Suites numériques

Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une suite peut être vue comme une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ou comme une application $n \in \mathbb{N} \mapsto u_n \in \mathbb{K}$, c'est équivalent.

On peut alors noter $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array} \right.$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$ ou (u_n) **MAIS PAS u_n !!!**.

I Cas des suites réelles

1 Limites infinies

Définition : Limite infinie

- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $+\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant A$$

ou de manière équivalente

$$\forall A \geqslant 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant A$$

On note alors $u_n \to +\infty$.

- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $-\infty$ lorsque $-u_n \to +\infty$ soit

$$\forall B \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant B$$

ou de manière équivalente

$$\forall B \leqslant 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant B$$

On note alors $u_n \to -\infty$.

2 Limites et ordre

Propriété : Passage des inégalités à la limite

Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u \to \ell \in \mathbb{R}$ et $v \to \ell' \in \mathbb{R}$ et si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

*Si on suppose à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, **l'inégalité devient large à la limite** : $\ell \leqslant \ell'$.*

Propriété

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors

- *Si $\ell > a$, à partir d'un certain rang $u_n > a$.*
- *Si $\ell < a$, à partir d'un certain rang $u_n < a$.*

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

- *$v \to \ell$*
- *$w \to \ell$*
- *apcr $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$*

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

- *$v \to +\infty$*
- *apcr $u_n \geqslant v_n$*

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

- *$w \to -\infty$*
- *apcr $u_n \leqslant w_n$*

alors $u \to -\infty$.

3 Opérations sur les limites

Propriété

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n \to \lambda \ell$.*

(ii) *Si $u \to 0$ et v bornée, alors $uv \to 0$.*

Propriété

Si $u \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors lorsque ces opérations sont bien définies,

- $u+v \to \ell_1 + \ell_2$
- $uv \to \ell_1 \ell_2$

Propriété

- *Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}^*$, alors à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$ et* $\dfrac{1}{u_n} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} & \text{si } \ell \text{ finie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- *Si $u_n \to 0$ et à partir d'un certain rang $u_n > 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \to +\infty$.*
- *Si $u_n \to 0$ et à partir d'un certain rang $u_n > 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \to -\infty$.*

Propriété : Convergence des suites géométriques réelles

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- *Si $q = 1$, $q^n \to 1$.*
- *Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.*
- *Si $q > 1$, $q^n \to +\infty$.*
- *Si $q \leqslant -1$, (q^n) n'a pas de limite. Si $q < -1$, la suite n'est ni majorée, ni minorée.*

II Les suites monotones

1 Théorème de la limite monotone

Théorème : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (respectivement décroissante).

(i) *Si u est majorée (respectivement minorée) alors u converge vers $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ (respectivement $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$).*

(ii) *Si u n'est pas majorée (resp. minorée), alors $u \to +\infty$ (respectivement $u \to -\infty$).*

Corollaire

Si u est une suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée), alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant \lim u$ (respectivement $u_n \geqslant \lim u$).
De plus, les inégalités sont strictes en cas de stricte monotonie.

2 Suites adjacentes

Définition : Suites adjacentes

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u et v sont adjacentes si

- l'une est croissante,
- l'autre est décroissante,
- $v - u \to 0$.

Propriété

Si u, v sont adjacentes avec u croissantes, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$, les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.

III CRITÈRES SÉQUENTIELS

1 Caractérisation séquentielle des bornes inférieure et supérieure

Propriété

Soit A partie non vide $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in A, \quad x \leqslant \alpha \\ \exists\, (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \quad a_n \to \alpha \end{cases}$$

$$\beta = \inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in A, \quad x \geqslant \beta \\ \exists\, (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \quad a_n \to \beta \end{cases}$$

2 Caractérisation séquentielle de la densité

Propriété

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Corollaire

(i) Tout réel est limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.

