# Opérations élémentaires et systèmes linéaires

## 1 Opérations élémentaires

Il existe 3 types d'opérations élémentaires :

**Les permutations** (ou plus exactement transpositions) $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$.

**Les transvections** $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$ avec $k \neq i$ ou $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_k$ avec $k \neq j$.

**Les dilations** $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$ avec $\lambda \neq 0$.

### a Interprétation en termes de produit matriciel

Les opérations élémentaires se traduisent par des multiplications à gauche (pour les lignes) ou à droite (pour les colonnes) par des matrices (carrées) inversibles dont la taille est égale aux nombre de lignes respectivement colonnes correspondantes.

**Permutations** $L_i \leftrightarrow L_j$ (resp. $C_i \leftrightarrow C_j$) se traduit par la multiplication à gauche (resp. à droite) par la **matrice de permutation** :

$$P_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & (0) & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \qquad\quad \uparrow \qquad\qquad\quad \uparrow \\ \qquad\quad i^{\mathrm{e}} \qquad\qquad\quad j^{\mathrm{e}} \end{array}$$

$P_{i,j}^2 = I_n$, $P_{i,j}$ inversible et $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$.

**Transvections** $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$ (resp. $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_k$) se traduit par la multiplication par une **matrice de transvection** $T_{i,k}(\lambda)$ à gauche (resp. $T_{k,j}(\lambda)$ à droite) avec

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \lambda \ \cdots & 1 & \\ & (0) & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \quad i^{\mathrm{e}} \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow \\ j^{\mathrm{e}} \end{array} = I_n + \lambda E_{i,j}$$

$T_{i,j}(\lambda)T_{i,j}(\mu) = T_{i,j}(\lambda+\mu)$ donc $T_{i,j}(\lambda)$ inversible et $\left(T_{i,j}(\lambda)\right)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$.

**Dilatation** $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (resp. $C_i \leftarrow \lambda C_i$) avec $\lambda \neq 0$ se traduit par la multiplication par une **matrice de dilatation** $D_i(\lambda)$ à gauche (resp. à droite) avec

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & (0) & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \quad i^{\mathrm{e}} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$D_i(\lambda)D_i(\mu) = D_i(\lambda\mu)$ donc $D_i(\lambda)$ inversible et $(D_i(\lambda))^{-1} = D_i\left(\lambda^{-1}\right)$.

### b Propriétés des opérations élémentaires

**Propriété**

*(i) Une opération élémentaire sur ses lignes ne change pas le noyau d'une matrice.*

*(ii) Une opération élémentaire sur ses colonnes ne change pas l'image d'une matrice.*

*(iii) Une opération élémentaire ne change pas le rang d'une matrice.*

### c Matrices échelonnées

**Définition**

Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite **echelonnée** en lignes (respectivement en colonnes) si chaque ligne (respectivement colonne) débute par un nombre strictement croissant de 0 jusqu'à ce qu'elles soient éventuellement nulles.

**Remarques**

**R 1 –** Si elle est carrée, elle est nécessairement triangulaire supérieure (resp. inférieure).

**R 2 –** Si une ligne (resp. colonne) est nulle, les suivantes le sont aussi.

**Exemples**

**E 1 –** $A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée en lignes. $2, 3, -4, 6$ sont appelés **pivots**.

**E 2 –** $B = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée en colonnes. $-1, -1$ sont les pivots.

**E 3 –** $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée en lignes (même si elle est triangulaire).

**Propriété**

*Toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée en lignes (resp. colonnes) par des opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes.)*

On applique l'algorithme du pivot de Gauss aux lignes (resp. colonnes) de la matrice.

### d Application au calcul du rang

On ne change pas le rang par opérations élémentaires. Quelle est le rang d'une matrice échelonnée ?

**Propriété**

*Le rang d'une matrice échelonnée en lignes (resp. colonnes) est le nombre de lignes (resp. colonnes) non nulles.*

**Remarque**

En faisant des opérations sur les colonnes, on peut obtenir à la fois le rang, l'image et le noyau !

**Exemple**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{rg} A \underset{C_1 \leftrightarrow C_3}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2^{(2)} \leftarrow C_2^{(1)} - 2C_1^{(1)} \\ C_3^{(2)} \leftarrow C_3^{(1)} - 4C_1^{(1)}}}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{C_3^{(3)} \leftarrow C_3^{(2)} - C_2^{(2)}}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\operatorname{rg} A = 2$, $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. $\dim \operatorname{Ker} A = 1$. Et

$$C_3^{(3)} = 0 = C_3^{(2)} - C_2^{(2)} = \left(C_3^{(1)} - 4C_1^{(1)}\right) - \left(C_2^{(1)} - 2C_1^{(1)}\right) = C_3^{(1)} - C_2^{(1)} - 2C_1^{(1)} = C_1 - C_2 - 2C_3.$$

Donc $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

**Remarque**

En appliquant ensuite un pivot de Gauss sur les lignes, on peut se ramener à $J_r$.

