

# Les Ensembles

Extrait du programme officiel :

*Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Toute étude systématique de la théorie des ensembles est hors programme.*

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

## Ensembles

Ensemble, appartenance, inclusion. Sous-ensemble (ou partie).	Sous-ensemble vide.
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, passage au complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$ , $\bar{A}$ et $\complement_E^A$ pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathcal{P}(E)$ .

## Table des matières

I	Ensemble	1
II	Inclusion et égalité	3
III	Ensemble des parties d'un ensemble	4
IV	Opérations sur les ensembles	4
V	Familles indexées et produit cartésien	7

## ENSEMBLE

Nous nous contenterons d'une définition intuitive de la notion d'ensemble :

### Définition : Ensemble

On appelle **ensemble** toute collection non ordonnée d'objets, appelés **éléments** de l'ensemble.

Pour désigner un ensemble, on note ses éléments entre accolades.

## Exemples

E1 –  $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}$

E2 –  $\{0, 1, 2\} = \{0, 2, 1\}$

E3 –  $\{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\}$

## Notation

Soit  $E$  un ensemble.

- Lorsque  $x$  est un élément de  $E$ , on dit qu'il **appartient** à l'ensemble  $E$  et on note  $x \in E$ .
- Dans le cas contraire, on note  $x \notin E$ .
- L'ensemble ne contenant aucun élément est appelé **ensemble vide**, noté  $\emptyset$ .
- Un ensemble contenant un seul élément est appelé un **singleton**.
- Un ensemble contenant deux éléments est appelé une **paire**.
- Si  $I$  est un ensemble (ensemble d'**indices**) et pour tout  $i \in I$ ,  $x_i$  un élément de  $E$ ,  $\{x_i, i \in I\}$  désigne l'ensemble de tous les  $x_i$ . Par exemple,  $\{x_i, i \in \mathbb{N}\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$ .
- Si  $E$  est un ensemble parmi  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$ ,  $E^*$  représente les éléments non nuls de  $E$ ,  
 $E^+$  et  $E_+^* = E_*^+$  représentent respectivement les éléments positifs (ou nuls) de  $E$  et les éléments strictement positifs de  $E$ . On obtient l'analogie avec les éléments négatifs en remplaçant le  $+$  par un  $-$ .

## Remarques

- R1 – Si  $P(x)$  est une assertion dépendant d'un élément  $x$  d'un ensemble  $E$  donné, on note  $\{x \in E \mid P(x)\}$  l'ensemble des éléments  $x$  de  $E$  tels que  $P(x)$  soit vrai. Ainsi, dire que  $y \notin \{x \in E \mid P(x)\}$ , c'est dire que soit  $y \notin E$ , soit  $P(y)$  est faux.
- R2 – Si  $\forall x \in E, P(x)$ , alors  $\{x \in E \mid P(x)\} = E$ .  
 Si  $\exists x \in E, P(x)$ , alors  $\{x \in E \mid P(x)\} \neq \emptyset$ .  
 Si  $\exists! x \in E \mid P(x)$ , alors  $\{x \in E \mid P(x)\}$  est un singleton.

## Exemples

E1 –  $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

E2 –  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ est un entier pair}\} = 2\mathbb{Z}$  est l'ensemble des entiers pairs.

E3 –  $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$  est l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle s'annulant en 1.

# II INCLUSION ET ÉGALITÉ

## Définition : Inclusion

Soient  $A$  et  $E$  deux ensembles.

On dit que  $A$  **est inclus dans**  $E$  (ou **est une partie de**  $E$ ), et on note  $A \subset E$  lorsque tous les éléments de  $A$  sont des éléments de  $E$ , i.e. si  $x \in A$ , alors  $x \in E$

On note  $A \not\subset E$  lorsque ce n'est pas le cas.

Par convention, on a toujours  $\emptyset \subset E$ .

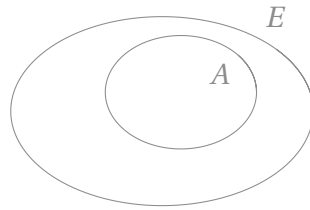


FIGURE 1 – Inclusion

## Remarques

R1 – Dire que  $x \in E$ , c'est dire que  $\{x\} \subset E$ .

R2 – Ce n'est pas parce que l'on n'a pas  $A \not\subset E$  que l'on a  $E \subset A$ . Par exemple :  $\{1,4\} \not\subset \{1,3\}$  et  $\{1,3\} \not\subset \{1,4\}$ .