(ii) $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

IV EXTENSION AUX SUITES COMPLEXES

Notation

Soit $z = (z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $\mathfrak{Re}(z) = (\mathfrak{Re}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathfrak{Im}(z) = (\mathfrak{Im}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\overline{z} = \left(\overline{z_n}\right) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $|z| = (|z_n|) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}$ est dite convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n - \ell| \to 0$, c'est-à-dire

$$\forall\, \varepsilon > 0, \ \ \exists\, N \in \mathbb{N}, \ \ \forall\, n \geqslant N, \ \ |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Propriété

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\ell \in \mathbb{C}$. $z_n \to \ell \Longleftrightarrow \mathfrak{Re}\, z_n \to \mathfrak{Re}\, \ell$ et $\mathfrak{Im}\, z_n \to \mathfrak{Im}\, \ell$

Définition

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \ \ |z_n| \leqslant M$.

Propriété : Suites géométriques complexes

Soit $q \in \mathbb{C}$.

- *Si $q = 1$, $q^n \to 1$.*
- *Si $\left|q\right| < 1$, $q^n \to 0$.*
- *Si $\left|q\right| > 1$, (q^n) n'est pas bornée et donc diverge.*
- *Si $\left|q\right| = 1$ et $q \neq 1$, (q^n) diverge en étant bornée.*

V Suites récurrentes

1 Cas général

Le but est d'étudier les suites récurrentes réelles d'ordre 1 générales :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = f(u_n)$$

avec $f : D \to \mathbb{R}$.

Propriété

Si $u_n \to \ell \in D$ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$ (ℓ est un point fixe de f).

Méthode

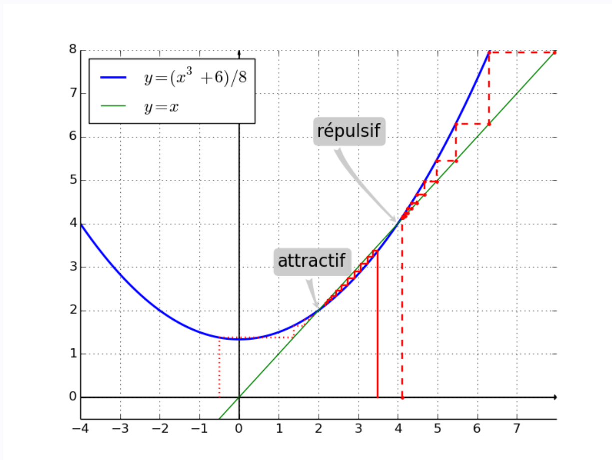
- On commence en général par faire un dessin, et par voir quelles propriétés vérifient directement la suite.
- Ensuite, les premières choses à cibler sont les **intervalles stables par** f : I tel que $f(I) \subset I$.
  Alors, par récurrence, si à partir d'un certain rang $u_{n_0} \in I$, la suite est bien définie et $\forall n \geqslant n_0,\ \ u_n \in I$.
  Vu la proriété précédente, bien souvent, l'une des bornes de l'intervalle sera un point fixe de f. (Il faut donc chercher les points fixes !)
  On pose en général $g(x) = f(x) - x$: les points fixes de f sont les zéros de g.
  Il faut aussi s'assurer que la suite est bien définie !
- Ensuite, on s'intéresse à la monotonie de f.
  - ⋆ La monotonie de la suite peut se trouver directement en remarquant que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$: il est donc primordial de connaître le signe de g.
  - ⋆ Si f est **croissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **monotone**.
    (Si $u_{n_0} \leqslant u_{n_0+1}$, ie $g(u_{n_0}) \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$u_n = f^{n-n_0}(u_{n_0}) \leqslant f^{n-n_0}(u_{n_0+1}) = u_{n+1}$$
    et si $u_{n_0} \geqslant u_{n_0+1}$, ie $g(u_{n_0}) \leqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$u_n = f^{n-n_0}(u_{n_0}) \geqslant f^{n-n_0}(u_{n_0+1}) = u_{n+1}.)$$
  - ⋆ Si f est **décroissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_{2n})_{n \geqslant \frac{n_0}{2}}$ et $(u_{2n+1})_{n \geqslant \frac{n_0-1}{2}}$ sont **monotones**, de monotonie contraire. Elles sont en fait solution de $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ avec $f \circ f$ croissante.
    Lorsqu'elles convergent vers une même limite (c'est-à-dire qu'elles sont adjacentes), alors (u_n) converge vers cette limite. Notons que les points fixes de f sont des points fixes de $f \circ f$ (mais la réciproque est fausse en général.)

