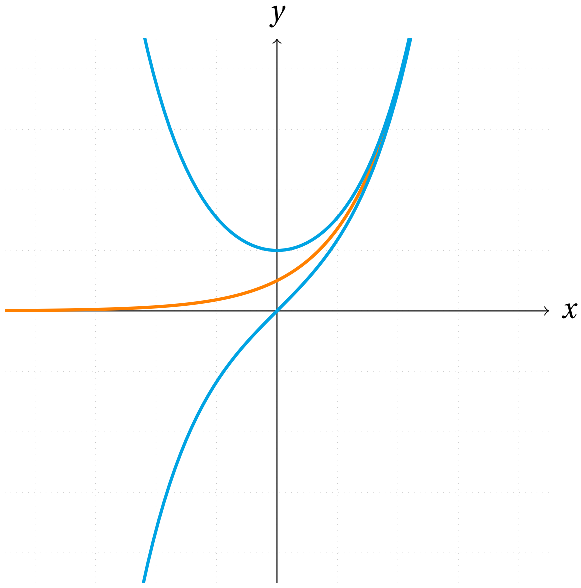

FIGURE 12 – cosinus et sinus hyperboliques, $x \mapsto \dfrac{e^x}{2}$

7 Fonctions circulaires réciproques

La restriction de la fonction sin à $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ est continue, strictement croissante, et $\sin([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]) = [-1,1]$: il s'agit d'une bijection de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$.

La restriction de la fonction cos à $[0,\pi]$ est continue, strictement croissante, et $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$: il s'agit d'une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.

La restriction de la fonction tan à $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est continue, strictement croissante, et $\tan(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$: il s'agit d'une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition

La réciproque de la restriction de la fonction sin à $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ est appelée **arc sinus**, notée

$$\mathrm{Arcsin} : \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ x & \longmapsto & \mathrm{Arcsin}\, x \end{array} \right.$$

où $y = \mathrm{Arcsin}\, x$ est l'unique angle entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus vaut x.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [-1,1] \\ y = \mathrm{Arcsin}\, x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ \sin y = x \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Arcsin} = \left(\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$$

La réciproque de la restriction de la fonction cos à $[0,\pi]$ est appelée **arc cosinus**, notée

$$\mathrm{Arccos} : \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & \mathrm{Arccos}\, x \end{array} \right.$$

où $y = \mathrm{Arccos}\, x$ est l'unique angle entre 0 et π dont le cosinus vaut x.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [-1,1] \\ y = \mathrm{Arccos}\, x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \in [0,\pi] \\ \cos y = x \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Arccos} = \left(\cos_{|[0,\pi]}\right)^{-1}$$

La réciproque de la restriction de la fonction tan à $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ est appelée **arc tangente**, notée

$$\mathrm{Arctan} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ x & \longmapsto & \mathrm{Arctan}\, x \end{array} \right.$$

où $y = \mathrm{Arctan}\, x$ est l'unique angle entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente vaut x.

$$y = \mathrm{Arctan}\, x \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ \tan y = x \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Arctan} = \left(\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\right)^{-1}$$

