CORRIGÉ DU DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N° 2

Sujet 1 : CCP 2001 : Utilisations des matrices compagnons

I. Propriétés générales

1. On calcule $\det C_P = (-1)^n a_0 = (-1)^n P(0)$ en développant par rapport à la première ligne, ce qui permet de conclure.
   On peut aussi remarquer que C_P est équivalente, par permutation des lignes, à une matrice triangulaire avec de 1 et $-a_0$ sur la diagonale, ce qui permet de conclure.
   C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

2. Comme vu en TD (par récurrence – mais ce n'est pas très rentable à rédiger, en développant par rapport à la dernière colonne – attention à bien écrire les mineurs..., ou avec une opération $L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + \cdots + X^{n-1}L_n$), on arrive à $\chi_{C_p} = P$.

3. Si Q un polynôme unitaire de degré n, on vient de montrer que $\chi_{C_Q} = Q$.
   Réciproquement, tout polynôme caractéristique est bien unitaire et de degré n.

4. (a) On montre, comme dans le cours, que pour toute matrice carrée M, $\chi_{{}^tM} = \chi_M$, et on en déduit que $\operatorname{Sp} {}^tM = \operatorname{Sp} M$.
   En particulier, $\operatorname{Sp} C_P = \operatorname{Sp} {}^tC_P$.

   (b) On vérifie que le sous-espace propre de associé à λ est de dimension 1. En effet, ${}^tC_P - \lambda I_n$ possède une sous-matrice triangulaire d'ordre $n-1$ avec des 1 sur la diagonale donc est de rang au plus $n-1$, donc $E_\lambda({}^tC_P)$ est de dimension au plus 1, et comme on a bien une valeur propre, cette dimension vaut exactement 1.
   En remarquant que les colonnes de ${}^tC_P - \lambda I_n$ vérifient $C_1 + \lambda C_2 + \cdots + \lambda^{n-1} C_n = 0$ car λ est racine de $P = \chi_{{}^tC_p}$, on obtient que $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ forme à lui seul une base de $E_\lambda({}^tC_P)$.

   (c) Comme tous les sous-espaces propres sont de dimension 1, on obtient que en appliquant une caractérisation du programme que ${}^tC_P$ est diagonalisable si et seulement si $\chi_{{}^tC_P}$ est scindé et chaque valeur propre est d'ordre $\dim E_\lambda({}^tC_P) = 1$ si et seulement si P est scindé à racines toutes simples.

   (d) En supposant que P a $n = \deg P$ racines deux à deux distinctes, on a bien que P est scindé à racines simples et donc que ${}^tC_P$ est diagonalisable d'après la question précédente.
   En prenant un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres distinctes, on obtient alors une famille libre (et même une base de $\mathscr{M}_{n,1}(K)$ parce qu'il y en a n), et donc leur déterminant dans la base canonique est nul.

Or vu, le résultat de (b), on peut choisir comme vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre λ_i, et on obtient bien le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$ qui est effectivement non nul car les λ_i sont deux à deux distincts.

5. (a) Il suffit de considérer la matrice $C_{X^{2002}-X^{2001}-X^{2000}-1999}$ et d'utiliser le théorème de Cayley- Hamilton.

   (b) Soit $x \in E$ un vecteur tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. On vérifie que $\left(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right)$ est une base de E.
   Elle contient le bon nombre de vecteurs, et si on a des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ tels que $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0_E$, alors en composant par f^{n-1}, il vient $\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0_E$ donc $\lambda_0 = 0$ et en réitérant (en composant par f^{n-2} puis f^{n-3}, etc. jusqu'à id_E), on obtient que tous les scalaires sont nuls.
   La matrice dans cette base est la matrice triangulaire inférieure stricte C_{X^n}.

II. Localisation des racines d'un polynôme

6. On a $AX = \lambda X$ donc pour tout i, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = \lambda x_i$ et donc par inégalité triangulaire $|\lambda x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,|x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left(|a_{i,j}|\,\|X\|_\infty\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right) \|X\|_\infty$ et donc $|\lambda x_i| \leqslant r_i \|X\|_\infty$.

7. En choisissant dans la question précédente pour i un indice k tel $|x_k| = \|X\|_\infty$ (qui existe bien), alors $|x_k| \neq 0$ car $X \neq 0$ en tant que vecteur propre et on peut simplifier par $|x_k| = \|X\|_\infty$ pour obtenir $|\lambda| \leqslant r_k$ soit $|\lambda| \in D_k$. Ainsi, $\operatorname{Sp} A \subset \bigcup_{i=k}^{n} D_k$.

