Corrigé du Devoir Libre n° 2

ESIM 2002 MP

A. Résultats préliminaires

1. a) Notons que par théorème du rang, le noyau est bien de dimension $n-r$.

Comme la base $(e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n)$ du noyau est une famille libre, on peut utiliser le $\boxed{\text{théorème de la base incomplète}}$ et la compléter en une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

b) Une propriété du cours nous dit que comme $(e_1, e_2, \dots, e_r, e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, $H = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_r)$ et $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n)$ sont $\boxed{\text{supplémentaires dans } \mathbb{R}^n.}$

Or le théorème du rang nous dit que tout application linéaire induit un isomorphisme de tout supplémentaire du noyau sur l'image de cette application.

Donc en particulier, $H = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(u)$.

Mais comme $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est une base H (libre comme sous-famille d'une famille libre), son image par cet isomorphisme qui est $\boxed{(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r)) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(u).}$

c) Comme la famille $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$ est libre, on peut effectivement la compléter en une base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^n$.

Alors Si on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, par construction des deux bases et par définition de la matrice d'une application lin"aire, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r$, et donc, via une formule de changement de base, $\boxed{A \text{ est équivalente à } J_r}$: $A = P_{\mathscr{B}_c}^{\mathscr{C}} J_r P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_c}$ où $\mathscr{B}_c$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2. Vu la définition de D, ses colonnes sont soient nulles, soit des vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Donc le rang de D est le nombre de colonnes non nulles soit $\mathrm{rg}\, D = r$.

D'après les question précédentes, on a donc D équivalente à J_r.

Mais l'équivalence de matrices étant une relation d'équivalence, on a, par transitivité, $\boxed{A \text{ équivalente à } D.}$

B. Application

1. On a $f(I) = f\left(AA^{-1}\right) = f(A) f\left(A^{-1}\right)$ et $f(I) \neq 0$ sinon, pour tout matrice M, $f(M) = f(MI) = f(M) f(I) = 0$ ce qui est exclu. Donc $\boxed{f(A) \neq 0.}$

2. a) Soit pour $1 \leqslant k \leqslant r+1$, A_k matrice diagonale possédant sur la diagonale $k-1$ uns, puis 1 zéro puis $r-k+1$ uns, puis $n-r-1$ zéros.

D'après la première partie, $\boxed{\text{ces matrices sont équivalentes à } A,}$ et avec $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 1 & & & (0) & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & (0) & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$,

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 1 & & & (0) & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 0 & \\ & (0) & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$, jusqu'à $A_{r+1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & (0) & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & (0) & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ (avec toujours r uns) et leur produit est une matrice diagonale dont tous les cœfficient diagonaux sont nul : $\boxed{\text{il est nul.}}$

b) Alors $f\left(\prod_{k=1}^{r+1} A_k\right) = f(0_n) = \prod_{k=1}^{r+1} f(A_k)$ et pour tout k, on a P_k et Q_k inversibles telles que $A_k = P_k A Q_k$ donc $f(0_n) = \prod_{k=1}^{r+1} f(P_k) \times f(A)^{r+1} \times \prod_{k=1}^{r+1} f(Q_k)$.

Mais $f(0_n) = f(0_n \times I) = f(0_n) f(I)$ avec $f(I) \neq 0$ comme déjà vu, donc $f(0_n) = 0$.

Puis comme pour tout k, $f(P_k) \neq 0$ et $f(Q_k \neq 0$ vu la question 1, on a bien $\boxed{f(A) = 0.}$

3. Finalement, $\boxed{f(A) \neq 0 \Longleftrightarrow A \text{ est inversible.}}$ L'application $\boxed{\text{déterminant}}$ est un exemple de telle fonction.