Exemple

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 8}{6}.$$

On pose donc $f(x) = \dfrac{x^2+8}{6}$ et $g(x) = f(x) - x = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{6} = \dfrac{(x-2)(x-4)}{6}$. En particulier, les points fixes de f sont 2 et 4. f est paire, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto \frac{x}{3}$. Les suites (u_n) sont toujours définies sans problème.

x	$-\infty$	-4	-2	0	2	4	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	4 ↘	2 ↘	$\frac{4}{3}$ ↗	2 ↗	4 ↗	$+\infty$
$g(x)$			$+$		0 $-$	0	$+$



Intervalles stables intéressants : $[0,2[$, $]2,4[$ et $]4,+\infty[$.

- $\boxed{\text{Si } u_0 \in]-2,2[,}$ $u_1 \in [0,2[$ stable par f, donc $\forall\, n \geqslant 1,\ \ u_n \in [0,2[$.
  Si $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) > 0$, donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante. Remarquons qu'ici, on a même $(u_n)_{n\geqslant 0}$ strictement croissante.
  Comme (u_n) est croissante et majorée par 2, elle converge vers $\ell \in [0,2]$. Comme f est continue, ℓ est un point fixe de f, donc $\ell = 2$.
  $\boxed{u_n \to 2 \text{ en croissant strictement.}}$
- $\boxed{\text{Si } u_0 \in]-4,-2[\cup]2,4[,}$ $u_1 \in]2,4[$ stable par f, donc $\forall\, n \geqslant 1,\ \ u_n \in]2,4[$.
  Si $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0$, donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.
  Comme $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 2, elle converge vers $\ell \in [2,4]$.
  Comme f est continue, ℓ est un point fixe de f. Comme on a $\ell \leqslant u_1 < 4$, $\ell = 2$.
  $\boxed{u_n \to 2 \text{ en décroissant strictement au moins à partir du rang 1.}}$
- $\boxed{\text{Si } u_0 \in]-\infty,-4[\cup]4,+\infty[,}$ $u_1 \in]4,+\infty[$ stable par f, donc $\forall\, n \geqslant 1,\ \ u_n \in]4,+\infty[$.
  Si $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) > 0$, donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante. Remarquons qu'ici, on a même $(u_n)_{n\geqslant 0}$ strictement croissante.
  Si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, comme f est continue, ℓ est un point fixe de f. Comme $\ell \in [4,+\infty[$, $\ell = 4$. Or $4 < u_1 \leqslant \ell$ ce qui est contradictoire.
  Comme $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et non convergente, $u_n \to +\infty$.
  $\boxed{u_n \to +\infty \text{ en croissant strictement.}}$
- Si $\boxed{u_0 \in \{-2,2\}, \forall\, n \geqslant 1,\ \ u_n = 2.}$
- Si $\boxed{u_0 \in \{-4,4\}, \forall\, n \geqslant 1,\ \ u_n = 4.}$

2 Cas d'une fonction contractante

Définition

Une fonction f est dite contractante sur un segment $[a,b]$ si et seulement si on a $k < 1$ tel que $\forall\, x, x' \in [a,b],\ \ \left|f(x) - f(x')\right| \leqslant k\left|x - x'\right|$.

Cela se traduit graphiquement par le fait que les pentes des cordes ne sont « pas trop élevées ».

