Espaces Vectoriels Normés

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I NORME SUR UN ESPACE VECTORIEL

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Norme et distance

Définition : Norme, espace vectoriel normé

On appelle **norme** sur E tout application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

Défini-positivité : Pour tout $x \in E$, $N(x) \geqslant 0$ et $N(x) = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow x = 0_E$.

Homogénéité : Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$.

Inégalité triangulaire (ou sous-additivité) : Pour tout $x, y \in E$, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

On dit alors que le couple (E,N) est un **espace vectoriel normé**.

Propriété

Soit (E,N) un espace vectoriel normé, $x, y \in E$.

(i) $N(0_E) = 0_{\mathbb{R}}$

(ii) $N(-x) = N(x)$

(iii) $\left|N(x) - N(y)\right| \leqslant N(x \pm y) \leqslant N(x) + N(y)$

Définition : Vecteur unitaire

Dans un espace vectoriel normé (E,N), un vecteur **unitaire** ou **normé** est un vecteur $x \in E$ tel que $N(x) = 1$.

Définition : Distance associée à une norme

Soit (E,N) un espace vectoriel normé.

On appelle **distance** associée à N l'application $\mathrm{d} : \begin{array}{|ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & N(x-y) \end{array}$.

Propriété

Soit (E,N) un espace vectoriel normé, d distance associée, $x, y, z \in E$.

(i) $\mathrm{d}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

(ii) ***Symétrie :*** $d(x,y) = d(y,x)$.

(iii) ***Double inégalité triangulaire :***

$\left|\mathrm{d}(x,z) - \mathrm{d}(z,y)\right| \leqslant \mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y)$.

2 Normes usuelles

a Sur $\mathbb{K}^n$

Définition

On définit, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|.$$

Propriété

Il s'agit de normes sur $\mathbb{K}^n$.

b Rappels de première année

Théorème

Si f est continue sur $[a,b]$, de signe constant et si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors $f \equiv 0$ sur $[a,b]$.

Définition : Bornes inférieure et supérieure

La **borne inférieure borne supérieure** d'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ sont, respectivement, lorsqu'ils existent, le plus grand des mainorants de A et le plus petit des majorants de A.

Théorème

Toute partie non vide majorée (respectivement minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (respectivement inférieure).

Propriété : Caractérisation locale de la borne supérieure

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, et α un majorant de A.
Alors $\alpha = \sup A$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $\alpha - \varepsilon < x$ $(\leqslant \alpha)$.

Propriété : Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, et α un majorant de A.
Alors $\alpha = \sup A$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers α.

Définition : Borne supérieure d'une application

Si X est un ensemble non vide, f majorée sur X à valeur dans $\mathbb{R}$, on pose $\sup_X f = \sup_{x\in X} f(x) = \sup\{f(x),\ x \in X\}$. Il s'agit du plus petit des majorants de f.

Propriété

Si X est un ensemble non vide, l'ensemble $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ des fonctions bornées définies sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un K-espace vectoriel.

c Sur $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$

Définition

On définit, pour $f \in E = \mathscr{B}(X,\mathbb{K})$, $N_\infty(f) = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Propriété

Il s'agit d'une norme sur $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$.

d Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$

Définition

On définit, pour $f \in E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$,

$$N_1(f) = \int_a^b |f|\,\mathrm{d}x \quad N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x} = \left(\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \quad N_\infty(f) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Propriété

Il s'agit de normes sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$.

3 Boules et sphères

On fixe $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$.
Boule ouverte de centre a et de rayon r : $B(a,r) = \{x \in E,\ \|x-a\| < r\}$.
Boule fermée de centre a et de rayon r : $\overline{B}(a,r) = \{x \in E,\ \|x-a\| \leqslant r\}$.
Sphère de centre a et de rayon r : $S(a,r) = \{x \in E,\ \|x-a\| = r\}$.

Définition : Partie convexe

Une partie A de E est dite **convexe** lorsque pour tout $x, y \in E$ et pour tout $t \in [0,1]$, $tx + (1-t)y \in A$.

Propriété

Les boules sont convexes.

4 Parties, suites et fonctions bornées

Définition : Partie bornée

$A \in \mathscr{P}(E)$ est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leqslant M$.

Propriété

Toute boule (ouverte ou fermée) de E est bornée.

Définition : Fonction bornée

Soit X un ensemble non vide, $f \in E^X$.
On dit que f est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| \leqslant M$ (ie si $f(A)$ est une partie bornée de E.)
On note $\mathscr{B}(X,E)$ l'ensemble des fonctions de E^X bornées.

Propriété

On pose, pour $f \in \mathscr{B}(X,E)$, $N_\infty(f) = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$, bien défini.
Alors (E, N_∞) est un espace vectoriel normé.

On obtient en particulier, pour $X = \mathbb{N}$:

Définition : Suite bornée

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que u est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in N$, $\|u_n\| \leqslant M$ (ie si $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E.)
On note $\mathscr{B}(X,E)$ l'ensemble des fonctions de E^X bornées.

