Quantificateurs, Logique, Raisonnements

Extrait du programme officiel :

Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Rudiments de logique	
Quantificateurs.	L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviations est exclu.
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par récurrence (faible et forte), par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.	On pourra relier le raisonnement par récurrence au fait que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément. Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme. Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.

Table des matières

I ÉLÉMENTS DE LOGIQUE

1 Assertions

On rencontre en mathématiques (plus précisément en logique mathématique) des *phrases* appelées **assertions**, **prédicat**, **énoncés** ou **propositions** que l'on ne définira pas formellement : on retiendra simplement qu'elles peuvent être soit vraies (V) soit fausses (F) (mais pas les deux simultanément).

Exemples

E 1 – L'assertion « $1+1=2$ » est vraie.

E 2 – L'assertion « $1>2$ » est fausse.

Certaines de ces assertions sont posées comme vraies par convention : on parle d'**axiomes**.

Exemples

E 1 – Il existe un ensemble infini.

E 2 – La réunion d'une famille d'ensembles est un ensemble.

D'autres sont démontrées comme étant vraies : on parle de **théorème** ou de **propriété** (ou encore de **proposition**, attention...)

Le but du mathématicien est de formuler des assertions (à ce stade on parle de **conjecture**), puis de démontrer leur véracité à partir d'autres résultats démontrés.

Définition : Table de vérité

Une ***table de vérité*** est un tableau qui indique si une formule $A(P,Q,R,\dots)$ (qui est elle-même une assertion), construite à partir d'assertions $P,Q,R,\dots$, est vraie ou fausse suivant la véracité de $P,Q,R,\dots$

Remarque

Lorsque l'on écrit une assertion P seule, il est sous-entendu qu'elle vraie. Par exemple : « $1+1=2$ ».

2 Connecteurs logiques

a Négation

Définition : Négation

Soit P une assertion.

On définit la **négation** « $\text{non}\, P$ » de P, notée $\overline{P}$ ou $\neg P$, comme étant l'assertion fausse lorsque P est vraie et vraie lorsque P est fausse.

P	non P
V	F
F	V

TABLE 2 – Table de vérité de la négation.

Exemples

E1 – La négation de « Il pleut tous les jours. » est « Il ne pleut pas certains jours. » ou encore « Il y a au moins jour où il ne pleut pas. »,

E2 – La négation de « Tout le monde est présent. » est « Il y a au moins un absent »,

E3 – La négation de « La fonction f est la fonction nulle » est « $f(x) \neq 0$ pour au moins une valeur de x »,

E4 – La négation de « $ab = 0$ » est « $a \neq 0$ et $b \neq 0$ ».

E5 – La négation de « $a > b$ » est « $a \leqslant b$ ».

b Conjonction et disjonction

Définition : Conjonction et disjonction

Soient P et Q deux assertions.

On définit la ***conjonction*** « P et Q » des assertions P et Q, notée $P \wedge Q$, comme étant l'assertion vraie lorsque les deux assertions P et Q sont vraies, fausse sinon.

On définit la ***disjonction*** « P ou Q » des assertions P et Q, notée $P \vee Q$, comme étant l'assertion vraie lorsque l'une au moins des assertions P et Q est vraie, fausse sinon.

P	Q	P et Q	P ou Q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

TABLE 3 – Table de vérité de la disjonction et la conjonction.

Remarques

R1 – Le *ou* mathématique est le *ou inclusif*.

R2 – On utilise bien souvent la notation $\left\{\begin{array}{l}P\\Q\end{array}\right.$ pour « P et Q » et parfois $\left|\begin{array}{l}P\\\text{ou}\\Q\end{array}\right.$ pour « P ou Q ».

R3 – Les logiciens notent $P \vee Q$ pour « P ou Q » et $P \wedge Q$ pour « P et Q ».

C Implication

Définition : Implication

Étant donné des assertions P et Q, l'***implication***, notée $P \Rightarrow Q$ et lue « P implique Q » est l'assertion « Si P est vraie, Q est vraie » :

- vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P est fausse,
- fausse sinon.

Il s'agit de l'assertion $\overline{P} \vee Q$ (c'est-à-dire $(\text{non}\,P)$ ou Q).