Méthode

Cela est interessant si $I = [a,b]$ est stable par f. Si c'est le cas, si $\ell \in [a,b]$ point fixe de f (on peut montrer qu'il existe et est nécessairement unique), si $u_0 \in [a,b]$ stable par f, alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \in [a,b]$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |u_n - \ell| = \left|f(u_{n-1}) - f(\ell)\right| \leqslant k|u_{n-1} - \ell| \leqslant \cdots \leqslant k^n|u_0 - \ell| \to 0$$

Donc directement $u_n \to \ell$, on a même une convergence exponentielle.

On peut parfois conclure rapidement grâce à l'inégalité des accroissements finis :

Théorème : Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose que

H1 *f est continue sur I*

H2 *f est dérivable sur $\mathring{I}$*

H3 *On a $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, x \in \mathring{I},\ \ \left|f'(t)\right| \leqslant k$.*

Alors f est k-lipschitzienne : $\forall\, x, x' \in [a,b],\ \ \left|f(x) - f(x')\right| \leqslant k\left|x - x'\right|$.

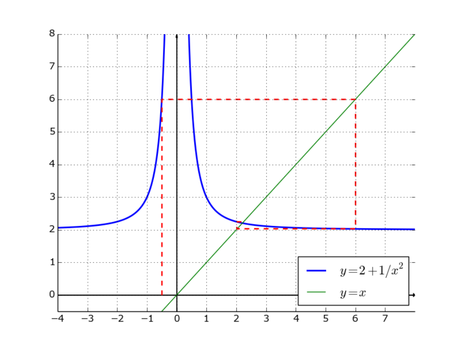
Remarque

On peut démontrer que si ℓ est un point fixe de f de classe $\mathscr{C}^1$, alors
- si $\left|f'(\ell)\right| < 1$, le point fixe est attractif, en particulier si $f'(\ell) = 0$, la convergence est quadratique, comme pour la méthode de Newton,
- si $\left|f'(\ell)\right| > 1$, le point fixe est répulsif,
- si $\left|f'(\ell)\right| = 1$, c'est le cas douteux. Tout peut arriver.

Exemple

$$u_0 \in \mathbb{R}^* \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n^2}.$$

Par récurrence, (u_n) est définie et $u_n > 2$ à partir du rang 1.
$f : x \mapsto 2 + \frac{1}{x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, paire, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
$[2,+\infty[$ est stable par f et comme $u_1 \in [2,+\infty[$, $\forall\, n \geqslant 1,\ \ u_n \in [2,+\infty[$.



$f(x)=x \iff x^3-2x^2-1=0$ et une rapide étude de fonction montre, à l'aide du théorème de la bijection, qu'il y a un unique point fixe $\alpha \in [2,+\infty[$ pour f.

f est continue sur $[2,+\infty[$, dérivable sur $]2,+\infty[$ et si $x>2$, $f'(x)\leqslant \frac{1}{4}(<1)$.

D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall\, x,x' \in [2,+\infty[,\quad |f(x)-f(x')| \leqslant \frac{1}{4}|x-x'|.$$

On en déduit que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \ |u_n-\alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}|u_1-\alpha|$ donc $\boxed{u_n \to \alpha}$ (plutôt rapidement.)

VI Relations de comparaison

1 Définition

Définition

Si $u,v\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et si v_n n'est jamais nul à partir d'un certain rang, on dit que

- u est **dominée** par v et on note $u=\mathrm{O}(v)$ lorsque $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ est bornée.
- u est **négligeable** devant v et on note $u=\mathrm{o}(v)$ ou $u_n \ll v_n$ lorsque $\frac{u_n}{v_n}\to 0$.
- u est **équivalente** à v et on note $u\sim v$ lorsque $\frac{u_n}{v_n}\to 1$.

Remarques

R 1 – La définition se généralise au cas où $(v_n)_n$ est quelconque en écrivant $u_n = v_n \times w_n$ avec $(w_n)_n$ bornée (respectivement $\to 0, 1$).

R 2 – ⚠ $u=\mathrm{o}(v)$ et $u=\mathrm{O}(v)$ traduisent une **appartenance**.

