Programme de colle – MP 1

1. Suites

Pour exercices.

2. Series numériques réelles et complexes (MPSI)

Révisions du programme de première année, voir page suivante.

3. Series numériques et vectorielles (MP)

Extrait du programme officiel :

L'objectif de cette partie est triple :

- *consolider les acquis de MPSI relatifs aux séries numériques ;*
- *étendre la notion de série convergente au cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie, en particulier aux espaces de matrices ;*
- *introduire brièvement, exclusivement en vue du cours de probabilités, la notion de famille sommable de nombres complexes.*

Les séries sont avant tout un outil. L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie	
Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ ont même nature.
Série absolument convergente.	Cas des séries matricielles.
Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
b) Compléments sur les séries numériques	
Règle de d'Alembert.	Introduite principalement en vue de l'étude des séries entières.
Critère des séries alternées. Signe et encadrement des restes.	L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme. La transformation d'Abel est hors programme. L'étude de la sommation par tranches dans le cas semi-convergent est hors programme.
Comparaison série-intégrale : Si f est une fonction continue par morceaux et décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ converge.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas où f est monotone. Interprétation géométrique.
~~Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.~~	~~La suite de référence est positive à partir d'un certain rang. Cas des séries convergentes, des séries divergentes.~~

Pas de sommation des relations de comparaison cette semaine.

Semaine prochaine : Séries, topologie.

Questions de cours :

(i) De toute suite réelle on peut extraire une suite monotone. On en déduit le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

(ii) Critère des séries alternées, signe et encadrement des restes : voir CCINP 8.

(iii) Comparaison série-intégrale pour une fonction continue par morceaux décroissante. Si, de plus, la fonction est positive, la série de terme général $\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ converge.

(iv) Séries de Riemann. Convergence absolue $\Longrightarrow$ convergence.

(v) Critère de d'Alembert : voir CCINP 6.

(vi) **CCINP 5** :

(a) On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. **Cas** $\alpha \leqslant 0$: En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

ii. **Cas** $\alpha > 0$: Étudier la nature de la série.
Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

(b) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

(vii) **CCINP 6** : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

(a) Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.
Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

(b) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

(viii) **CCINP 7** :

(a) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.
Montrer que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

(b) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i})\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.
Remarque : i est ici le nombre complexe de carré égal à -1

(ix) **CCINP 8** : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

(a) i. Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.
Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

ii. Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

(b) i. Étudier la convergence ~~simple sur~~ pour $x \in \mathbb{R}$ fixé de la série ~~de fonctions~~ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

ii. (5/2) Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

(x) **CCINP 46** : On considère la série : $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

(a) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

(b) En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

(c) $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

4. Programme de MPSI

Extrait du programme officiel :

L'étude des séries prolonge celle des suites. Elle permet d'illustrer le chapitre « Analyse asymptotique » et, à travers la notion de développement décimal de mieux appréhender les nombres réels.

L'objectif majeur est la maîtrise de la convergence absolue ; tout excès de technicité est exclu.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Sommes partielles. Convergence, divergence. Somme et restes d'une série convergente.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.	
Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.
b) Séries à termes positifs	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	
Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.	
c) Comparaison série-intégrale dans le cas monotone	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.	Application à l'étude de sommes partielles et de restes.
Séries de Riemann.	
d) Séries absolument convergentes	
Convergence absolue.	
La convergence absolue implique la convergence.	Le critère de Cauchy est hors programme. La convergence de la série absolument convergente $\sum u_n$ est établie à partir de celles de $\sum {u_n}^+$ et $\sum {u_n}^-$.
Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.	
e) Représentation décimale des réels	
Existence et unicité du développement décimal propre d'un réel.	La démonstration n'est pas exigible.