8. P étant unitaire, on peut appliquer la question précédente à la matrice compagnon C_P dont les valeurs propres sont les racines de P.
   Or pour cette matrice, pour tout k, $r_k = 1 + |a_{k-1}|$ si $k \geqslant 1$ et $r_1 = |a_0|$ (somme des modules des cœfficients sur la ligne k de C_P).
   Donc pour toute racine λ de P, on a un k tel que
   $$|\lambda| \leqslant r_k = 1 + |a_k| \leqslant R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \ldots, 1 + |a_{n-1}|\}$$
   et toutes les racines sont bien dans $D(0, R)$.

9. On suppose sans perte de généralité que $a = \max(a,b,c,d)$ et on pose $P = X^a + X^b - X^c - X^d$. D'après la question précédente, les racines de ce polynôme sont dans $D(0,R)$ où $R = \max(0,1,2) = 2$.
Les seules racines entières naturelles possibles sont 0, 1 et 2.
0 et 1 sont bien racines, mais cela ne nous intéresse pas.
Ensuite, 2 est racine si et seulement si $2^a + 2^b = 2^c + 2^d$. Si (toujours sans perte de généralité) $b < a$ et $d < c$, alors $2^b\left(2^{a-b}+1\right) = 2^d\left(2^{c-d}+1\right)$.
Enfin, si par exemple $b > d$, on obtient alors $2^{b-d}\left(2^{a-b}+1\right) = 2^{c-d}+1$ ce qui est contradictoire.
Finalement, $\boxed{n^a + n^b = n^c + n^d \text{ n'admet pas de solution sur } \mathbb{N} \setminus \{0,1\}.}$

III. Suites récurrentes linéaires

10. Si λ est racine de P alors pour tout n, $\lambda^n P(\lambda) = 0 = \lambda^{n+p} + a_{p-1}\lambda^{n+p-1} + \cdots + a_0\lambda^n$, d'où $\boxed{(n \mapsto \lambda^n) \in F.}$

11. φ est linéaire par linéarité de l'évaluation, bijective car, avec la relation de récurrence, la donnée des p premiers termes de la suite détermine complètement toute la suite.
Donc $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme.}}$ Donc $\boxed{\dim F = \dim C^p = p.}$

12. (a) Soit i tel que $0 \leqslant i \leqslant p-1$.
Vu la relation de récurrence, $e_i(p) = -a_{p-1}e_i(p-1) - \ldots - a_0 e_i(0)$ donc $\boxed{e_i(p) = -a_i.}$

(b) $\left(e_0, e_1, \ldots, e_{p-1}\right)$ est l'image par l'isomorphisme φ^{-1} de la base canonique de $\mathbb{C}^p$. Donc $\boxed{\text{c'est une base de } F.}$

(c) Notons $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{C}^p$. Si $u \in F$,
$$u = \varphi^{-1}\left(u(0), \ldots, u(p-1)\right) = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=0}^{p-1} u(i)\varepsilon_{i+1}\right) = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)\varphi^{-1}(\varepsilon_{i+1}) = \sum_{i=0}^{p-1} u(i) e_i$$
donc $\boxed{u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i) e_i.}$
Autre rédaction possible : comme $\left(e_0, e_1, \ldots, e_{p-1}\right)$ est une base de F, u se décompose en $u = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i e_i$ avec pour tout i, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, et en évaluant en $j \in [\![0, p-1]\!]$, on obtient $u(j) = \alpha_j$ vu la définition des e_i.

13. Si $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $f(u + \lambda v) : n \mapsto u(n+1) + \lambda v(n+1)$ donc $f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$ et $\boxed{f \in \mathscr{L}(E).}$
Puis si $u \in F$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n+p) = -a_{p-1}u(n+p-1) - \ldots - a_0 u(n)$ et donc en particulier en changeant n en $n+1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n+p+1) = -a_{p-1}u(n+p) - \ldots - a_0 u(n+1)$ et donc $f(u) \in F$. Donc $\boxed{F \text{ stable par } f.}$

14. Soit $0 \leqslant j \leqslant n-1$. La question 12.c permet de décomposer $g(e_j) = f(e_j) : n \mapsto e_j(n+1)$ dans $\left(e_0, e_1, \ldots, e_{p-1}\right)$: $g(e_j) = \sum_{i=0}^{p-1} e_j(i+1) e_i$.
D'une part, $g(e_0) = e_0(p)e_{p-1} = -a_0 \cdot e_{p-1}$ d'après 12.a.
D'autre part, si $j \neq 0$, $g(e_j) = 1 \cdot e_{j-1} + e_j(p)e_{p-1} = 1 \cdot e_{j-1} - a_j \cdot e_{p-1}$.
$$\boxed{\text{La matrice de } g \text{ dans la base } \left(e_0, e_1, \ldots, e_{p-1}\right) \text{ est donc } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} = {}^tC_P.}$$