R 3 – $u=\mathrm{O}(v)$ signifie qu'il existe $K\in\mathbb{R}$ et un rang à partir duquel $|u_n|\leqslant K|v_n|$.

$u=\mathrm{o}(v)$ signifie que pour tout $\varepsilon>0$, il existe un rang à partir duquel $|u_n|\leqslant\varepsilon|v_n|$.

R 4 – Il n'y a pas unicité de l'équivalent d'une suite. En général, on choisit le plus simple.

Exemple

$$1+\frac{1}{n}\sim 1 \sim 1+\frac{1}{n^2}\sim 1+\frac{36}{n^{247}}\dots$$

R 5 – Cela ne donne que des informations asymptotiques sur les suites : au voisinage de $+\infty$, donc à partir d'un certain rang.

Exemple

- Si $p<q$, $n^p=\mathrm{o}(n^q)$.
- $\frac{\sin n}{n}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$
- $n^2+1\sim n^2$.

Propriété

Si $\alpha>0$, $\beta>0$, $q>1$,

$$\ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n \quad\text{et}\quad \frac{1}{n^n}\ll\frac{1}{n!}\ll\frac{1}{q^n}\ll\frac{1}{n^\alpha}\ll\frac{1}{\ln^\beta n}.$$

Exemple

$$\ln n \ll n \ll n\ln n \ll n^2.$$

Propriété

$$u \sim v \Longleftrightarrow u = v + \mathrm{o}(v)$$

2 Propriétés

Propriété : Propriétés de o et O

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v, w, b ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(i) *Si $\alpha \neq 0$, $u = \mathrm{o}(\alpha v) \Longrightarrow u = \mathrm{o}(v)$ et $u = \mathrm{O}(\alpha v) \Longrightarrow u = \mathrm{O}(v)$.*

(ii) $u = \mathrm{o}(1) \Longleftrightarrow u \to 0$ *et* $u = \mathrm{O}(1) \Longleftrightarrow u$ *bornée.*

(iii) *Si $u = \mathrm{o}(v)$ ou $u \sim v$, alors $u = \mathrm{O}(v)$ et la réciproque est fausse.*

(iv) ***Transitivité***

$$u = \mathrm{o}(v) \text{ et } v = \mathrm{o}(w) \Longrightarrow u = \mathrm{o}(w)$$

$$u = \mathrm{O}(v) \text{ et } v = \mathrm{O}(w) \Longrightarrow u = \mathrm{O}(w)$$

(v) ***Combinaison linéaire***

$$u = \mathrm{o}(w) \text{ et } v = \mathrm{o}(w) \Longrightarrow \alpha u + \beta v = \mathrm{o}(w)$$

$$u = \mathrm{O}(w) \text{ et } v = \mathrm{O}(w) \Longrightarrow \alpha u + \beta v = \mathrm{O}(w)$$

(vi) ***Produit***

$$u = \mathrm{o}(v) \text{ et } a = \mathrm{o}(b) \Longrightarrow ua = \mathrm{o}(vb)$$

$$u = \mathrm{O}(v) \text{ et } a = \mathrm{O}(b) \Longrightarrow ua = \mathrm{O}(vb)$$

Propriété : Propriétés de ~

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v, w, b ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

(i) *$\sim$ est une relation d'équivalence.*

(ii) *Si $u \sim v$ et $v \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, alors $u \to \ell$.*

(iii) $u \to \ell \boxed{\neq 0} \Longleftrightarrow u \sim \ell$.

(iv) *Si $u \sim v$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.*

(v) *Si $u \sim v$ et $a \sim b$, alors $ua \sim vb$ et $\dfrac{u}{a} \sim \dfrac{v}{b}$.*

(vi) *Si $u \sim v$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ **fixé**, ($u_n > 0$ et $v_n > 0$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$, non nuls si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$), $u^\alpha \sim v^\alpha$.*

(vii) *Si $u_n \sim v_n$ et φ extractrice, $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.*

Remarques

R 1 – ⚠ $u_n \sim v_n \not\Longleftrightarrow u_n - v_n \to 0$

Exemple

- $n+1 \sim n$ mais $(n+1) - n \not\to 0$.
- $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} \to 0$ mais $\dfrac{1}{n} \not\sim \dfrac{1}{n^2}$.