5 Produit fini d'espaces vectoriels normés

Propriété

Si $(E_1,N_1),\dots,(E_p,N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
On pose, pour $x = (x_1,\dots,x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$, $N(x) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} N_k(x_k)$.
*Alors N est une norme sur $E_1 \times \dots \times E_p$ appelée **norme produit**.*

II SUITE D'ÉLÉMENTS D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ

On fixe $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non nul.

1 Convergence d'une suite

Définition : Suite convergente, divergente

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.
On dit que u **converge** vers ℓ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un rang à partir duquel u_n est à distance au plus ε de ℓ.
Autrement dit $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$.
Dans ce cas, on dit que u est **convergente** et que ℓ est sa **limite**. On note $u_n \longrightarrow \ell$ ou $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \ell$.
Lorsque u n'est pas convergente, elle est dite **divergente**.

Définition

Si $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $f \in E$.
Si $f_n \xrightarrow{N_1} f$, on parle de **convergence en moyenne**.
Si $f_n \xrightarrow{N_2} f$, on parle de **convergence en moyenne quadratique**.
Si $f_n \xrightarrow{N_\infty} f$, on parle de **convergence uniforme** (convergence graphique).

Théorème : Unicité de la limite

Soit $u \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell, \ell' \in E$. Si $u_n \longrightarrow \ell$ et $u_n \longrightarrow \ell'$, alors $\ell = \ell'$.

Propriété

Toute suite convergente est bornée.

Propriété

Soit $u \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. Si $u_n \longrightarrow \ell$, alors $\|u_n\| \longrightarrow \|\ell\|$.

Propriété

Si $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$ tel qu'à partir d'un certain rang $\|u_n - \ell\| \leqslant \alpha_n$ et $\alpha_n \longrightarrow 0$, alors $u_n \longrightarrow \ell$.

2 Opérations algébriques

Propriété : Espace vectoriel des suites convergentes

Soit $u, v \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell, \ell' \in E, \lambda \in \mathbb{K}$. Si $u_n \longrightarrow \ell$ et $v_n \longrightarrow \ell'$, alors $u + \lambda v$ est convergente et $u_n + \lambda v_n \longrightarrow \ell + \lambda \ell'$.

Propriété

Si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \longrightarrow \ell \in E$ et $\alpha_n \longrightarrow \alpha \in \mathbb{K}$, alors $\alpha_n u_n \longrightarrow \alpha \ell$.

3 Suite à valeurs dans un produit

Propriété

Si $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, N la norme produit sur $E_1 \times \dots \times E_p$, $u = \left(u^{(1)}, \dots, u^{(p)}\right) \in (E_1 \times \dots \times E_p)^{\mathbb{N}}$, $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$.

Alors $u \xrightarrow{N} \ell$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $u^{(k)} \xrightarrow{N_k} \ell_k$.

III Comparaison de normes

Soit $(E, +, \times)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes sur E. On note $B_1(a,r)$ (respectivement $B_2(a,r)$) une boule ouverte pour N_1 (respectivement N_2).

1 Domination

Définition : Domination

On dit que N_1 est dominée par N_2 lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_2$.

Propriété

Soit N_1 dominée par N_2 ; $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. Si $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$, alors $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$.

Méthode : Montrer que N_1 n'est pas dominée par N_2

On peut chercher une suite (u_n) telle que $(N_2(u_n))$ borné mais pas $(N_1(u_n))$ ou alors telle que $N_2(u_n) \longrightarrow 0$ et non $N_1(u_n)$.

2 Équivalence

a Définition

Définition : Normes équivalentes

N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si elles se dominent mutuellement, si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $\alpha N_2 \leqslant N_1 \leqslant \beta N_2$.

Propriété

Si N_1 et N_2 sont équivalentes, $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$ si et seulement si $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$.

b Cas de $\mathbb{R}^n$

Propriété

Les trois normes usuelles sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

c Cas de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

Propriété

Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$,

- $N_1 \leqslant (b-a)N_\infty$ *et N_∞ n'est pas dominée par N_1.*
- $N_2 \leqslant \sqrt{b-a}N_\infty$ *et N_∞ n'est pas dominée par N_2.*
- $N_1 \leqslant \sqrt{b-a}N_2$ *et N_2 n'est pas dominée par N_1.*

d Cas de la dimension finie

Théorème

Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

Propriété

Dans un espace de dimension finie, une suite converge vers une limite si et seulement si chaque coordonnée dans une base tend vers la coordonnée correspondante de la limite.

IV Suites extraites, valeurs d'adhérence

Définition : Suite extraite

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v \in E^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad v_n = u_{\varphi(n)}$.

φ est appelée **extractrice**.

Lemme

Si φ est une extractrice, alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \varphi(n) \geqslant n$.

Propriété

Si $u \longrightarrow \ell$, toute suite extraite de u converge vers ℓ.

Définition : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in E^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans E) de suite extraite de u.

Propriété

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence.

Corollaire

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

Propriété

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors u converge vers cette limite.

Théorème : de Bolzano-Weierstraß dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Toute suite réelle ou complexe bornée a au moins une valeur d'adhérence.