P est appelé l'***hypothèse*** de l'implication, et Q sa ***conclusion***.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

TABLE 4 – Table de vérité de l'implication.

Exemple

"Il pleut" ⇒ "Il y a des nuages". Les deux dernières lignes s'explique par le fait qu'une journée sans pluie (qu'il y ait ou non des nuages) ne peut contredire cette affirmation !

Propriété

Dire que $P \not\Rightarrow Q$, c'est dire que P est vraie et pourtant Q est fausse.
Autrement dit, la négation de $P \Rightarrow Q$ est $P \wedge \overline{Q}$ (c'est-à-dire P et $(\text{non}\,Q)$.)

Exemple

La négation de "Il pleut" ⇒ "Il y a des nuages" est "Il pleut et pourtant il n'y a pas de nuage".

Propriété

Soient P et Q des assertions.
Dire que $P \Rightarrow Q$ est vraie, c'est dire que :

- *« Pour que P soit vraie, il faut que Q soit vraie »* (**Condition nécessaire**),
- *« Pour que Q soit vraie, il suffit que P soit vraie »* (**Condition suffisante**).

Remarque

En supposant vrai quelque chose de faux, on pourrait démontrer n'importe quoi !

Exemple

« Je suis en sup » ⇒ « J'ai le Bac » est vraie.

Remarques

R 1 – ⚠ : « $P \Rightarrow Q$ » (vrai) ne veut pas dire P vraie : par exemple, « $1 > 2 \Rightarrow 2 > 4$ » est vraie et pourtant « $1 > 2$ » est fausse.

R 2 – ⚠ : On peut avoir quelques bizarreries : « $0 \neq 0$ » ⇒« $0 = 0$ » est vraie et « $0 = 0$ » ⇒« L'eau de mer est salée. » l'est tout autant !

R 3 – ⚠ : Ce n'est pas parce que « $P \Rightarrow Q$ » est vrai que « $Q \Rightarrow P$ » l'est : par exemple, « Je suis en sup » ⇒« J'ai le Bac » est vrai et pourtant « J'ai le Bac » ⇒ « Je suis en sup » ne l'est pas ! ! !

Définition : Implication réciproque

Soient P et Q deux assertions.
L'implication $Q \Rightarrow P$ est appelée ***implication réciproque*** de $P \Rightarrow Q$

d Équivalence

Définition : Équivalence

Étant donné des assertions P et Q, l'***équivalence***, notée $P \iff Q$ et lue « P est équivalent à Q » est l'assertion $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

TABLE 5 – Table de vérité de l'équivalence.

Propriété

Soient P et Q des assertions.
« $P \Longleftrightarrow Q$ » est synonyme des trois assertions suivantes :

- *« P et Q sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses »,*
- *« P est vraie si et seulement si Q est vraie »,*
- *« Pour que P soit vraie, il faut et il suffit que Q soit vraie »* (**Condition nécessaire et suffisante** *ou* **Caractérisation**).

Remarque

Pourquoi a-t-on fait le bon choix pour les deux premières lignes de la table de vérité de « $P \Rightarrow Q$ » ? Sinon on serait retombé sur l'une des autres relations :

P	Q	P et Q	Q	$P \Longleftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	V	V

3 Propriétés

Propriété

Soient P, Q, R des assertions.

(i) $\overline{\overline{P}} \Longleftrightarrow P$

(ii) Lois de Morgan[1] *:*

$$\text{non}(P \text{ ou } Q) \Longleftrightarrow \big[(\text{non}\, P) \text{ et } (\text{non}\, Q)\big] \qquad \textit{ie} \qquad \overline{P \vee Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

$$\text{non}(P \text{ et } Q) \Longleftrightarrow \big[(\text{non}\, P) \text{ ou } (\text{non}\, Q)\big] \qquad \textit{ie} \qquad \overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$$

(iii) Distributivités :

$$\big[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)\big] \Longleftrightarrow \big[(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)\big] \ \textit{ie}\ P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$\big[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)\big] \Longleftrightarrow \big[(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)\big] \ \textit{ie}\ P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

(iv) Rappel : $\big[P \Rightarrow Q\big] \Longleftrightarrow \big[(\text{non}\, P) \text{ ou } Q\big]$