R 2 – ⚠ Si α n'est pas fixe : $1 + \dfrac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \sim \mathrm{e}$ donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \not\sim 1^n = 1$.

R 3 – ⚠ On n'ajoute pas les équivalents.

Exemple

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \text{ mais } \frac{1}{n^2} \not\sim \frac{2}{n^2}.$$

R 4 – ⚠ Si on trouve une suite équivalente à 0, on s'est trompé ! (En général, on a ajouté/soustrait des équivalents...)
Cela n'a pas de sens avec la définition du programme, et même avec la généralisation, cela voudrait dire qu'on peut écrire à partir d'un certain rang $u_n = 0 \times w_n = 0$ donc que la suite est nulle à partir d'un certain rang.

En particulier, si $u_n \to 0$, on ne peut pas donner facilement un équivalent en général.

R 5 – ⚠ On ne compose pas des équivalent par la gauche avec des fonctions, même continues.

La propriété suivante n'est pas officiellement au programme mais à savoir retrouver :

- $e^{u_n} \sim e^{v_n} \iff u_n - v_n \to 0$
- Si $u_n \sim v_n$ avec pour tout n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$, à partir d'un certain rang $v_n \neq 1$ et si $v_n \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ avec $\boxed{\ell \neq 1,}$ alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

3 Équivalents usuels

Propriété : Formule de Stirling

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Propriété : Équivalents usuels

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé et $h_n \to 0$.

- $\sin h_n \sim h_n$
- $\tan h_n \sim h_n$
- $\cos h_n - 1 \sim -\dfrac{h_n^2}{2}$
- $\ln(1+h_n) \sim h_n$
- $e^{h_n} - 1 \sim h_n$
- $(1+h_n)^\alpha - 1 \sim \alpha h_n$
- $\operatorname{Arctan} h_n \sim h_n$
- $\operatorname{Arcsin} h_n \sim h_n$
- $\operatorname{sh} h_n \sim h_n$
- $\operatorname{th} h_n \sim h_n$

4 Exemples de développements asymptotiques

Définition

On appelle **développement asymptotique** de $(u_n)_n$ toute expression de la forme

$$u_n = v_n^{(1)} + v_n^{(2)} + \cdots + v_n^{(r)} + o\left(v_n^{(r)}\right)$$

où $v^{(1)}, \ldots, v^{(r)}$ sont des suites telles que $v_n^{(1)} \gg v_n^{(2)} \gg \cdots \gg v_n^{(r)}$, c'est-à-dire telles que $\forall k \in [\![1, r-1]\!]$, $v_n^{(k+1)} = o\left(v_n^{(k)}\right)$.

On dit que le développement asymptotique est **à la précision $v_n^{(r)}$.**

Méthode

Chercher un développement asymptotique d'une suite est souvent délicat. On peut par exemple essayer de :

1. reconnaître un développement limité « déguisé » ;
2. chercher un équivalent $u_n \sim v_n$ qui donne $u_n = v_n + o(v_n)$, puis un équivalent de la différence $u_n - v_n \sim w_n$ qui donne $u_n = v_n + w_n + o(w_n)$ et ainsi de suite ;
3. réinjecter le développement partiel dans une expression du terme général de la suite pour obtenir le terme suivant.

Exemple

Développement asymptotique $u_n = \ln(\operatorname{ch} n)$ à la précision e^{-4n}.

Exemple

On s'intéresse à u_n unique zéro de $f_n(x) = 1 + x + \dfrac{e^x}{n}$.

1. Vérifier que la suite (u_n) est bien définie, majorée par -1 et croissante.
2. Déterminer la limite de (u_n).
3. Déterminer un développement asymptotique à 3 termes de (u_n).