Suites (révisions)

1 Si A et B sont deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$, étudier les bornes supérieures de $A\cup B$, $A+B$ et λA pour $\lambda\in\mathbb{R}$.

2 Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n=\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.
Lorsqu'il y a une limite finie ℓ, donner un équivalent de $u_n-\ell$.

3 Montrer qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire.

4 Soit u une suite telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Prouver que u converge.

5 **Théorème de Césaro - lemme de l'escalier**

1. Prouver le théorème de Césaro : si $u\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $u_n\longrightarrow\ell\in\mathbb{C}$, alors $v_n=\dfrac{u_1+\cdots+u_n}{n}\longrightarrow\ell$, et le résultat est toujours valable si $u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $\ell=\pm\infty$. La réciproque est-elle vrai ?
2. En déduire le lemme de l'escalier : si $u_{n+1}-u_n\longrightarrow\ell$ alors $\dfrac{u_n}{n}\longrightarrow\ell$.
3. Montrer que si $u\in\mathbb{R}_+^{*\,\mathbb{N}}$ telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\longrightarrow\ell$, alors $\sqrt[n]{u_n}\longrightarrow\ell$.
4. Déterminer les limites des suites de terme général $\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}$; $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$; $\dfrac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$; $\dfrac{\sqrt[n]{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}}{n}$; $\dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}}$.

6 **Irrationalité de e**

On pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{nn!}$. Montrer que les deux suites convergent vers une même limite : on admettra qu'elle vaut e. En déduire que e est irrationnel.
On pourra remarquer que si $e=\frac{p}{q}$, $u_q<\mathrm{e}<v_q$...

7 **Moyennes et suites de Schwob**

1. Les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique de deux réels strictement positifs a,b sont respectivement $\frac{2}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$, $\sqrt{ab}$, $\frac{a+b}{2}$. Montrer que ces nombres sont ainsi rangés dans l'ordre croissant.
2. Soient a et b des nombres réels strictement positifs. On définit les suites u et v par $u_0=a$, $v_0=b$ et si $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}$.
Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b. On ne peut pas l'exprimer simplement avec les fonctions usuelles.
3. Soient a et b des nombres réels strictement positifs. On définit les suites u et v par $u_0=a$, $v_0=b$ et si $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=\frac{2}{\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}\right)}$.
Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite que l'on déterminera.

8 Soit u une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose $\sqrt[n]{u_n}\longrightarrow\ell$.
   (a) Montrer que si $\ell<1$ alors $u_n\to0$.
   (b) Montrer que si $\ell>1$ alors $u_n\to+\infty$.
   (c) Montrer que si $\ell>1$, on ne peut pas conclure.
2. Mêmes questions si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\longrightarrow\ell$.

9 **CCINP 1**

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n\underset{+\infty}{\sim}v_n$.
Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n=\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right)-\tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

10 Classer par ordre de prédominance (avec la relation $\ll$) les suites de termes généraux

$$(\ln n)^3,\quad \ln\left(n^3\right),\quad \frac{3^n}{n^3},\quad 2^n,\quad \mathrm{e}^{n/2},\quad (\ln(\ln n))^n,\quad n\ln(\ln n),\quad n\ln n.$$

11 Classer par ordre de prédominance (avec la relation $\ll$) les suites de termes généraux

$$\frac{1}{n^4},\quad \frac{\ln n}{n^5},\quad \frac{2^n}{1+3^n},\quad 2^{-\ln(\ln n)},\quad \frac{\ln(\ln n)}{\ln n+n},\quad \frac{\ln n}{2^n+n^2},\quad \frac{\tan(1/n)}{1+\cos^3(1/n)},\quad (\cos(1/n))^{\sin(1/n)}-1.$$

12 Donner un équivalent simple de $\cos\left(\pi n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

13 **CCINP 43**

Soit $x_0\in\mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0=x_0$ et, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\mathrm{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x)=h(\mathrm{Arctan}x)$.

14 On pose pour $n\in\mathbb{N}$, u_n l'unique solution de $\tan x=x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$.

1. Montrer que u_n est bien défini.
2. Étudier la monotonie et la limite de (u_n).
3. Trouver un équivalent de u_n.
4. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n en exprimant $v_n=u_n-n\pi$ à l'aide d'une arctangente.
5. Donner un développement asymptotique à 4 termes de u_n en réutilisant v_n.