(v) L'implication $\Big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)\Big) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ *est (toujours) vraie.*

(vi) Rappel : $\text{non}(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow \big[P \text{ et } (\text{non}\, Q)\big]$
(à la base du raisonnement par ***l'absurde****)*

(vii) $\big[P \Rightarrow Q\big] \Longleftrightarrow \big[(\text{non}\, Q) \Rightarrow (\text{non}\, P)\big]$
(à la base du raisonnement par ***contraposée****)*

(viii) $\big[P \Leftrightarrow Q\big] \Longleftrightarrow \big[(\text{non}\, P) \Leftrightarrow (\text{non}\, Q)\big]$

Démonstration

(i) Dire que la négation de P est fausse, c'est dire que ... P vraie !

(ii) Table de vérité

(iii) Table de vérité

(iv) ok

(v) Table de vérité de $A = \Big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)\Big) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$:

---

1. 

Augustus de Morgan (Madurai Tamil Nadu (Inde), 1806 - Angleterre, 1871) est un mathématicien anglais particulièrement célèbre pour ses apports en logique et plus particulièrement les lois qui portent son nom sur la négation de la conjonction et de la disjonction en logique, et son équivalent en théorie des ensembles pour le complémentaire d'une réunion et d'une intersection.

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	A
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

(vi) En utilisant la loi de Morgan :

$$\text{non}(P \Rightarrow Q) \iff \text{non}((\text{non}\,P) \text{ ou } Q) \iff \left[\text{non}(\text{non}\,P) \text{ et } (\text{non}\,Q)\right] \iff \left[P \text{ et } (\text{non}\,Q)\right]$$

(vii) $\left[(\text{non}\,Q) \Rightarrow (\text{non}\,P)\right] \iff \left[\text{non}(\text{non}\,Q) \text{ ou } (\text{non}\,P)\right] \iff \left[(\text{non}\,P) \text{ ou } Q\right] \iff \left[P \Rightarrow Q\right]$.

(viii) Dire que P et Q ont même valeur logique, c'est dire que c'est aussi le cas pour non P et non Q.

$\square$

Remarques

R1 – D'après (iii), dire que $\left\{\begin{array}{l} P \\ \left|\begin{array}{l} Q \\ \text{ou} \\ R \end{array}\right. \end{array}\right.$ c'est dire que $\left|\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} P \\ Q \end{array}\right. \\ \text{ou} \\ \left\{\begin{array}{l} P \\ R \end{array}\right. \end{array}\right.$ et dire que $\left|\begin{array}{l} P \\ \text{ou} \\ \left\{\begin{array}{l} Q \\ R \end{array}\right. \end{array}\right.$ c'est dire que $\left\{\begin{array}{l} P \text{ ou } Q \\ P \text{ ou } R \end{array}\right.$

R2 – D'après (v) si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$, alors $P \Rightarrow R$. On dit que l'implication est ***transitive***. Pour $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)$, on note $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$.

Exemple

« Je suis en sup » $\Rightarrow$ « J'ai le Bac » et « J'ai le Bac » $\Rightarrow$ « Je sais compter » sont vraies, donc « Je suis en sup » $\Rightarrow$ « Je sais compter » est également vraie.

4 Méthodes de démonstration

a Raisonnements directs

- Pour démontrer une assertion, on peut bien sûr le faire directement en la déduisant d'un résultat connu.

Exemple

C'est le cas lorsque vous appliquez un théorème connu dans un raisonnement.

- Pour démontrer que P ou Q est vraie, on peut aussi supposer P est fausse et montrer que dans ce cas Q est vraie.
  (En effet, $((\text{non}\, P) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \text{ ou } Q)$.)
- Pour démontrer directement $P \Rightarrow Q$, on **suppose** P vraie et on essaye de montrer que Q est vraie. Dans ce cas, on rédige **toujours** :

> Supposons que (P vraie).
> Montrons que/but (Q est vraie).
> ⋮
> Donc (Q est vraie).

- Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est fausse, il suffit de (et il faut) démontrer que P est vraie et pourtant Q est fausse.
  (En effet, $\text{non}(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \text{ et non}\, Q$.)
- Pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$, on procède généralement de l'une des manière suivantes :
  ⋆ soit on démontre $P \Rightarrow Q$ puis $Q \Rightarrow P$,
  ⋆ soit on démontre $P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow P_n \Leftrightarrow Q$ où $P_1, \dots P_n$ sont des assertions intermédiaires.

Exemple

Chercher une condition nécessaire et suffisante sur des réels a et b pour que $x^2 + ax + b = 0$ ait deux solutions réelles non nulles et opposées.

- **Condition nécessaire (Analyse)** : Supposons que ce soit le cas. Soient r et $-r$ les solutions. On a

$$\begin{cases} r^2 & +ar & +b & = 0 \\ r^2 & -ar & +b & = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} 2ar & = 0 & {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \\ r^2 - ar + b & = 0 \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} a & = 0 & (\text{car } r \neq 0.) \\ r^2 & = -b \end{cases}$$

  Si c'est le cas, on a donc nécessairement $a = 0$ et $b < 0$.
- **Condition suffisante (Synthèse)** : Réciproquement, on suppose $a = 0$ et $b < 0$.
  But : $x^2 + ax + b = 0$ (1) a deux solutions réelles non nulles et opposées.
  Or (1) $\Leftrightarrow x^2 = -b \Leftrightarrow x = \sqrt{-b}$ ou $x = -\sqrt{-b}$ (car $-b > 0$), avec $\sqrt{-b} \neq 0$.
- **Conclusion** : On a montré que

$$\boxed{x^2 + ax + b = 0 \text{ a deux solutions réels non nulles et opposées ssi } a = 0 \text{ et } b < 0.}$$

Remarque

Dans cet exemple, on dit qu'on a raisonné par ***condition nécessaire/condition suffisante*** ou ***analyse/synthèse***.

- Pour montrer une suite d'équivalences du type $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow P_3$, il suffit de montrer $P_i \Rightarrow P_j$ puis $P_j \Rightarrow P_k$ et enfin $P_k \Rightarrow P_i$ — c'est-à-dire $P_i \Rightarrow P_j \Rightarrow P_k \Rightarrow P_i$ (en choisissant convenablement l'ordre i, j, k parmi 1, 2 et 3, qui influe parfois spectaculairement sur la difficulté de la démonstration).

b Raisonnement par l'absurde

- Pour montrer, que P est vraie, on peut **supposer** P fausse et essayer d'aboutir à une contradiction. (On utilise $P \Longleftrightarrow \overline{\overline{P}}$.)
Dans ce cas, on utilise **toujours** une rédaction du type :

> Supposons, par l'absurde, que (P fausse),
> ⋮
> Contradiction.

- En particulier, pour montrer que $P \Rightarrow Q$, on peut supposer que P **vraie et** Q **fausse** et en déduire une contradiction.
(On utilise la propriété $[P \Rightarrow Q] \Longleftrightarrow \overline{P \wedge \overline{Q}}$.)
Dans ce cas, on utilise **toujours** une rédaction du type :

> Supposons, par l'absurde que P vraie et Q fausse,
> ⋮
> Contradiction.

Exemples

E 1 – Soit p un entier naturel. Montrer que si p^2 est pair, alors p est pair.
On suppose $p \in \mathbb{N}$ et p^2 est pair.
But : p est pair
Supposons, **par l'absurde**, que p est impair. On peut alors trouver un entier k tel que $p = 2k+1$.
Mais alors $p^2 = 4(k^2+k)+1$ n'est pas pair : **contradiction**.

Conclusion : un entier naturel p tel que p^2 est pair est pair.

E 2 – Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Supposons, **par l'absurde**, que ce n'est pas le cas. On peut alors trouver $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ où la fraction est irréductible.
Mais alors $p^2 = 2q^2$ et donc p est un entier naturel tel que p^2 est pair. D'après ce que l'on a démontré ci-dessus, p est nécessairement pair et on peut trouver un entier k tel que $p = 2k$.
Par suite, $p^2 = 4k^2$ et donc $2q^2 = 4k^2$ puis $q^2 = 2k^2$.
On en déduit que q^2 est pair et donc, toujours avec le résultat précédent, q est pair.
Mais il y a **contradiction** car on ne peut avoir à la fois p pair, q pair et $\dfrac{p}{q}$ irréductible.