C. Idéaux bilatères de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1. Si $I \in J \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout matrice A, $A = IA \in J$. Donc $\boxed{J = \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

2. Si J contient une matrice inversible A, alors J contient $A \times A^{-1} = I$, donc, par la question précédente $\boxed{J = \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

3. a) D'après la première partie, on a P, Q inversibles telles que $J_r = PAQ$ et comme J est idéal bilatère, $\boxed{J_r \in J.}$

b) Soit pour $1 \leqslant k \leqslant n-r+1$, A_k matrice diagonale possédant sur la diagonale $k-1$ zéros, puis r uns, puis $n-k-r+1$ zéros.

D'après la première partie, $\boxed{\text{ces matrices sont équivalentes à } A,}$ et avec $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & (0) & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & (0) & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ jusqu'à $A_{n-r+1} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & (0) & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & (0) & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$ (avec toujours r uns) et leur somme est une matrice diagonale dont aucun cœfficient diagonal n'est nul : $\boxed{\text{elle est inversible.}}$

4. Ainsi, si un idéal bilatère n'est pas nul, il contient A de rang non nul et donc une matrice inversible d'après ce qui précède. Mais alors il vaut $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'après la question 2.

Finalement, $\boxed{\text{les idéaux bilatères de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ sont les idéaux triviaux.}}$

D. Idéaux à droite de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1. On a déjà que J_E est un sous-groupe de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),+)$ car c'en est une partie non vide (il contient la matrice nulle d'image restreinte à la colonne nulle), et si $A,B\in J_E$, $\operatorname{Im}(A+B)\subset \operatorname{Im}A+\operatorname{Im}B\subset E$ car E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$.

De plus, si $A\in J_E$ et $B\in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\operatorname{Im}(AB)=\{A(BX),X\in\mathscr{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})\}\subset\{AX',X'\in\mathscr{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})\}=\operatorname{Im}A\subset E.$$

Donc $AB\in J_E$ et $\boxed{J_E \text{ idéal à droite de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

Remarque : les définitions d'idéaux à gauche et à droite sont inversées dans l'énoncé.

2. a) Comme dans le théorème du rang. ϕ est bien linéaire, son noyau est $S\cap\operatorname{Ker}A=\{0_{p,1}\}$ donc ϕ est injective et soit on utilise la formule du rang qui nous donne $\dim S=p-\dim\operatorname{Ker}A=\operatorname{rg}A=\dim\operatorname{Im}A$ mais elle découle d'un tel isomorphisme, soit on montre l'injectivité en disant que si $Y\in\operatorname{Im}A$, on a $X\in\mathscr{M}_{(p,1)}(\mathbb{R})$ tel que $Y=AX$ et on décompose $X=X_S+X_K$ où $X_S\in S$ et $X_K\in\operatorname{Ker}A$ et alors $Y=AX=AX_S+AX_K=AX_S=\phi(X_S)$ d'où la surjectivité.

Finalement, $\boxed{\phi \text{ est un isomorphisme de } S \text{ dans } \operatorname{Im}(A).}$

b) Chaque $Be_i\in\operatorname{Im}B\subset\operatorname{Im}A$ admet donc $\boxed{\text{un unique antécédent } \varepsilon_i}$ par cet isomorphisme : $\boxed{A\varepsilon_i=Be_i.}$

c) Par un produit par blocs, $\boxed{AC=\begin{pmatrix}A\varepsilon_1 & \cdots & A\varepsilon_q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Be_1 & \cdots & Be_q\end{pmatrix}=B}$ car les Be_i sont exactement les colonnes de B.

3. a) Pour $X\in\mathscr{M}_{(2n,1)}(\mathbb{R})$, on note $X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$ où $X_1,X_2\in\mathscr{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$.

Alors les éléments de $\operatorname{Im}D$ dont les $DX=\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=AX_1+BX_2$, avec X_1,X_2 quelconques.

