Déterminant

1 Groupe symétrique

Définition : Permutation, groupe symétrique

Si E est un ensemble, on appelle **permutation** de E toute bijection de E dans E. On note $\mathfrak{S}(E)$ leur ensemble.

Si $E = \mathbb{N}_n = [\![1, n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathfrak{S}_n$ appelé **groupe symétrique d'ordre n (ou de degré n)** cet ensemble.

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Remarque

Attention ! $\mathfrak{S}_n$ n'est pas de cardinal n mais ... $n!$ (!)

Propriété

$(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe d'ordre (ie de cardinal) $n!$, non abélien dès que $n \geqslant 3$.

Définition : Support

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, son **support** est l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}_n$ qui **ne sont pas** invariants par σ.

Propriété

Deux permutations à supports disjoints commutent.

Définition : Transposition, cycle

- Une **transposition** τ est une permutation qui échange deux éléments i et j de $\mathbb{N}_n$, et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i, j\}$.
  On la note $\tau = (i\ j)$ ou parfois $\tau_{i,j}$.
  $\tau_{i,j}(i) = j$, $\tau_{i,j}(j) = i$ et si $k \notin \{i, j\}$, $\tau_{i,j}(k) = k$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leqslant p \leqslant n$.
  On appelle **p-cycle** une permutation c de $\mathfrak{S}_n$ qui permute circulairement p éléments $i_1, i_2, \ldots, i_n$ de $\mathbb{N}_n$ et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i_1, \ldots, i_p\}$ et telle que
  $$c(i_1) = i_2 \ ;\ c(i_2) = i_3 \ ;\ \cdots \ ;\ c(i_{p-1}) = i_p \ ;\ c(i_p) = i_1$$
  p est la **longueur** du cycle c. On note $c = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_p)$.

Théorème

Toute permutation se décompose en produit (composée) de cycles à supports disjoints. La décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Corollaire

Toute permutation se décompose en produit de transpositions.

Définition : Inversions, signature

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle **inversion** par σ tout couple (i,j) tel que $i<j$ et $\sigma(i)>\sigma(j)$.
On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions par σ.
On appelle **signature** de σ le nombre $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{I(\sigma)} \in \{-1,1\}$.
Une permutation σ est dite **paire** lorsque $I(\sigma)$ est pair et donc $\varepsilon(\sigma)=1$. Elle est dite **impaire** dans le cas contraire.

Théorème

Soit $n \geqslant 2$. L'application $\varepsilon : \left| \begin{array}{ccc} (\mathfrak{S}_n, \circ) & \longrightarrow & (\{-1,1\},\times)=(\mathbb{U}_2,\times) \\ \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma) \end{array} \right.$ *est un morphisme de groupe, ie si $\sigma,\sigma' \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma\sigma')=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.*

Propriétés

(i) Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose en produit de N transpositions, $\varepsilon(\sigma)=(-1)^N$.
En particulier, cette décomposition n'est pas unique mais la parité du nombre de termes est toujours celle de la permutation.

(ii) Si c est un p-cycle, $\varepsilon(c)=(-1)^{p-1}$.

(iii) Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right)=\varepsilon(\sigma)$.

2 Formes n-linéaires

Définition

Soit $\mathbb{K}$ corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$, E,F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Une application $f : E^n \to F$ est dite **n-linéaire** lorsque pour tout $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in E^n$, et tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$f_i : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_{i-1},\vec{x},\vec{x}_{i+1},\dots,\vec{x}_n) \end{array} \right. \quad \text{est linéaire.}$$

(Linéarité par rapport à la i^{e} variable.) c'est-à-dire $\forall (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in E^n,\ \ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \ \forall \vec{x},\vec{y} \in E,\ \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_{i-1},\vec{x}+\lambda\vec{y},\vec{x}_{i+1},\dots,\vec{x}_n)=f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_{i-1},\vec{x},\vec{x}_{i+1},\dots,\vec{x}_n)+\lambda f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_{i-1},\vec{y},\vec{x}_{i+1},\dots,\vec{x}_n)$$

On note $\mathscr{L}_n(E,F)$ l'ensemble des formes n-linéaires.
Lorsque $F=\mathbb{K}$, on parle de **forme n-linéaire**.

Propriété

$\mathscr{L}_n(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition

Soit $f \in \mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$.

- f est dite **symétrique** si et seulement si

$$\forall (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in E^n,\quad \forall\, i \neq j,\quad f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_n) = f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n).$$

- f est dite **antisymétrique** si et seulement si

$$\forall (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in E^n,\quad \forall\, i \neq j,\quad f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_n) = -f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n).$$

- f est dite **alternée** si et seulement si

$$\forall (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in E^n,\quad \forall\, i \neq j,\quad f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Propriétés : Caractérisations

Soit $f \in \mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$.

(i) f est symétrique si et seulement si

$$\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n,\quad \forall (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in E^n,\quad f(\vec{x}_{\sigma(1)},\dots,\vec{x}_{\sigma(n)}) = f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n).$$

(ii) f est antisymétrique si et seulement si

$$\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n,\quad \forall (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in E^n,\quad f(\vec{x}_{\sigma(1)},\dots,\vec{x}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n).$$

(iii) f est alternée si et seulement si

$$\forall (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in E^n,\quad (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \text{ liée} \Longrightarrow f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Propriété

Soit $f \in \mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$. f est alternée si et seulement si f est antisymétrique.

Remarque

Le sens réciproque est vrai car $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, c'est-à-dire si $2_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$.

Si $n = \dim E$, l'ensemble $\Lambda_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

Remarque

Deux formes n-linéaires alternées sur E sont donc toujours proportionnelles.