Conclusion : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

C Le raisonnement par contraposée

- Pour montrer que $P \Rightarrow Q$, on peut montrer que $(\text{non}\, Q) \Rightarrow (\text{non}\, P)$ (on utilise la propriété $[P \Rightarrow Q] \iff [(\text{non}\, Q) \Rightarrow (\text{non}\, P)]$) : on **suppose** Q fausse et on essaye de montrer que P est fausse.
  Dans ce cas, on rédige **toujours** :

> Par contraposée : supposons que (Q fausse)
> Montrons que/but (P est fausse)
> ⋮
> Donc (P est fausse).

Exemple

Soit x un nombre réel. Montrer que si pour tout réel ε strictement positif, $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$ alors $x = 0$.
Par **contraposée** : **supposons** que $x \neq 0$.
But : il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $x < 0$ ou $x > \varepsilon$.
Il y a deux cas possibles : (raisonnement par **disjonction de cas**)

- soit $x < 0$ et n'importe quel $\varepsilon > 0$ convient,
- soit $x > 0$ (car $x \neq 0$) et on peut poser $\varepsilon = \dfrac{x}{2}$. Alors $\varepsilon > 0$ et $x > \varepsilon$.

Dans les deux cas, on a bien l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que $x < 0$ ou $x > \varepsilon$.

Conclusion : si pour tout réel ε strictement positif, $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$ alors $x = 0$.

II QUANTIFICATEURS

1 Définitions

Notation

Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un élément x d'un ensemble E fixé.

- ***Quantificateur universel*** : on note
$$\forall\, x \in E, \quad P(x)$$
  lorsque tous les éléments de E vérifient P.
- ***Quantificateur existentiel*** : on note
$$\exists\, x \in E, \quad P(x)$$
  lorsqu'il existe (au moins) un élément de E vérifient P ; et
$$\exists !\, x \in E \mid P(x)$$
  lorsqu'il existe un unique élément de E vérifient P.

Remarques

R 1 – Le x de la définition est muet : on aurait tout aussi bien pu le noter y, z, etc. On prendra tout de même garde à ne pas prendre une notation déjà utilisée dans le raisonnement.

R 2 – On écrit **toujours** le quantificateur **avant** la proposition à quantifier.

R 3 – On ne mélange **jamais** quantificateur (et même connecteur logique $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$...) et phrase en français : il est par exemple exclu d'écrire quelque chose du style

« ~~$\forall m, n \in \mathbb{Z}$, la somme de m et n est un entier.~~ »

Il faudra choisir entre

$$\text{« } \forall m, n \in \mathbb{Z}, \quad m+n \in \mathbb{Z} \text{ »}$$

et

« La somme de deux entiers est un entier. »

R 4 – Lorsque l'on écrit $\forall x \in E, \quad P(x)$, le x n'est défini que dans cette *phrase mathématique*. Pour pouvoir continuer de l'utiliser ensuite, il faut écrire

« Soit $x \in E$. $P(x)$ est vrai et donc... »

De même pour $\exists x \in E, \quad P(x)$:

« On pose $x \in E$ tel $P(x)$ est vrai (un tel x existe bien). Alors... »

R 5 –
- Pour démontrer
$$\forall x \in E, \quad P(x)$$
on rédige **toujours** :

> Soit $x \in E$.
> **But** : $P(x)$ est vrai.
> $\vdots$

- Pour démontrer
$$\exists x \in E, \quad P(x)$$
c'est en général moins facile, car il s'agit d'exhiber un élément x vérifiant $P(x)$. La rédaction contiendra en général :

> Posons $x = \ldots$ alors
> $\vdots$
> donc $P(x)$ est vrai.

- Pour démontrer
$$\exists! x \in E \mid P(x)$$
il y a deux choses à démontrer
  - ⋆ L'existence d'un élément x de E vérifiant $P(x)$
  - ⋆ L'unicité de cet élément : généralement on suppose qu'on en a deux x_1 et x_2 et on montre que $x_1 = x_2$.