Donc $\boxed{\operatorname{Im}(D)=\operatorname{Im}(A)+\operatorname{Im}(B).}$

b) On a donc $\operatorname{Im}C\subset\operatorname{Im}D$ donc avec la question 2, $\boxed{\text{il existe une matrice } W}$ appartenant à $\mathscr{M}_{(2n,n)}(\mathbb{R})$ $\boxed{\text{telle que } C=DW.}$

c) En écrivant par blocs $W=\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}$ où $U,V\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\boxed{C=\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=AU+BV.}$

4. a) $\{\operatorname{rg}M,\ M\in J\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ majorée par n, donc $\boxed{\text{admet un maximum.}}$

b) Soit $(C_1,\ldots,C_r)$ une base de $\operatorname{Im}M_0$ et $Y\in\operatorname{Im}M\setminus\operatorname{Im}M_0$. Alors $(C_1,\ldots,C_r,Y)$ est libre et on peut compléter en une base $\mathscr{B}=(C_1,\ldots,C_r,Y,C_{r+1},\ldots,C_q)$ de $\operatorname{Im}M+\operatorname{Im}M_0$.

Alors la matrice par blocs $C=\begin{pmatrix}C_1 & \cdots & C_r & Y & C_{r+1} & \cdots & C_q & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Im}C=\operatorname{Vect}\mathscr{B}=\operatorname{Im}M+\operatorname{Im}M_0$ et $\operatorname{rg}C\geqslant r+1$ car $(C_1,\ldots,C_r,Y)$ est libre.

Mais, d'après la question 3, on a des matrices U,V telles que $C=MU+M_0V\in J$ car on a un idéal à droite. $\boxed{J \text{ contient une matrice de rang au moins } r+1.}$

c) Ce qui est contradictoire. C'est donc que pour tout $M\in J$, $\operatorname{Im}M\subset\operatorname{Im}M_0$ et donc $\boxed{J\subset J_{\operatorname{Im}M_0}.}$

5. Réciproquement, si $M\in J_{\operatorname{Im}M_0}$, $\operatorname{Im}M\subset\operatorname{Im}M_0$ et d'après la question 2, on a une matrice $C\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M=M_0C\in J$ idéal à droite.

Donc $\boxed{J=J_{\operatorname{Im}M_0} \text{ où } M_0 \text{ matrice de } J \text{ de rang maximal.}}$

Finalement, les idéaux à droite de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont exactement les $\{A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\mid E \text{ contient } \operatorname{Im}(A)\}$ pour E sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$.

E. Idéaux à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1. On a déjà que J_E est un sous-groupe de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),+)$ car c'en est une partie non vide (il contient la matrice nulle de noyau égal à E), et si $A,B\in J_E$, $E\subset\operatorname{Ker}A+\operatorname{Ker}B\subset\operatorname{Ker}(A-B)$ car E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$.

De plus, si $A\in J_E$ et $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $X\in E$, $(BA)X=B(AX)=B0_{n,1}=0_{n,1}$ donc $E\subset\operatorname{Ker}(BA)$. Donc $AB\in J_E$ et $\boxed{J_E \text{ idéal à gauche de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

2. a) Soit H un supplémentaire de $\operatorname{Ker}u$ dans $\mathbb{R}^n$. Le théorème du rang nous dit (comme en D.2.a) que u induit un isomorphisme $\tilde{u}:H\to\operatorname{Im}u$.

Soit F supplémentaire de $\operatorname{Im}u$ dans $\mathbb{R}^p$. Soit w l'application linéaire définie par $w(x)=v\circ\tilde{u}^{-1}(x)$ si $x\in\operatorname{Im}u$ et $w(x)=0_{\mathbb{R}^q}$ si $x\in F$. La supplémentarité des deux sous-espaces nous assure que w est bien définie sur $\mathbb{R}^p$, à valeur dans $\mathbb{R}^q$.

On a donc bien $\boxed{w\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)}$ et si $x\in\mathbb{R}^n$, il se décompose en $x=x_H+x_K$ avec $x_H\in H$ et $x_K\in\operatorname{Ker}u$. Alors $u(x)\in\operatorname{Im}u$ et $w\circ u(x)=v\circ\tilde{u}^{-1}\circ\tilde{u}(x_H)=v(x_H)$ car $u(x_K)=0$. Mais $v(x)=v(x_H)+v(x_K)=v(x_H)$ car $\operatorname{Ker}u\subset\operatorname{Ker}v$.