15. (a) Trouver une base formée de vecteurs propres revient de nouveau à diagonaliser ${}^tC_P$ dont P est le polynôme caractéristique (scindé à racines simples).
Vu les résultats de la première partie I, il suffit de poser $\boxed{f_i = e_0 + \lambda_i e_1 + \cdots + \lambda_i^{p-1} e_{p-1}}$ vecteur propre associé à la valeur propre λ_i : $\left(f_0, \ldots, f_{p-1}\right)$ est une base de F formée de vecteurs propres de g.

(b) Un élément u de F se décompose donc en $u = k_0 f_0 + \cdots + k_{p-1} f_{p-1}$ donc est représenté dans $\mathscr{B} = (f_0, \ldots, f_{p-1})$ par $\begin{pmatrix} k_0 \\ \vdots \\ k_{p-1} \end{pmatrix}$ et dans cette même base, g est représenté par $\begin{pmatrix} \lambda_0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_{p-1} \end{pmatrix}$. Or, pour $n \in \mathbb{N}$, $u(n) = g^n(u)(0)$ et $g^n(u)$ est représenté dans $\mathscr{B}$ par $\begin{pmatrix} \lambda_0^n & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_{p-1}^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_0 \\ \vdots \\ k_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0\lambda_0^n \\ \vdots \\ k_{p-1}\lambda_{p-1}^n \end{pmatrix}$. Finalement, $u(n) = k_0\lambda_0^n f_0(0) + \cdots + k_{p-1}\lambda_{p-1}^n f_{p-1}(0)$ avec, vu la définition des f_i, pour tout i, $f_i(0) = 1$.
Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = k_0\lambda_0^n + k_1\lambda_1^n + \ldots + k_{p-1}\lambda_{p-1}^n.}$

16. On prend $P = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc = (X-a)(X_b)(X-c)$ en reconnaissant les relation cœfficients-racines.
P est scindé à racines simples et la question précédente s'applique.
On en déduit que $\boxed{\left((a^n)_{n\in\mathbb{N}}, (b^n)_{n\in\mathbb{N}}, (c^n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \text{ est une base de l'espace des solutions.}}$

IV. Matrices vérifiant : $\mathrm{rg}(U - V) = 1$

17. A et la matrice compagnon de χ_A possèdent même polynôme caractéristique : χ_A. Cependant, C_A est de rang $n-1$ ou n suivant si le cœfficient constant de χ_A est nul ou non, c'est-à-dire suivant si A est non inversible ou inversible, vu la partie I.
Pour obtenir un contre-exemple, il suffit de prendre une matrice de rang $\leqslant n-2$ (on a pris $n \geqslant 2$).
La matrice nulle convient !
Il suffit aussi, plus généralement, de prendre une matrice scalaire qui ne peut être semblable à sa matrice compagnon, sinon celle-ci serait aussi scalaire, ce qui n'est pas le cas.
$\boxed{\text{La réponse est non : } A \text{ n'est pas nécessairement semblable à } C_A.}$

18. On suppose que $U \neq V$ et qu'il existe P inversible tel que $U = P^{-1}C_U P$ et $V = P^{-1}C_V P$.

Alors $U - V = P^{-1}(C_U - C_V)P$ donc $\mathrm{rg}(U-V) = \mathrm{rg}(C_U - C_V) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 + b_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} + b_{n-1} \end{pmatrix}$ avec des notations évidentes, donc $\mathrm{rg}(U-V) \leqslant 1$.
Mais comme $U \neq V$, $U - V \neq 0$ donc $\mathrm{rg}(U-V) \geqslant 1$.

Finalement $\boxed{\mathrm{rg}(U-V) = 1 \text{ et } (**) \Longrightarrow (*) \text{ si } U \neq V.}$

19. Considérons $\boxed{U = I_2}$ inversible, $\chi_U = X^2 - 2X + 1$. $C_U = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ne peut être semblable à I_2 sinon elle serait égale à I_2. Donc $(**)$ ne peut pas être vraie.

Et si on considère ensuite $\boxed{V = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right),}$ $\mathrm{rg}(U-V) = \mathrm{rg}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 1$. Donc $(*)$ est vraie.

