# Programme de colle – MP 1

## 1. Espaces vectoriels normés

Extrait du programme officiel.

*Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme.*
*Les notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach sont hors programme.*

| CONTENUS | CAPACITÉS & COMMENTAIRES |
|---|---|
| **Normes et espaces vectoriels normés** | |
| Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Structure d'espace vectoriel normé. | Vecteurs unitaires. |
| Distance associée à une norme. | Inégalité triangulaire. |
| Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules. | |
| Parties, suites, fonctions bornées. | |
| Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel. | |
| Normes $\\|\ \\|_1$, $\\|\ \\|_2$, $\\|\ \\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. | |
| Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. | |
| Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes. | |
| Produit fini d'espaces vectoriels normés. | |
| **Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé** | |
| Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. | |
| Suites extraites, valeurs d'adhérence. | Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge. |
| **Comparaison des normes** | |
| Normes équivalentes. | Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation des suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison de normes définies sur des espaces fonctionnels fait partie des capacités attendues des étudiants. |
| **Espaces vectoriels normés de dimension finie** | |
| Équivalence des normes sur un espace de dimension finie. | Démonstration non exigible. |

## 2. Suites

Révisions du programme de MPSI. Voir page suivante.

*Semaine prochaine :* Séries numériques et vectorielles.

## QUESTIONS DE COURS :

(i) Formulaire de développements limités ($\exp, \cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh}, (1+x)^\alpha$, $\dfrac{1}{1\pm x}$, $\ln(1\pm x)$, Arctan, tan et th à l'ordre 7).

(ii) Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$. En particulier, démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (sans le cas d'égalité) dont découle celle de Minkowski.

(iii) Norme $N_\infty$ sur l'espace vectoriel des fonctions bornées sur un ensemble $X$ non vide à valeurs dans $\mathbb{K}$.

(iv) Comparaisons (les 6) des normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$.

(v) Comparaisons des normes usuelles sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.

(vi) Toute démonstration de résultat concernant les suites vectorielles du programme.

(vii) **CCINP 37** : On note $E$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.
- (a) i. Démontrer que $N_\infty$ et $N_1$ sont deux normes sur $E$.
  - ii. Démontrer qu'il existe $k>0$ tel que, pour tout $f$ de $E$, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
  - iii. (5/2) Démontrer que tout ouvert pour la norme $N_1$ est un ouvert pour la norme $N_\infty$.
- (b) Démontrer que les normes $N_1$ et $N_\infty$ ne sont pas équivalentes.

(viii) **CCINP 38** : On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
On pose $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sum\limits_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max\limits_{0\leq i\leq n} |a_i|$ où $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.
- (a) i. Démontrer que $N_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
  Dans la suite de l'exercice, on admet que $N_1$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
  - ii. (5/2) Démontrer que tout ouvert pour la norme $N_\infty$ est un ouvert pour la norme $N_1$.
  - iii. Démontrer que les normes $N_1$ et $N_\infty$ ne sont pas équivalentes.
- (b) On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à $k$. On note $N_1'$ la restriction de $N_1$ à $\mathbb{R}_k[X]$ et $N_\infty'$ la restriction de $N_\infty$ à $\mathbb{R}_k[X]$.
  Les normes $N_1'$ et $N_\infty'$ sont-elles équivalentes ?

(ix) **CCINP 1**
- (a) On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
  Démontrer que $u_n$ et $v_n$ sont de même signe à partir d'un certain rang.
- (b) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

(x) **CCINP 43** : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)$ par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.
- (a) i. Démontrer que la suite $(u_n)$ est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de $x_0$, le sens de variation de $(u_n)$.
  - ii. Montrer que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.
- (b) Déterminer l'ensemble des fonctions $h$, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

## 3. Programme de MPSI

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **Généralités sur les suites réelles** | |
| Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. | Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\big(\lvert u_n\rvert\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. |
| **Limite d'une suite réelle** | |
| Limite finie ou infinie d'une suite. | Pour $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, notation $u_n \longrightarrow \ell$.<br>Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.<br>Lien avec la définition vue en Terminale. |
| Unicité de la limite.<br>Suite convergente, divergente.<br>Toute suite convergente est bornée. | Notation $\lim u_n$. |
| Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.<br>Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.<br>Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.<br>Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence par minoration ou majoration. | Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle. |
| **Suites monotones** | |
| Théorème de la limite monotone : toute suite monotone possède une limite.<br>Théorème des suites adjacentes. | Toute suite croissante majorée converge, toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. |
| **Suites extraites** | |
| Suite extraite. | |
| Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite. | Utilisation pour montrer la divergence d'une suite.<br>Si $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ tendent vers $\ell$, alors $(u_n)$ tend vers $\ell$. |
| Théorème de Bolzano-Weierstrass. | Les étudiants doivent connaître le principe de la démonstration par dichotomie, mais la formalisation précise n'est pas exigible.<br>La notion de valeur d'adhérence est hors programme. |
| **Traduction séquentielle de certaines propriétés** | |
| Partie dense de $\mathbb{R}$. | Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.<br>Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels. |
| Caractérisation séquentielle de la densité.<br>Si $X$ est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de $X$ de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$). | |
| **Suites complexes** | |
| Brève extension des définitions et résultats précédents. | Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire. |
| Théorème de Bolzano-Weierstrass. | La démonstration n'est pas exigible. |
| **Suites particulières** | |
| Suite arithmétique, géométrique. Suite arithmético-géométrique. Suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. | Les étudiants doivent savoir déterminer une expression du terme général de ces suites. |
| Exemples de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. | Seul résultat exigible : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$ et si $f$ est continue en $\ell$, alors $f(\ell) = \ell$. |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| **Relations de comparaison : cas des suites** | |
| Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence. | Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.<br>On définit ces relations à partir du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ sous l'hypothèse que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.<br>Traduction à l'aide du symbole $o$ des croissances comparées des suites de termes généraux $\ln^{\beta}(n), n^{\alpha}, e^{\gamma n}$. |
| Liens entre les relations de comparaison.<br>Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances.<br>Propriétés conservées par équivalence : signe, limite. | Équivalence des relations $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$. |
| **Exemples de développements asymptotiques** | |
| | La notion de développement asymptotique est présentée sur des exemples simples.<br>La notion d'échelle de comparaison est hors programme. |
| Formule de Stirling. | La démonstration n'est pas exigible. |