Finalement, $\boxed{v=w\circ u.}$

Remarque : la réciproque est vraie.

b) Si $A\in\mathscr{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$, $B\in\mathscr{M}_{(q,n)}(\mathbb{R})$ telles que $\operatorname{Ker}(B)$ contient $\operatorname{Ker}(A)$, u,v leurs applications linéaires canoniquement associées vérifie $\operatorname{Ker}u\subset\operatorname{Ker}u$ donc, d'après la question précédente, on a $w\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$ tel que $v=w\circ u$.

Si $C\in\mathscr{M}_{(q,p)}(\mathbb{R})$ est la matrice de w dans les bases canoniques, on a bien $\boxed{B=CA.}$

3. On suppose maintenant que l'on a des matrices carrées telles que $\operatorname{Ker}A\cap\operatorname{Ker}B\subset\operatorname{Ker}C$.

En s'inspirant de ce qui a été fait dans la partie précédente, on pose la matrice par blocs $D=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ et on a bien $\operatorname{Ker}D=\operatorname{Ker}A\cap\operatorname{Ker}B\subset\operatorname{Ker}C$ car $DX=\begin{pmatrix}AX\\BX\end{pmatrix}=0$ si et seulement si $AX=BX=0$.

D'après la question précédente, on a une matrice $W=\begin{pmatrix}U & V\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{(n,2n)}(\mathbb{R})$ telle que $C=WD$ avec $U,V\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\boxed{C=\begin{pmatrix}U & V\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=UA+VB.}$

4. Finalement, si J est un idéal à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, en s'inspirant de ce qui a été fait dans la partie précédente, on peut s'intéresser à une matrice $M_0 \in J$ dont la dimension du noyau est minimale, donc dont le rang est maximal, qui est bien définie.

Alors si $M \in J_{\operatorname{Ker} M_0}$, $\operatorname{Ker} M_0 \subset \operatorname{Ker} M$, donc vu la question 2.b, on a C telle que $M = CM_0 \in J$ qui est un idéal à gauche, donc $J_{\operatorname{Ker} M_0} \subset J$

Réciproquement, si $M \in J$ et $M \notin J_{\operatorname{Ker} M_0}$, $\operatorname{Ker} M_0 \not\subset \operatorname{Ker} M$, on cherche une matrice $c \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Ker} C = \operatorname{Ker} M \cap \operatorname{Ker} M_0$. D'après la question précédente, on a U, V telles que $C = UM + VM_0 \in J$ car J est un idéal à gauche. Et comme $\operatorname{Ker} M_0 \not\subset \operatorname{Ker} M$, $\operatorname{Ker} C$ est strictement inclus dans $\operatorname{Ker} M_0$ donc de dimension strictement inférieure, ce qui contredit la minimalité de M_0. C'est donc que $\operatorname{Ker} M_0 \subset \operatorname{Ker} M$ et donc que $M \in J_{\operatorname{Ker} M_0}$.

Comment trouver une telle matrice C ? Il suffit de passer par les applications linéaires associées $u, u_0 \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ à M et M_0, de considérer un supplémentaire H de $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} u_0$ dans $\mathbb{R}^n$ puis l'application linéaire qui vaut 0 sur $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} u_0$ et l'identité sur H, c'est-à-dire la projection sur H parallèlement à $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} u_0$. Elle a comme noyau $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} u_0$ et sa matrice C dans la base canonique est telle que $\operatorname{Ker} C = \operatorname{Ker} M \cap \operatorname{Ker} M_0$.

Finalement, $J = J_{M_0}$. Les idéaux à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont donc exactement

$$\boxed{\text{les } \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Ker}(M) \text{ contient } E\right\} \text{ pour } E \text{ sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{(n,1)}(\mathbb{R}).}$$

Fin