Ona $\chi_V = X^2 - 1$ et donc $\boxed{\chi_U \wedge \chi_V = X - 1 \neq 1.}$

20. On a directement par théorème du rang que $\dim H = \dim E - \mathrm{rg}(u - v) = n - 1$, donc $\boxed{H \text{ hyperplan de } E.}$

21. (a) Si, par l'absurde, F est inclus dans H, alors pour tout $x \in F$, $u(x) = v(x)$ et donc $u_F = v_F$ et $\chi_{u_F} = \chi_{v_F}$ est un diviseur non constant commun à $\chi_u = \chi_U$ et $\chi_v = \chi_V$ qui ne peuvent pas être premiers entre eux. On a donc $\boxed{F \not\subset H.}$

(b) On suppose que $F \neq E$. Comme $F \not\subset H$, H est strictement inclus dans $F + H$ et $\dim(F+H) > \dim H = n - 1$ donc $\dim(F+H) = n$ et $\boxed{F + H = E.}$

En complétant B_F avec une famille génératrice de H, on obtient une famille génératrice de E.
Or le théorème de la base incomplète nous dit qu'on peut compléter la famille libre B_F en une base B' de E en prenant les vecteurs de complétion dans cette famille génératrice. Comme on ne peut prendre de nouveau des vecteurs de B_F, $\boxed{\text{c'est avec des vecteurs de } H}$ que l'on complète (au moins un vu que $F \neq E$).

Les matrices dans cette base B' sont de la forme $\left(\begin{array}{c:c} U_F & B \\ \hdashline (0) & C \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c:c} V_F & B \\ \hdashline (0) & C \end{array}\right)$ car F est stable par u et par v et u et v coïncident sur H.
Mais alors $\chi_U = \chi_{U_F}\chi_C$ et $\chi_V = \chi_{V_F}\chi_C$ avec χ_C non constant diviseur commun de χ_U et χ_V, $\boxed{\text{ce qui est contradictoire.}}$

(c) On en déduit que les seuls sous-espaces stables par u et par v sont $\boxed{\text{les sous-espaces triviaux } \{0_E\} \text{ et } E.}$

22. (a) $x \in G_j$ si et seulement si $u \circ u^j(x) = v \circ u^j(x)$ donc $G_j = \mathrm{Ker}\big((u-v) \circ u^j\big)$.
Donc $\dim G_j = n - \mathrm{rg}\big((u-v) \circ u^j\big) = n - \mathrm{rg}(u - v) = n - 1$ car composer à droite par un isomorphisme ne change pas le rang.

Donc $\boxed{G_j \text{ est un hyperplan.}}$

(b) En se donnant une équation pour chacun des $n-1$ hyperplans G_j, considérer $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j$ revient à considérer un système linéaire homogène de $n-1$ équations à n inconnues : il ne peut être de Cramer et donc $\boxed{\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j \neq \{0\}.}$

(c) Soit $F = \mathrm{Vect}\{y, u(y), \ldots, u^{p-1}(y)\}$ où p est le plus grand entier naturel non nul pour lequel la famille $\big(y, u(y), \ldots, u^{p-1}(y)\big)$ est libre. Alors $\big(y, u(y), \ldots, u^{p-1}(y)\big)$ est libre et $\big(y, u(y), \ldots, u^{p}(y)\big)$ est liée donc $u^p(y) \in F = \mathrm{Vect}\{y, u(y), \ldots, u^{p-1}(y)\}$ et F est stable par u. D'autre part F est aussi stable par v par définition des G_j et de H et vu $y \in \bigcap_{j=0}^{n-2} G_j$.
Comme $F \neq \{0_E\}$, la question 21 nous dit que $F = E$ et donc $p \dim E = n$.

Finalement, $\boxed{B'' = (e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}) \text{ est une base de } E.}$

(d) La matrice de u dans B'' est bien une matrice compagne vu la définition de B'', et comme elle a même polynôme caractéristique que U, $\boxed{\text{il s'agit nécessairement de } C_U.}$
Et vu la définition des G_j et de H, les $n-1$ premières colonnes sont nécessairement les mêmes dans la matrice de v, donc elle est aussi une matrice compagnon, et par le même argument, $\boxed{\text{il s'agit de } C_V.}$

(e) On a donc que U et C_U d'une part, V et C_V d'autre part sont semblables, et on représente de part et d'autres u et v dans les mêmes bases, donc les matrices de passage sont les mêmes.

Finalement, $\boxed{(*) \text{ et } \chi_u \wedge \chi_v = 1 \Longrightarrow (**).}$