Programme de colle – MP 1

Réduction

Extrait du programme officiel.

On se limite en pratique au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Matrices semblables, interprétation géométrique.	Les étudiants doivent savoir utiliser l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée.
Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.	En dimension finie, traduction de la stabilité d'un sous-espace F par un endomorphisme u à l'aide de la matrice de u dans une base adaptée à F.
b) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre. Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres.	⇆ SI : matrice d'inductance : inductance cyclique et inductance homopolaire. La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe. Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n. Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$. Deux matrices semblables ont même spectre. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{K}'$.
c) Polynôme caractéristique	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_u, χ_A. Les étudiants doivent connaître les valeurs des coefficients de degrés 0 et $n-1$.
Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Multiplicité d'une valeur propre. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.	La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ.
d) Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres.
Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E.	Cas des projecteurs, des symétries.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable.	
Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'elle soit semblable à une matrice diagonale.	Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes.	Traduction matricielle.
Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle.
e) Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.	Interprétation géométrique.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.	La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme. On se limite au cas $n = 2$ et à des cas particuliers simples pour $n = 3$.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	Traduction matricielle. Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres. ⇆ I : recherche de la valeur propre de plus grand module à l'aide du quotient des traces de deux itérées successives.
f) Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes	
Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente. Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0. L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.	
g) Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Pour u dans $\mathcal{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$.	Pour M dans $\mathbb{K}[X]$, morphisme $P \mapsto P(M)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, idéal annulateur de M, sous-algèbre $\mathbb{K}[M]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.	Le polynôme minimal est unitaire.
Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.	
Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P. Théorème de Cayley-Hamilton.	Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)\, x$. Démonstration non exigible.
h) Lemme de décomposition des noyaux	
Si $P_1, \dots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors : $$\operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\big(P_i(u)\big).$$	
i) Polynômes annulateurs et diagonalisabilité	
Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.	Traduction matricielle.
j) Endomorphismes à polynôme minimal scindé	
S'il existe un polynôme scindé annulant u, décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.	Traduction matricielle. La décomposition de Dunford et la réduction de Jordan sont hors programme.

Semaine prochaine : Espaces Vectoriels Normés.

Questions de cours :

(i) $\chi_A = X^n - (\operatorname{tr} A)X + \cdots + (-1)^n \det A$. Si χ_A est scindé, expression de $\operatorname{tr} A$ et $\det A$ à l'aide des valeurs propres de A.

(ii) Définition et caractérisations de la diagonalisabilité (y compris avec des polynômes annulateurs) d'un endomorphisme Démonstration·s choisie·s par le colleur.

(iii) Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

(iv) Lemme de décomposition des noyaux.

(v) Si F est un sous-espace stable, relation entre polynôme caractéristique, polynôme minimal, diagonalisabilité de l'endomorphisme induit par rapport à ceux de l'endomorphisme.

(vi) **CCINP 91** : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.

(b) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

(c) Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A. Vérifier que le polynôme caractéristique de A en est un polynôme annulateur.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

(vii) **CCINP 65** : Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

(a) Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

(b) i. Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

ii. Démontrer que, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:

$$(P \text{ polynôme annulateur de } u) \Longrightarrow (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$$

(c) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

(viii) **CCINP 88** :

(a) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Prouver que si P annule u, alors toute valeur propre de u est racine de P.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E, u(M) = M + \operatorname{tr}(M)A$.

i. Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.

ii. u est-il diagonalisable ?
Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (une avec puis sans l'aide de la question a).

(ix) **CCINP 93** : Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On notera Id l'application identité sur E.

(a) Montrer que $\operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u = E$.

(b) i. Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.

ii. En déduire que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.

(c) On suppose que u est non bijectif.
Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

Remarque : les questions a. , b. et c. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.