R3 –  $A \not\subset E$  lorsqu'il existe  $x \in A$  tel que  $x \notin E$ .

R4 – Pour démontrer que  $A \subset E$ , on utilise la rédaction suivante :

Soit  $x \in A$ . But :  $x \in E$ ...

## Définition : Égalité ensembliste

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles.

On dit que  $A$  et  $B$  sont **égaux** et on note  $A = B$  lorsque tous les éléments de l'un sont aussi dans l'autre, i.e.  $A \subset B$  et  $B \subset A$ .

## Remarques

R1 – Ainsi dire que  $A \neq B$ , c'est dire que soit il y a un élément de  $A$  qui n'est pas dans  $B$ , soit il y a un élément de  $B$  qui n'est pas dans  $A$ .

R2 – Pour montrer que  $A = B$ , on raisonnera de l'une des manières suivantes :

- Double inclusion : 1. Montrons que  $A \subset B$ .
- 2. Montrons que  $B \subset A$ .

- $x \in A \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in B$ .

⚠ On ne raisonne **jamais** par égalité d'ensemble  $A = \dots = B$  car on a tendance à voir les

égalités comme des inclusions.

## III ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE

### Définition : Ensemble des parties

Soit  $E$  un ensemble. On note  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ .

### Remarques

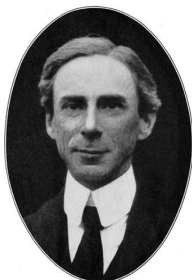
- R1 –  $\mathcal{P}(E)$  est donc un ensemble dont les éléments sont eux-même des ensembles.
- R2 – On a toujours  $E \subset E$  et  $\emptyset \subset E$  donc  $E \in \mathcal{P}(E)$  et  $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ .
- R3 –  $x \in E \iff \{x\} \in \mathcal{P}(E)$ .
- R4 –  $A \subset E \iff A \in \mathcal{P}(E)$ .

### Exemples

- E1 – Si  $E = \{1\}$  (un élément),  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}\}$  (2 éléments).
- E2 – Si  $E = \{1, 2\}$  (deux éléments),  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$  (4 éléments).
- E3 – Si  $E = \{1, 2, 3\}$  (trois éléments),  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$  (8 éléments).
- E4 –  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})) = ?$

### Remarque

La limite de la théorie des ensembles : on ne peut pas parler de l'ensemble  $\mathfrak{P}$  de tous les ensembles. Sinon, on pourrait considérer  $\mathcal{E} = \{E \text{ ensemble} \mid E \notin E\} \subset \mathfrak{P}$  qui est paradoxal : on n'a ni  $\mathcal{E} \in \mathcal{E}$ , ni  $\mathcal{E} \notin \mathcal{E}$ . C'est le paradoxe de Russel<sup>1</sup>.



1.

**Bertrand Arthur William Russel** (1872 - 1970) est un est un mathématicien, logicien, philosophe, épistémologue, homme politique et moraliste britannique. Son œuvre, qui comprend également des romans et des nouvelles, fut couronnée par le prix Nobel de littérature en 1950, en particulier pour son engagement humaniste et comme libre penseur.

# IV OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES

## Définition : Opérations sur les ensembles

Soient  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

- On appelle **complémentaire** de  $A$  dans  $E$ , noté  $\complement_E A$  ou simplement  $\bar{A}$  ou  ${}^c A$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, l'ensemble des éléments  $x$  de  $E$  tel que  $x \notin A$ .
- On appelle **différence  $A$  moins  $B$**  ou  **$A$  privée de  $B$** , notée  $A - B$  ou  $A \setminus B$ , l'ensemble des éléments  $x \in E$  tel que  $x \in A$  mais  $x \notin B$ .
- On appelle **réunion** de  $A$  et de  $B$ , notée  $A \cup B$ , l'ensemble des éléments  $x \in E$  tel que  $x \in A$  ou  $x \in B$  (ou les deux).
- On appelle **intersection**, notée  $A \cap B$ , de  $A$  et de  $B$  l'ensemble des éléments  $x \in E$  tel que  $x \in A$  et  $x \in B$ .

### Exemple

Si  $E$  est un ensemble,  $A, B$  des parties de  $E$ ,

- $\bar{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$ .
- $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ .
- $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$ .
- $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$ .

