Calcul matriciel

$\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.
Sauf mention contraire, n, p, q, r, s désignent des entiers naturels non nuls.

I CALCUL MATRICIEL

1 Espaces de matrices

On peut voir une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ comme un np-uplet de $\mathbb{K}^{np}$ noté de manière différente : il y a une bijection évidente entre $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^{np}$.

On va ainsi transporter la structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de ce dernier en définissant des lois + et $\cdot$ semblables sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (qu'on ne redonne pas).

Ainsi, tout naturellement,

Propriétés

(i) $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ *a une structure de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, d'élément nul* $0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

Remarque

$\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$ (et non $n!$)

Définition

On appelle **base canonique** $(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,p})$ où $E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow i \\ \quad\uparrow & \\ \quad j & \end{array}$

$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix}$ s'écrit de manière unique $\sum_{i,j} m_{i,j} E_{i,j}$.

Propriété

$\forall\, i, k \in [\![1, n]\!],\ \forall\, j, \ell \in [\![1, p]\!],\ \left(E_{i,j}\right)_{k,\ell} =$

Définition : Produit matriciel

On définit $\times$: $\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \longmapsto & C = A \times B \end{array}\right.$ avec

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \ \forall\, j \in [\![1,q]\!],\ \ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Remarques

R1 – Si $L_1,\dots,L_n$ sont les lignes de A et $C_1,\dots,C_q$ les colonnes de B :
- $c_{i,j} = L_i \times C_j$.
- Les lignes de $A \times B$ sont $L_1 \times B,\dots,L_n \times B$.
- Les colonnes de $A \times B$ sont $A \times C_1,\dots,A \times C_q$.

R2 – On retiendra que la multiplication à gauche agit sur les lignes, et la multiplication à droite sur les colonnes (comme les indices).

R3 – ⚠ Il faut que les tailles soient compatibles pour multiplier des matrices.
Même si les matrices sont carrées, **le produit n'est pas commutatif** (sauf si $n = 1$!).

Propriétés : Bilinéarité, associativité, neutre

(i) ***Associativité*** *: Soient* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

(ii) ***Bilinéarité*** *: Soient* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. $A \longmapsto A \times B$ *et* $B \longmapsto A \times B$ *sont linéaires.*

(iii) ***Neutre*** *: Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A \times I_p = I_n \times A = A$.

Propriété : $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$

Lorsque les tailles sont compatibles, $E_{i,j} \times E_{k,\ell} =$

Remarque

⚠ Les différentes $E_{\circ,\circ}$ ne vivent pas dans les mêmes espaces de matrices (ne sont pas de mêmes tailles.)

Théorème : Produit par blocs

Soit les matrices par blocs $M = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{p}{\leftrightarrow} & \overset{q}{\leftrightarrow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow n \\ \updownarrow m \end{array} \in \mathcal{M}_{n+m,p+q}(\mathbb{K})$ *et* $N = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{r}{\leftrightarrow} & \overset{s}{\leftrightarrow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow q \end{array} \in \mathcal{M}_{p+q,r+s}(\mathbb{K})$ *où* A,B,C,D,E,F,G,H *sont des matrices de format correspondant. Alors*
$M \times N = \begin{pmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m,r+s}(\mathbb{K})$.

2 Transposition

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle **transposée** de A la matrice ${}^tA = A^\top \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad \left(A^\top\right)_{i,j} = \left({}^tA\right)_{i,j} = (A)_{j,i}$$

Remarques

R1 – ${}^tA$ notation française. $A^\top$ notation anglo-saxonne, donc internationale. Il faut connaître les deux, mais il semble qu'au concours la première soit plus courante.

R2 – La i^e ligne de A est la i^e colonne de $A^\top$.
On obtient $A^\top$ à partir de A par symétrie d'axe $i = j$ ie la diagonale.

Propriétés

Soit $T : \begin{array}{|ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^\top \end{array}$

(i) ***Linéarité*** *: Si* $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(A+B)^\top = A^\top + B^\top \quad \text{et} \quad (\lambda A)^\top = \lambda A^\top$$

(ii) T *est* ***involutif*** *: si* $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$.

(iii) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A \times B)^\top = B^\top \times A^\top$.

3 Matrices carrées

a La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Propriété

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, ni commutatif ni intègre dès que $n \geqslant 2$, d'élément unité I_n. Ainsi, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une K-algèbre de dimension n^2.

On peut en particulier appliquer :

Propriété : Formules du Binôme et $A^m - B^m$

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *tels que* $\boxed{A \times B = B \times A}$, $m \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

$$A^m - B^m = (A-B)\left(A^{m-1} + A^{m-2}B + \cdots + AB^{m-2} + B^{m-1}\right)$$

Définition

On appelle **groupe linéaire** le groupe $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ des inversible de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

$$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A \times B = B \times A = I_n.$$

Remarque

N'a de sens que pour des matrices **carrées** !

Propriétés

(i) $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ *est un groupe.*

(ii) *Si* $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $A \times B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

(iii) *Si* $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $A^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(iv) *Sont équivalentes :*
- *A est inversible*
- *A est inversible à gauche*
- *A est inversible à droite*
- *les colonnes de A forment une famille libre*
- *les lignes de A forment une famille libre*

(v) *Si* $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$ *et* $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $\lambda A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.