Exemples

E1 – $\forall\, x \in \mathbb{R},\;\; x^2 \geqslant 0,$

E2 – $\forall\, x \in \mathbb{R}_*^+,\;\; \exists!\, y \in \mathbb{R}^+ \mid y^2 = x.$

En effet : soit $x \in \mathbb{R}_*^+$.

But : $\exists!\, y \in \mathbb{R}^+ \mid y^2 = x$

- **Existence :** $y = \sqrt{x}$ convient.
- **Unicité :** si y_1 et y_2 conviennent, alors $y_1^2 = x = y_2^2$.
  Et donc $y_1^2 - y^2 = 0$, c'est-à-dire $(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$ et on a donc soit $y_1 = y_2$, soit $y_1 = -y_2$.
  Mais si $y_1 = -y_2$, alors, comme y_1 est un réel positif et $-y_2$ est un réel négatif et qu'ils sont égaux, ils sont nul. Mais on aurait alors $x = 0$ ce qui est exclus car $x \in \mathbb{R}_+^*$.
  C'est donc que $y_1 = y_2$, d'où l'unicité.

On a donc bien $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}_*^+,\;\; \exists!\, y \in \mathbb{R}^+ \mid y^2 = x.}$

2 De l'ordre des quantificateurs

⚠ Si l'ordre de deux mêmes quantificateurs n'est pas important

$$\Big(\forall\, x \in E,\;\; \forall\, y \in F,\;\; P(x,y)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall\, y \in F,\;\; \forall\, x \in E,\;\; P(x,y)\Big)$$

$$\Big(\exists\, x \in E,\;\; \exists\, y \in F,\;\; P(x,y)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists\, y \in F,\;\; \exists\, x \in E,\;\; P(x,y)\Big)$$

l'ordre de deux quantificateurs différents est important.

Exemple

« Toute personne a un nom » s'écrit, en notant P l'ensemble des personnes, N l'ensemble des noms et $A(p,n)$ le fait que n soit le nom d'une personne p

$$\forall\, p \in P,\;\; \exists\, n \in N,\;\; A(p,n)$$

Mais

$$\exists\, n \in N,\;\; \forall\, p \in P,\;\; A(p,n)$$

signifie en bon français « Il y a un nom qui soit celui de toute personne. »

Cependant, si

$$\exists\, x \in E,\;\; \forall\, y \in F,\;\; P(x,y) \tag{1}$$

on aura a fortiori

$$\forall\, y \in F,\;\; \exists\, x \in E,\;\; P(x,y). \tag{2}$$

Démonstration

En effet, supposons que (1) soit vraie : on a un $x_0 \in E$ tel que $\forall\, y \in F,\;\; P(x_0, y)$.
Soit $y \in F$. But : $\exists\, x \in E,\;\; P(x,y)$.
Il suffit de poser $x = x_0$ qui convient car $P(x_0, y)$ est vrai.
Ainsi, $\forall\, y \in F,\;\; \exists\, x \in E,\;\; P(x,y)$. □

Remarque

Lorsque l'on a un $\exists$ après un $\forall$, la deuxième variable **dépend** de la première. Dans l'exemple, le nom dépend de la personne.

3 Négation des quantificateurs

Propriété

Soit E un ensemble, $P(x)$ une assertion dépendant d'un élément x de E.
La négation de

$$\forall x \in E, \quad P(x)$$

est

$$\exists x \in E, \quad \text{non}(P(x)).$$

La négation de

$$\exists x \in E, \quad P(x)$$

est

$$\forall x \in E, \quad \text{non}(P(x)).$$

Exemple

Par définition, la limite d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est, lorsqu'il existe, le réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \in N, \quad n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \epsilon$$

Le fait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas ℓ comme limite s'écrit

$$\exists \varepsilon > 0, \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \exists n \in N, \quad n \geqslant N \text{ et } |u_n - \ell| > \epsilon$$

Remarque

Ainsi, pour montrer que $(\forall x \in E, \quad P(x))$ est faux, il faut **trouver** un x tel que $P(x)$ soit faux : on dit que x est un ***contre-exemple***.