### Remarques

- R1 – Lorsque  $A \cap B = \emptyset$ , on dit que les ensembles  $A$  et  $B$  sont **disjoints**. Leur réunion se note alors  $A \sqcup B$  ou  $A \cup B$  et on parle d'**union disjointe**.
- R2 – On a toujours  $A \cap B \subset A \subset B$  (et bien sûr la même chose pour  $B$ ).

On peut généraliser ces deux dernières définitions à plus de deux ensembles :

## Définition

Soient  $E$  un ensemble,  $I$  un ensemble (d'indices) et pour tout  $i \in I$ ,  $A_i$  une partie de  $E$ , on définit alors

- $\bigcup_{i \in I} A_i$  comme l'ensemble des  $x \in E$  tels que  $x$  appartient à au moins un  $A_i$ .
- $\bigcap_{i \in I} A_i$  comme l'ensemble des  $x \in E$  tels que  $x \in A_i$  pour tout  $i \in I$ .

### Remarque

Le cas où  $I$  contient deux éléments nous redonne bien la définition donnée ci-dessus.

### Exemples

E1 –  $[1, 3[ \cap ]2, 4[ \cap ]1, 7[ = ?$  (Réponse :  $]2, 3[$ .)

E2 –  $[1, 2] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right[ \cup ]-1, 1[ = ?$  (Réponse :  $] -1, 2[$ .)

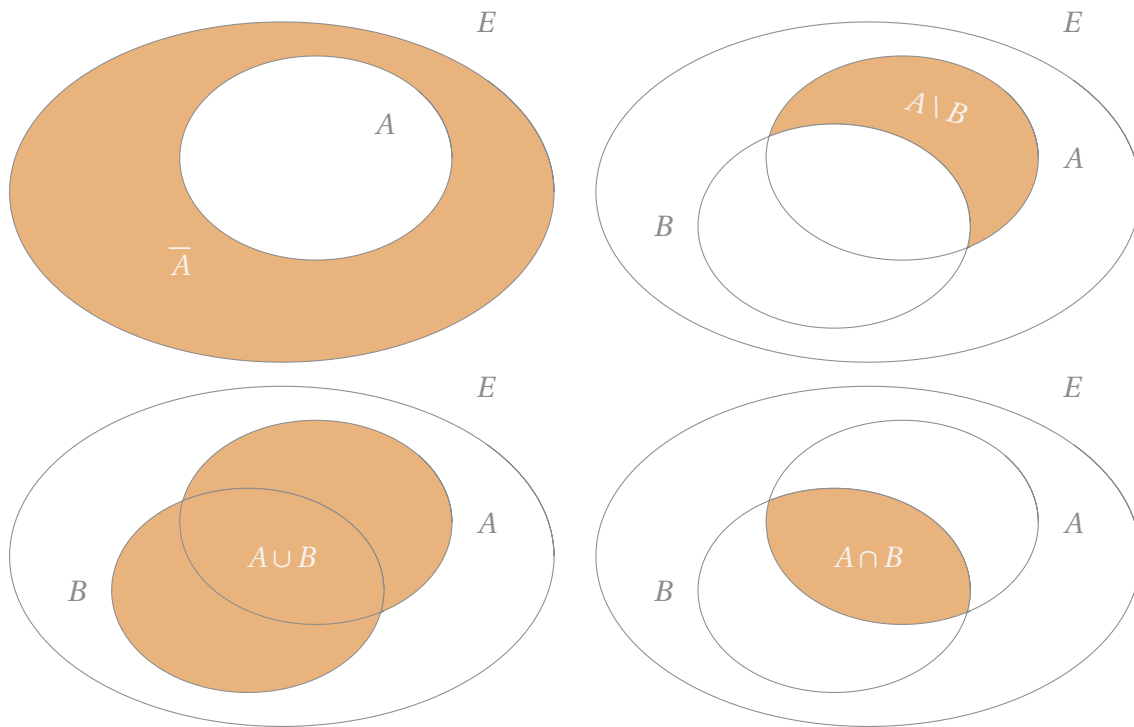


FIGURE 2 – Opérations sur les ensembles

E3 – Calculer  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$ . (Réponse :  $] -1, 1[$ , par double inclusion.)

E4 – Calculer  $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} [x, x + 1[$ . (Réponse :  $\mathbb{R}$ , par double inclusion.)

### Propriétés

Soit  $E$  un ensemble,  $A, B, C$  des parties de  $E$ .

