Séries numériques et vectorielles

- Ne jamais parler de la somme d'une série $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ avant d'avoir démontré la convergence de la série.
- En général, pour étudier la convergence d'une série $\sum u_n$, c'est à la suite u_n que l'on s'intéresse, rarement aux sommes partielles.
- La première des choses à faire est de vérifier si le terme général est de signe constant. Si ce n'est pas le cas, on peut essayer de montrer l'absolue convergence qui implique la convergence.
- On peut utiliser des o ou O : pour des termes généraux réels positifs a priori, mais $u_n = \mathrm{o}(\dots)$ et $\|u_n\| = \mathrm{o}(\dots)$ signifiant la même chose, c'est une technique de démonstration d'absolue convergence.
- Avec un équivalent : attention, cette fois-ci il faut **absolument** que les termes soient réels positifs (ou en tout cas de signe constant) à partir d'un certain rang.
- Pour les séries à termes de signe non constant et non absolument convergentes, on peut utiliser le théorème sur les séries alternées, en vérifiant **toutes** les hypothèses de celui-ci (un $(-1)^n$ ne suffit pas !). Si ce n'est pas possible, il reste la solution du développement asymptotique.
- La comparaison à une intégrale (surtout pour les termes généraux réels positifs) peut servir (parfois) à conclure sur la convergence, trouver des équivalents de sommes partielles, de restes, etc.
- Enfin, pour le calcul de sommes d'une séries, les techniques les plus courantes sont de faire apparaître des sommes télescopiques (parfois via une décomposition en éléments simples), ou se ramener à une somme connue : géométrique, exponentielle (vous aurez un catalogue intéressant dans le chapitre sur les séries entières).
- Attention sur la manipulation des sommes de séries : $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n)$ peut exister alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ ne sont pas définies... Y réfléchir à deux fois avant d'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Séries à termes de signe constant

1 ✎ Déterminer la nature des séries de terme général

1. $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$
2. $v_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$
3. $w_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

2 ✎ Déterminer la nature des séries de terme général

1. $x_n = \mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
2. $y_n = \dfrac{1}{n\cos^2 n}$
3. $z_n = \dfrac{n^n}{(2n)!}$
4. $s_n = \sin(2\operatorname{Arctan} n)$

3 Nature de $\sum \left|\ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)\right|^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

4 Nature de $\sum \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)$ où $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

5 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes.

Montrer que $\sum \min(u_n, v_n)$, $\sum \max(u_n, v_n)$, $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \dfrac{u_n v_n}{u_n+v_n}$ sont aussi convergentes.

6

1. Montrer que $\sum \sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right)$ converge.
2. Montrer que pour tout n, $(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n \in 2\mathbb{Z}$.
3. Quelle est la nature de $\sum \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$?

7 Nature de $\sum a^{\ln n}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

8 Convergence de la suite de terme général $\prod_{k=2}^{n}\left(2-\mathrm{e}^{1/k}\right)$.

9 **Règle de Raabe-Duhamel** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = \ln(n^\alpha x_n)$.

1. Démontrer que la série $\sum(y_{n+1}-y_n)$ converge.
2. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x_n \sim \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.
3. En déduire que la série $\sum x_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
4. Soit $a, b \in R_+^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{n+a}{n+b} u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
   (a) Démontrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $b-a > 1$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a-b+1)S_n = (n+a)u_n + (1-b)u_0$.
   (c) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ lorsque $b-a > 1$.

10 **CCINP 6 : Critère de d'Alembert**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.
   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.
2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n!}{n^n}$?

11 CCINP 5 : Série de Bertrand particulière

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) **Cas** $\alpha \leqslant 0$: En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas** $\alpha > 0$: Étudier la nature de la série.
   Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Séries à termes quelconques

12 Déterminer la nature des séries de terme général

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$
2. $v_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$
3. $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n+\sin n}$
4. $x_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$
5. $y_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$
6. $z_n = \sin\left(n\pi + \dfrac{\pi}{n}\right)$

13 Convergence de $\sum\left(\exp\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - 1\right)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

14 Soit $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $P_n \sim \dfrac{C}{\sqrt{n}}$.

15 Nature et somme éventuelle de $\sum\left(\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}\right)$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

16 CCINP 7

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
   On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.
   Montrer que :
   $$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i})\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.
   Remarque : i est ici le nombre complexe de carré égal à -1

17 CCINP 8 : Séries alternées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

1. (a) Démontrer que la série $\sum(-1)^k u_k$ est convergente.
   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum(-1)^k u_k$.

2. (a) Étudier la convergence ~~simple sur~~ pour $x \in \mathbb{R}$ fixé de la série ~~de fonctions~~ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

   (b) ~~Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.~~

18 CCINP 46 : Séries alternées

On considère la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

19 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}$.

1. Justifier l'existence de R_n et montrer que $R_n + R_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.
2. Donner un équivalent de R_n et déterminer la nature de $\sum R_n$.

20 Transformation d'Abel

Il s'agit de l'analogue discret de l'intégration par parties.

1. Soit u une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie, (S_n) la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que
   $$\sum_{n=0}^{p} v_n u_n = v_p S_p + \sum_{n=0}^{p-1}(v_n - v_{n+1})S_n.$$
2. Montrer que si l'on suppose la suite (S_n) bornée, la suite (v_n) décroissante et de limite nulle, alors la série $\sum u_n v_n$ converge.
3. Le théorème sur les séries alternées peut-il être considéré comme un cas particulier de ce résultat ?
4. Étudier suivant les valeurs des réels α et θ la nature de $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n^\alpha}$.
5. Obtenir, sous les hypothèses du 2. une majoration du reste.

Calcul de sommes

21 Justifier leur bonne définition et calculer les sommes

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

22 On donne $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Justifier leur définition et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

23 Sachant que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e}$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2-2}{n!}$.

24 Convergence et somme de $\sum \operatorname{Arctan}\frac{1}{n^2+n+1}$.

On pourra utiliser que $\frac{1}{n^2+n+1}=\frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n}$...

25 Convergence et somme de $\sum \frac{\sin n\alpha}{2^n}$.

Comparaison avec des intégrales

26 Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

27 Déterminer un équivalent de $\ln n!$.

28 Démontrer que si $|x|<1$, la série $\sum \frac{x^n}{1+x^n}$ converge. Par comparaison à une intégrale, montrer que si l'on note $f(x)$ sa somme, $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln 2}{1-x}$.

29 Soit $\alpha>1$. Déterminer la nature de la série de terme général $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$.

Sommation des relations de comparaison

30 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\frac{1}{n^2}$, $v_n=\frac{1}{n(n+1)}$ et $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

1. Déterminer un équivalent simple de R_n.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $w_n=u_n-v_n$. Démontrer que $w_n\sim\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
3. Déterminer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $R_n=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

31 Soit u suite définie par $u_0>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\ln(1+u_n)$.

1. Étudier la convergence de u et déterminer sa limite.
2. Déterminer la limite de $\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}$ et en déduire un équivalent de u_n.

32 **Développement asymptotique de la série harmonique et de $n!$**

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite $(H_n-\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note γ sa limite (constante d'Euler).
2. Si $\alpha>1$, déterminer un équivalent de $R_n=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$.
3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $t_n=H_n-\ln n-\gamma$. Déterminer un équivalent de $t_{n+1}-t_n$ puis de t_n.
4. Raisonner de même pour montrer que
$$H_n=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
5. En s'inspirant de ce qui précède et en posant $u_n=\ln\left(\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}\right)$, montrer que
$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$