III PRINCIPE DE RÉCURRENCE

Le principe de récurrence, à la base du raisonnement par récurrence, dit :

Principe de récurrence

Si $A \subset \mathbb{N}$ tel que

H1 : n_0 est le plus petit élément de A

H2 : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \in A \Rightarrow n+1 \in A)$,

alors $A = [\![n_0, +\infty [\![$.

1 Récurrence simple

Propriété

Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion définie pour un entier $n \geqslant n_0$ quelconque où n_0 est un entier fixé.
On suppose que

H1 : *$\mathscr{P}(n_0)$ est vraie*

H2 : *Si $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, alors ($\mathscr{P}(n)$ vraie $\Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ vraie)*

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Remarques

R 1 – La rédaction à adopter pour ce type de raisonnement est très stricte et à respecter absolument :

1°) Soit $\mathscr{P}(n)$ l'assertion « ... » définie pour tout entier $n \geqslant n_0$.
Montrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ par récurrence sur n.

2°) **Initialisation** : $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie ;

3°) **Hérédité** : supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour **un** $n \geqslant n_0$.
Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. (Faire apparaître l'hypothèse de récurrence !)

4°) **La récurrence est établie.**

On a ainsi démontré que $\boxed{\forall\, n \geqslant n_0,\ \ \mathscr{P}(n) \text{ est vraie.}}$

R 2 – ⚠ Pas de « pour tout n » dans $\mathscr{P}(n)$ sinon le raisonnement est faux !

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.
Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ 0 \leqslant u_n \leqslant 4$.

1°) Soit, pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $0 \leqslant u_n \leqslant 4$ ».
Montrons, par récurrence sur n, que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2°) **Initialisation** : $u_0 = 0$ donc, en particulier, $0 \leqslant u_0 \leqslant 4$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie ;

3°) **Hérédité** : supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour **un** $n \geqslant 0$. On a

$$0 \leqslant u_n \leqslant 4 \qquad \text{(HR)}$$

But : $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Or $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ et (HR) nous donne que

$$4 \leqslant 3u_n + 4 \leqslant 16$$

et, par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}^+$,

$$2 \leqslant \sqrt{3u_n + 4} \leqslant 4$$

donc, en particulier,

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$

et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

4°) **La récurrence est établie.**

On a ainsi démontré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 4.}$

Remarque

L'initialisation est très importante : par exemple la propriété « $n+1=n$ » est héréditaire sur $\mathbb{N}$, mais ne peut être initialisée (et pour cause ! ! !)

2 Récurrence à pas fixé

Propriété : Récurrence d'ordre p

Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion définie pour un entier $n \geqslant n_0$ quelconque où n_0 est un entier fixé, et $p \in \mathbb{N}^*$ fixé.

On suppose que

H1 : *$\mathscr{P}(n_0), \ldots, \mathscr{P}(n_0+p-1)$ sont vraies (p initialisations)*

H2 : *Si $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, alors ($\mathscr{P}(n), \ldots, \mathscr{P}(n+p-1)$ vraies $\Rightarrow \mathscr{P}(n+p)$ vraie) (p hypothèses)*

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Démonstration

On prouve par récurrence simple $\mathscr{Q}(n)$: « $\mathscr{P}(n), \ldots, \mathscr{P}(n+p-1)$ vraies » vrai pour $n \geqslant n_0$. □

Remarque

La rédaction à adopter pour ce type de raisonnement est très stricte et à respecter absolument :

1°) Soit $\mathscr{P}(n)$ l'assertion « ... » définie pour tout entier $n \geqslant n_0$.
Montrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ par récurrence d'ordre p sur n.

2°) **Initialisation** : $\mathscr{P}(n_0), \ldots, \mathscr{P}(n_0+p-1)$ sont vraies ;

3°) **Hérédité** : supposons que $\mathscr{P}(n), \ldots, \mathscr{P}(n+p-1)$ sont vraies pour **un** $n \geqslant n_0$.
Montrons que $\mathscr{P}(n+p)$ est vraie. (Faire apparaître l'hypothèse de récurrence !)

4°) **La récurrence est établie.**

On a ainsi démontré que $\boxed{\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n) \text{ est vraie.}}$

Exemple

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=0,\ u_1=-1,\ u_2=2$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_{n+3}=u_{n+2}+u_{n+1}-u_n$.
Montrer que $\forall\, n\in\mathbb{N},\quad, u_n=(n-1)+(-1)^n$.