(i) **Commutativité de  $\cup$  et  $\cap$**  :

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

(ii) **Associativité de  $\cup$  et  $\cap$**  :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

(iii) **Éléments neutres** :  $\emptyset$  pour  $\cup$  et  $E$  pour  $\cap$

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$$

$$A \cap E = E \cap A = A$$

(iv) **Distributivité de  $\cup$  sur  $\cap$  et de  $\cap$  sur  $\cup$**  :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(v) **Complémentaire involutif** :  $\overline{\overline{A}} = A$

(vi) **Lois de De Morgan** :  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  et  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(vii)  $B \setminus A = B \cap \overline{A}$

## Démonstration

Correspondent aux propriétés identiques pour le *ou*, le *et* et le *non* logique. □

### Définition : Partition

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  famille de parties d'un ensemble  $E$ .

On dit que  $(A_i)_{i \in I}$  est une **partition** de  $E$  lorsque les  $A_i$  sont non vides et  $E = \bigsqcup_{i \in I} A_i$ ,

ie

- $E = \bigcup_{i \in I} A_i$
- $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ ,
- Les  $A_i$  sont non vides

ie les  $A_i$  sont non vides et tout élément de  $E$  est dans un et un seul  $A_i$ .

### Exemples

E1 –  $(2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} + 1)$  partition de  $\mathbb{Z}$ .

E2 –  $([k, k + 1[)_{k \in \mathbb{Z}}$  partition de  $\mathbb{R}$  mais ni  $([k, k + 1])_{k \in \mathbb{Z}}$ , ni  $(]k, k + 1])_{k \in \mathbb{Z}}$ .

# V FAMILLES INDEXÉES ET PRODUIT CARTÉSIEN

### Définition : Famille indexée

Si  $I$  est un ensemble (ensemble d'**indices**) et pour tout  $i \in I$ ,  $E_i$  un ensemble et  $x_i$  un élément de  $E_i$ ,  $(x_i)_{i \in I}$  désigne la **famille** des  $x_i$  **indexée** par  $I$ .

L'ordre est important : si  $(y_i)_{i \in I}$  est une autre famille d'éléments des  $E_i$  indexée par  $I$ , dire que  $(x_i)_{i \in I} = (y_i)_{i \in I}$  c'est, par définition, dire que pour tout  $i \in I$ ,  $x_i = y_i$ .

### Remarques

R1 – Si  $I = \mathbb{N}$  on parle de **suite**.

R2 – Si  $I$  contient deux éléments, on parle de **couple** : par exemple  $(x_1, x_2)$  pour  $I = \{1, 2\}$ .

R3 – Si  $I$  contient trois éléments, on parle de **triplet** : par exemple  $(x_1, x_2, x_3)$  pour  $I = \{1, 2, 3\}$ .

R4 – Si  $I$  contient  $n$  éléments, on parle de **n-uplet** : par exemple  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pour  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ .

### Exemple

$(1, 2, 3) \neq (1, 3, 2)$

### Définition : Produit cartésien

- Si, pour un  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E_1, E_2, \dots, E_n$  sont des ensembles, on appelle **produit cartésien** des  $E_i$ , noté  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  l'ensemble des  $n$ -uplets  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tels que pour tout  $i = 1 \dots n$ ,  $x_i \in E_i$ .

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n\}.$$

- Plus généralement, si  $I$  est un ensemble et pour tout  $i \in I$ ,  $E_i$  est un ensemble, on appelle **produit cartésien** des  $E_i$ , noté  $\prod_{i \in I} E_i$  l'ensemble des familles  $(x_i)_{i \in I}$  indexées par  $I$  tels que pour tout  $i \in I$ ,  $x_i \in E_i$ .

### Remarques

R1 –  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ .

R2 – Pour un  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{n \text{ fois}}$  est noté  $E^n$ .

R3 – Si  $I$  est un ensemble,  $\prod_{i \in I} E$  est noté  $E^I = \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I, x_i \in E\}$ .

### Exemples

E1 –  $\mathbb{R}^2$  est l'ensemble des couples  $(x, y)$  avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ .

E2 – Si on note  $\mathcal{F}$  l'ensemble des fonctions réelles d'une variable réelle,  $\mathbb{N} \times \mathcal{F} \times \mathbb{C}$  est l'ensemble des triplets  $(n, f, z)$  où  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in \mathcal{F}$  et  $z \in \mathbb{C}$ .

E3 –  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{R}\}$  est l'ensemble des suites réelles.