Espaces vectoriels normés

- Dans la définition d'une norme, c'est souvent l'inégalité triangulaire qui demande du travail.
- Pour montrer que deux normes sont équivalentes : en dimension finie, c'est donné par un théorème du cours. En dimension infinie, on les domine mutuellement, c'est-à-dire qu'on cherche à obtenir α, β telles que $N \leqslant \alpha N'$ et $N' \leqslant \beta N$.
- Pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes, c'est plus délicat : il faut montrer qu'on n'a pas de α tel que $N \leqslant \alpha N'$ ou qu'on n'a pas de β tel que $N' \leqslant \beta N$. Une idée peut être de construire une suite (x_n) d'éléments de E telle que $N(x_n) \to +\infty$ et $(N'(x_n))$ bornée ou l'inverse.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 **CCINP 37** On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq k N_\infty(f)$.
   (c) ~~Démontrer que tout ouvert pour la norme~~ $\cancel{N_1}$ ~~est un ouvert pour la norme~~ $\cancel{N_\infty}$.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

2 **CCINP 38** On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

On pose $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sum\limits_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max\limits_{0\leq i\leq n} |a_i|$ où $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.

1. (a) Démontrer que N_∞ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
   Dans la suite de l'exercice, on admet que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
   (b) ~~Démontrer que tout ouvert pour la norme~~ $\cancel{N_\infty}$ ~~est un ouvert pour la norme~~ $\cancel{N_1}$.
   (c) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
2. On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.
   Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

3 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts.

Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on pose $\|P\| = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} |P(a_k)|$.

Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{K}_n[X]$.

4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$. Montrer que cela définit une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

5 Soit l'espace vectoriel $E = \{f \in \mathscr{C}^1([0,1], R),\ f(0) = 0\}$.

Pour toute fonction $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)|$.

1. Démontrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
2. Montrer que pour toute fonction $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|$.
3. Démontrer que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

6 Montrer que tout parallélogramme non aplati centré à l'origine est la boule unité d'une norme sur $\mathbb{R}^2$.

7 Soit N définie sur $\mathbb{R}^2$ par $N(x, y) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x + ty|$.

Montrer qu'il s'agit d'une norme et dessiner sa boule unité.

8 Montrer que la propriété d'inégalité triangulaire d'une norme peut être remplacer par la convexité de la boule unité (l'ensemble des $x \in E$ tels que $N(x) \leqslant 1$ est un convexe de E).

Indication : s'intéresser au segment d'extrémités les vecteurs unitaires associés à x et y.

9 Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $p \geqslant 1$, on note $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$.

On pourra montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}^n$ lorsque l'on aura des notions sur les fonctions convexe.

Montrer que $\|x\|_p \xrightarrow[x\to+\infty]{} \|x\|_\infty$.

10 Soit $E = \mathscr{C}([0,1], R)$ et $\varphi \in E$ une fonction telle que pour tout $x \in]0,1[$, $\varphi(x) > 0$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose $N(f) = \int_0^1 \varphi(t) |f(t)| \,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que N est une norme sur E.
2. Démontrer qu N est dominée par N_∞.
3. Démontrer que les normes N_∞ et N ne sont pas équivalentes.

11 Retrouver le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire d'une norme euclidienne (inégalité de Minkowski).

En déduire que $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas euclidienne.

12 Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des espaces vectoriels normés, $f : E \to F$ est dite k-lipschitzienne lorsque pour tout $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k \|x - y\|_E$.

1. Montrer que toute norme est 1-lipschitzienne.
2. Si A est une partie non vide de E et $x \in E$, on pose $\mathrm{d}(x, A) = \inf\limits_{y\in A} \mathrm{d}(x, y) = \inf\limits_{y\in A} \|x - y\|_E$.
   Montrer que $f_A : x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$ est 1-lipschitzienne.