3 Déterminant

a Définitions

On fixe E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.

Définition

On appelle **déterminant dans la base $\mathscr{B}$** l'unique forme n-linéaire alternée sur E notée $\det_{\mathscr{B}}$ telle que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

Si pour $1 \leqslant j \leqslant n$, $\vec{x}_j \in E$ de coordonnées $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ dans $\mathscr{B}$, alors

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n}$$

On note

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Remarque

Par définition, le déterminant est n-linéaire alterné. En particulier, le déterminant d'une famille liée est nul.

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ des bases de E.

(i) ***Formule de changement de base*** : $\det_{\mathscr{B}'} = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}$.

(ii) $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$ *et* $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \left(\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\right)^{-1}$.

(iii) $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ *est libre/une base de E si et seulement si* $\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Propriété : Interprétation géométrique

(i) *Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

(ii) *Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le volume orienté du parallélogramme construit sur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.*

On montrer que si $u \in \mathscr{L}(E)$, alors $\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))$ ne dépend pas de $\mathscr{B}$. On en déduit la définition :

Définition

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **déterminant** de u le scalaire $\det u = \det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) = \det_{(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)}(u(\vec{e}_1),\ldots,u(\vec{e}_n))$ où $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E.

Propriétés

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

(i) $\forall\,(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n) \in E,\ \ \det_{\mathscr{B}}(u(\vec{x}_1),\ldots,u(\vec{x}_n)) = \det u \times \det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)$.

(ii) $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.

(iii) $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$.

(iv) ⚠ $\forall\,\lambda \in \mathbb{K},\ ,\ \det(\lambda u) = \lambda^{n} \det u$.

(v) $u \in \mathscr{GL}(E) \Longleftrightarrow \det u \neq 0$.

(vi) $\det : (\mathscr{GL}(E), \circ) \to (\mathbb{K}^*, \times)$ *est un morphisme de groupes.*

(vii) Si $u \in \mathscr{GL}(E)$, $\det\left(u^{-1}\right) = (\det u)^{-1}$.

Remarque

⚠ det n'est pas linéaire : $\det(u+v) \neq \det u + \det v$ en général. Exemple $\pm\mathrm{id}_E$ en dimension impaire.

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}_n}$. On définit le **déterminant** de A par

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n}.$$

Remarque

Dans chaque terme de la somme, on choisit exactement un terme par colonne et par ligne.

Propriétés

(i) Si $C_1,\ldots,C_n$ *sont les vecteurs colonnes de* A *et* $\mathscr{B}$ *la base canonique de* $\mathbb{K}^n$, $\det A = \det_{\mathscr{B}}(C_1,\ldots,C_n)$.

(ii) Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n, $u \in \mathscr{L}(E)$ *représenté par* A *dans une base de* E, *alors* $\det A = \det u$.

(iii) $\det I_n = 1$.

(iv) Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\det AB = \det A \det B$.

(v) ⚠ *Si* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^{n} \det A$.

(vi) $\det A^{\mathsf{T}} = \det A$.

(vii) $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}$.

(viii) $\det : (\mathscr{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \to (\mathbb{K}^*, \times)$ *est un morphisme de groupes.*

(ix) *Si A est inversible,* $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$.

(x) *Des matrices semblables ont même déterminant : le déterminant est un invariant de similitude.*

Remarque

⚠ $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ en général : det n'est pas linéaire.

b Calculs

Propriété

(i) *Si une ligne ou une colonne est nulle, ou une combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul.*

(ii) *On ne change pas le déterminant avec les opérations*

$$L_i \leftarrow L_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k L_k \quad \text{ou} \quad C_j \leftarrow C_j + \sum_{k \neq i} \lambda_k C_k$$

(transvections successives.)

(iii) *En multipliant par λ une ligne ou une colonne, on multiplie par λ le déterminant.*

(iv) *Si on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1. Plus généralement, si on permute les lignes ou les colonnes avec une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on multiplie le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$.*

(v) *Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses cœfficients diagonaux.*

Définition : Mineurs, cofacteurs, comatrice

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in [\![1, n]\!]$.

- On appelle **mineur** d'indice (i, j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ obtenu en retirant L_i et C_j à A.
- On appelle **cofacteur** d'indice (i, j) le nombre $C_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.
- On appelle **comatrice** de A la matrice de ses cofacteurs :

$$\tilde{A} = \operatorname{Com} A = (C_{i,j})_{i,j} = \left((-1)^{i+j} \Delta_{i,j}\right)_{i,j}.$$

Propriété

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) ***Développement par rapport à** L_i : Si $i \in [\![1, n]\!]$,* $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} a_{i,j}$.

(ii) ***Développement par rapport à** C_j : Si $j \in [\![1, n]\!]$,* $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} a_{i,j}$.

Propriété : Déterminant de matrice triangulaire par blocs

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, *alors* $\begin{vmatrix} A & (*) \\ (0) & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & (0) \\ (*) & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B.$

Remarque

⚠ même lorsque toutes les matrices sont carrées, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C$ ou autre $\det(AD - BC)$ en général !

Propriété : Déterminant de Vandermonde

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$,

$$V(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Remarque

$V(x_1,\dots,x_n) \neq 0$ si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

c Applications

Propriété : Formule de la comatrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors* $A \times (\mathrm{Com}\, A)^\top = (\mathrm{Com}\, A)^\top \times A = \det(A) \cdot I_n$.
Si, de plus, A *est inversible, alors* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(\mathrm{Com}\, A)^\top$.

Remarque

Intérêt théorique. Utile en pratique seulement si $n = 2$ ou 3.