1°) Soit $\mathscr{P}(n)$ l'assertion « $u_n=(n-1)+(-1)^n$ » définie pour tout entier $n\geqslant 0$.
Montrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n\geqslant 0$ par récurrence d'ordre 3 sur n.

2°) **Initialisation** : Comme on a $u_0=0=-1+(-1)^0$, $u_1=-1=1-1+(-1)^1$ et $u_2=2=2-1+(-1)^2$, $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont vraies (3 initialisations) ;

3°) **Hérédité** : supposons que pour **un** $n\geqslant 0$, $\mathscr{P}(n), \mathscr{P}(n+1)$ et $\mathscr{P}(n+2)$ sont vraies.
Montrons que $\mathscr{P}(n+3)$ est vraie.
D'après la relation de récurrence définissant $(u_n)_n$,

$$u_{n+3}=u_{n+2}+u_{n+1}-u_n$$

et donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}u_{n+3}&=(n+1)+(-1)^{n+2}+n+(-1)^{n+1}-(n-1)-(-1)^n\\&=n+2+(-1)^n\big((-1)^2+(-1)-1\big)\\&=n+2+(-1)^n(-1)\\&=n+2+(-1)^{n+3}.\end{aligned}$$

4°) La récurrence est établie.

On a ainsi démontré que $\boxed{\forall\, n\geqslant 0,\quad u_n=(n-1)+(-1)^n.}$

3 Récurrence forte

Propriété

Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion définie pour un entier $n\geqslant n_0$ quelconque où n_0 est un entier fixé.
On suppose que

H1 : *$\mathscr{P}(n_0)$ est vraie*

H2 : *Si $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant n_0$, alors ($\forall\, k\in[\![n_0,n]\!],\quad \mathscr{P}(k)$ vraie $\Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ vraie)*

Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Démonstration

On prouve par récurrence simple $\mathscr{Q}(n)$: « $\forall\, k\in[\![n_0,n]\!],\quad \mathscr{P}(k)$ est vraie » vrai pour $n\geqslant n_0$. □

Remarques

R1 – ⚠ Parfois, plusieurs initialisations sont nécessaires !

R2 – La rédaction à adopter pour ce type de raisonnement est également très stricte et à respecter absolument :

1°) Soit $\mathscr{P}(n)$ l'assertion « ... » définie pour tout entier $n \geqslant n_0$.
Montrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ par récurrence forte sur n.

2°) **Initialisation** : $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie ;

3°) **Hérédité** : supposons que pour **un** $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![n_0, n]\!]$.
Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. (Faire apparaître l'hypothèse de récurrence !)

4°) La récurrence est établie.

On a ainsi démontré que $\boxed{\forall\, n \geqslant n_0,\ \ \mathscr{P}(n) \text{ est vraie.}}$

Exemple

Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $\exists\,(k,q) \in \mathbb{N}^2,\ \ n = 2^k(2q+1)$.

1°) Soit $\mathscr{P}(n)$ l'assertion « $\exists\,(k,q) \in \mathbb{N},\ \ n = 2^k(2q+1)$ » définie pour tout entier $n \geqslant 1$.
Montrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$ par récurrence forte sur n.

2°) **Initialisation** : pour $n = 1$, $k = q = 0$ conviennent ;

3°) **Hérédité** : supposons que pour **un** $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Deux cas sont possibles :
- Soit $n+1$ est impair, et alors on peut trouver $q \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2q+1 = 2^0(2q+1)$ ce qui donne $\mathscr{P}(n+1)$.
- Soit $n+1$ est pair et on peut alors trouver $m \in \mathbb{N}$, $m < n+1$ tel que $n+1 = 2m$. Mais alors $m \leqslant n$ donc par (3), on a $(k,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m = 2^k(2q+1)$ ce qui donne $n+1 = 2^{k+1}(2q+1)$ et qui prouve $\mathscr{P}(n+1)$.

4°) La récurrence est établie.

On a ainsi démontré que $\boxed{\forall\, n \geqslant 1,\ \ \exists\,(k,q) \in \mathbb{N}^2,\ \ n = 2^k(2q+1).}$