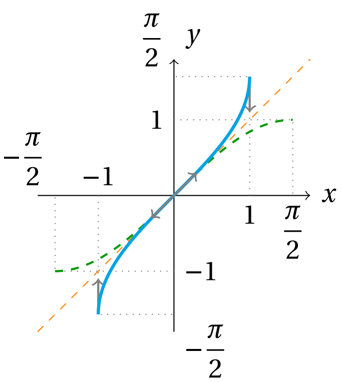

FIGURE 13 – Fonction Arcsin

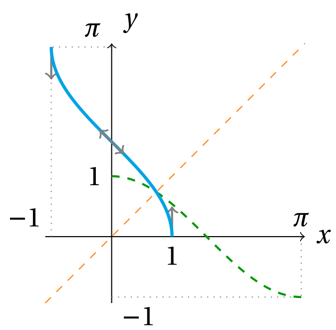

FIGURE 14 – Fonction Arccos

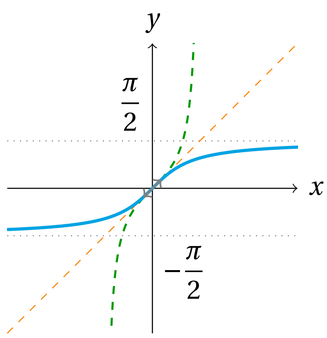

FIGURE 15 – Fonction Arctan

Propriétés

(i) Arcsin *est strictement croissante et impaire sur* $[-1,1]$.

(ii) $\forall x \in [-1,1]$,
$$\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x.$$

(iii) $\forall y \in \mathbb{R}$,
$$\operatorname{Arcsin}(\sin(y)) = y \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

(en général, $\operatorname{Arcsin}(\sin(y))$ *et* y *ont même sinus...)*

(iv) Arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et*
$$\forall x \in]-1,1[, \ \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(i′) Arccos *est strictement décroissante sur* $[-1,1]$.

(ii′) $\forall x \in [-1,1]$,
$$\cos(\operatorname{Arccos} x) = x.$$

(iii′) $\forall y \in \mathbb{R}$,
$$\operatorname{Arccos}(\cos(y)) = y \Leftrightarrow y \in [0,\pi]$$

(en général, $\operatorname{Arccos}(\cos(y))$ *et* y *ont même cosinus...)*

(iv′) Arccos *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et*
$$\forall x \in]-1,1[, \ \operatorname{Arccos}' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(v′) $\forall x \in [-1,1]$,
$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}.$$

(i″) Arctan *est strictement croissante et impaire sur* $\mathbb{R}$ *et tend vers* $\pm\frac{\pi}{2}$ *en* $\pm\infty$.

(ii″) $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\tan(\operatorname{Arctan} x) = x.$$

(iii″) $\forall y \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$,
$$\operatorname{Arctan}(\tan(y)) = y \Leftrightarrow y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

(en général, $\operatorname{Arctan}(\tan(y))$ *et* $\tan y$ *ont même tangente...)*

(iv″) Arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \operatorname{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2}$$

(v″) $\forall x \neq 0$,
$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}.$$

Exemples

E1 – *Très classique !*
Calculer $\cos(\operatorname{Arcsin} x)$, $\sin(\operatorname{Arccos} x)$, $\cos(\operatorname{Arctan} x)$ et $\sin(\operatorname{Arctan} x)$.

E2 – Calculer et tracer $\operatorname{Arcsin}(\sin 2x)$ et $\operatorname{Arccos}(\cos 2x)$. (directement ou en dérivant)

IV DÉRIVATION D'UNE FONCTION COMPLEXE D'UNE VARIABLE RÉELLE

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{C}$ où $D \subset \mathbb{R}$.
On pose $\mathfrak{Re}(f) : x \mapsto \mathfrak{Re}(f(x))$ et $\mathfrak{Im}(f) : x \mapsto \mathfrak{Im}(f(x))$.
On dit que f est dérivable si et seulement si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ le sont et on pose alors $f' = (\mathfrak{Re}(f))' + \mathrm{i}(\mathfrak{Im}(f))'$. Autrement dit, $\mathfrak{Re}(f') = (\mathfrak{Re}(f))'$ et $\mathfrak{Im}(f') = (\mathfrak{Im}(f))'$

On vérifie alors facilement que les formules de dérivées de somme, de produit, de quotient, de composée $f \circ u$ avec u à valeurs réelles sont encore valable. Par exemple, pour le produit, $((f_1 + \mathrm{i} f_2)(g_1 + \mathrm{i} g_2))' = ...$

Propriété

$f = \mathrm{e}^{\varphi}$ avec $\varphi = \varphi_1 + \mathrm{i}\varphi_2$ est dérivable et $f' = \varphi' \mathrm{e}^{\varphi}$.