### e Application à l'inversion de matrice

**Propriété**

*Par des opérations élémentaires sur des lignes (respectivement des colonnes), on peut transformer une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en $I_n$.*

On en déduit la méthode d'inversion de matrice par opérations **exclusivement** sur les lignes ou les colonnes de $A$.

- Sur les lignes : $P_k P_{k-1} \cdots P_1 A = I_n \Longrightarrow A^{-1} = P_k P_{k-1} \cdots P_1 I_n$.
- Sur les colonnes : $A Q_1 Q_2 \cdots Q_k = I_n \Longrightarrow A^{-1} = I_n Q_1 Q_2 \cdots Q_k$.

# 2 Systèmes linéaires

## a Traductions d'un système linéaire

On considère un système linéaire de $n$ équations à $p$ inconnues dans $\mathbb{K}$ :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

On rappelle que la matrice du système linéaire est définie par

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

et la matrice augmentée est

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right)$$

**Interprétations :**

- **Matricielle** : si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$,
$$\boxed{(S) \iff A\vec{x} = \vec{b}}$$
- **Équation linéaire** : si $u$ est l'application linéaire canoniquement associée à $A$,
$$\boxed{(S) \iff u(\vec{x}) = \vec{b} \iff \vec{x} \in u^{-1}\left(\left\{\vec{b}\right\}\right)}$$
- **Formes linéaires** : Soit pour $i \in [\![1, n]\!]$ $\varphi_i$ la forme linéaire de $\mathbb{K}^p$ correspondant à la $i^{\text{e}}$ (canoniquement associée à la $i^{\text{e}}$ ligne de $A$) :
$$\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \vec{x} & \longmapsto & a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p \end{array} \right.$$
alors
$$\boxed{(S) \iff \forall\, i \in [\![1, n]\!],\quad \varphi_i(\vec{x}) = b_i \iff \vec{x} \in \bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} \varphi_i^{-1}(\{b_i\})}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $(S)$ est soit vide, soit l'intersection d'hyperplans affines $\varphi_i^{-1}(\{b_i\})$ de direction $\varphi_i^{-1}(\{0\}) = \operatorname{Ker} \varphi_i$.

## b Espace des solutions

**Définition**

On appelle **rang** du système $(S)$ le nombre $r = \operatorname{rg}(S) = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u$.

**Remarque**

$\operatorname{rg}(S) \leqslant \min(n, p)$.

**Propriété**

*L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions du système homogène $(H)$ associé à $(S)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $\dim \mathcal{S}_H = p - \operatorname{rg} S$.*

**Propriété**

*L'ensemble des solution $\mathcal{S}_S$ est soit vide, soit de la forme $\mathcal{S}_S = \vec{x}_0 + \mathcal{S}_H$ où $\vec{x}_0 \in \mathbb{K}^p$ est une solution particulière. C'est donc un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ de direction $\mathcal{S}_H$.*

*Lorsque $\mathcal{S}_S = \varnothing$, le système est dit **incompatible**. Sinon il est **compatible**.*

L'algorithme du pivot de Gauss appliqué aux systèmes a été présenté dans un chapitre de début de d'année : appliqué aux lignes de la matrice augmentée pour la rendre échelonnée en lignes (à permutation éventuelle des inconnues près), il permet d'obtenir un système équivalent

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} p_1 x_{i_1} + & \cdots & & & & = & b'_1 \\ & p_2 x_{i_2} + & \cdots & & & = & b'_2 \\ & & & & & \vdots & \\ & & & p_r x_{i_r} + & \cdots & = & b'_r \\ & & & & 0 & = & b'_{r+1} \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & 0 & = & b'_n \end{array} \right.$$

où $r = \operatorname{rg}(S)$, $i_1 < \ldots < i_r$, $p_1, \ldots, p_r$ non nuls, les $n - r$ dernières équations sont les **équations de compatibilité**, elle permettent de savoir si $\mathcal{S}_S = \varnothing$.

On tire successivement $x_{i_r}$, puis $x_{i_{r-1}}$ jusqu'à $x_{i_1}$ en fonction des autres inconnues. On retrouve la dimension $n - r$.