(vi) $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *si et seulement si* $A^\intercal \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *et dans ce cas* $(A^\intercal)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\intercal$

Calcul pratique : Pour démontrer l'inversibilité d'une matrice et calculer son inverse, on peut :

- Résoudre le système $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$: il admet une unique solution si et seulement si A est inversible et alors on obtient $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.
- En effectuant des opérations élémentaires (pivot de Gauss) :
  - ⋆ soit exclusivement sur les lignes,
  - ⋆ soit exclusivement sur les colonnes,

  se ramener à I_n et effectuer les mêmes opérations simultanément en partant de I_n qui va devenir A^{-1} si A est inversible.
- En reconnaissant une matrice de passage (cf plus loin).

b Matrices carrées particulières

Définition

- On appelle **matrice triangulaire supérieure** (respectivement **inférieure**) tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall\, i > j, \quad m_{i,j} = 0$ (respectivement $\forall\, i < j, \quad m_{i,j} = 0$.)
  On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble de ces matrices.
  Lorsque les cœfficients diagonaux sont également tous nuls, on parle de **matrice triangulaire stricte.**

- On appelle **matrice diagonale** tout matrice carrée $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall\, i\neq j,\ \ m_{i,j}=0$.
  On note $\operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n)=\begin{pmatrix}a_1 & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & a_n\end{pmatrix}$.
  On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.
- On appelle **matrice scalaire** toute matrice de la forme λI_n où $\lambda\in\mathbb{K}$.
- On dit que $S\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **symétrique** lorsque $S^{\mathsf{T}}=S$ ie $\forall\, i,j\in[\![1,n]\!],\ \ s_{i,j}=s_{j,i}$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})=\{S\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\mid S^{\mathsf{T}}=S\}$.
- On dit que $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **antisymétrique** lorsque $A^{\mathsf{T}}=-A$ ie $\forall\, i,j\in[\![1,n]\!],\ \ a_{j,i}=-a_{i,j}$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\mid A^{\mathsf{T}}=-A\}$.

Remarque

La diagonale d'une matrice antisymétrique est nécessairement nulle.

Propriété

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimensions respectives

Remarque

Si $0\leqslant \ell\leqslant n$, $\begin{pmatrix}0 & & (\star)\\ & \ddots & \\ (0) & & 0\end{pmatrix}^{\ell}=\begin{array}{c}\longleftarrow \ell \longrightarrow\\ \begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & & (\star)\\ & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & & 0\\ (0) & & & \ddots & \vdots\\ & & & & 0\end{pmatrix}\end{array}$

Idem avec les matrices triangulaires inférieures strictes.

Propriété

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives

Remarque

L'inverse d'une matrice (inversible) (anti)symétrique l'est encore, mais c'est faux pour le produit en général.

c Trace d'une matrice carrée

Définition

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A le scalaire $\operatorname{tr} A=\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}$.

Propriétés

(i) ***Linéarité*** *: Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$ et $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A$.*

(ii) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

⚠ $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(CAB) = \operatorname{tr}(BCA) \neq \operatorname{tr}(BAC)$ en général. (Permutations circulaires seulement).

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\operatorname{tr}(ABC) = 2 \neq 1 = \operatorname{tr}(BAC)$.

II MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

1 Matrice d'une application linéaire dans des bases

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.
  - ⋆ Si $x = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n \in E$, de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, on appelle **matrice de x dans la base $\mathcal{B}$** la matrice colonne

$$X = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

  - ⋆ Si $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs de E, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.
Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on note $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ les coordonnées de $\vec{x}_j$ dans la base $\mathcal{B}$ (ie $\vec{x}_j \underset{\mathcal{B}}{\longleftrightarrow} X_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{pmatrix}$.)
On appelle **matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$** la matrice rectangulaire

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} X_1 & X_2 & \dots & X_p \end{array} \right) = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

On place dans les colonnes les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\mathcal{F}$.

- Si E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = \left(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p\right)$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
On appelle **matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{C}$ à l'arrivée** la matrice rectangulaire

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B})) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_p)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

On place dans les colonnes les coordonnées dans $\mathcal{C}$ des images par u des vecteurs de $\mathcal{B}$.
Lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$ ($E = F$: endomorphisme) et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on note

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Propriété

L'application $\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \end{array}\right.$ *est un isomorphisme (d'espaces vectoriels.)*

Remarque

On retrouve que $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim E \times \dim F$.

Propriété

Soient E,F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
Pour tout $\vec{x} \in E$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\vec{x})) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x})$.

Autrement dit, $y = u(x)$ se traduit matriciellement par $Y = AX$ avec des notations évidentes.

Propriété

Soient E,F,G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$, $n = \dim F$, $q = \dim G$, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F, $\mathcal{D}$ une base de G, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u).$$

et donc

Propriété

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E.

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}\right.$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

2 Application linéaire canoniquement associée

Définition

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle **application linéaire canoniquement associée à** A l'unique $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dont la matrice dans les bases canoniques est A.

Ainsi, écrire $(y_1, \ldots, y_n) = u(x_1, \ldots, x_p)$ revient à écrire $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.
Les colonnes de A contiennent les images par u des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$. Application linéaire canoniquement associée :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+3z, 4x+5y+6z) \end{array} \right.$$

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, u l'application linéaire canoniquement associée à A. On définit l'image, le noyau et le rang de A par :

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \text{ correspond à } \operatorname{Ker} u = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^p \mid u(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{K}^p}\}$$

$$\operatorname{Im} A = \{AX \; ; \; X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\} \text{ correspondant à } \operatorname{Im} u = \{u(\vec{x}) \; ; \; \vec{x} \in \mathbb{K}^p\}$$

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} A)$$

Propriété

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

(i) $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ *où* $C_1, \dots, C_p$ *sont les colonnes de* A.

(ii) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p)$.

(iii) $\operatorname{rg} A + \dim(\operatorname{Ker} A) = p$.

Propriété

Sont équivalentes :

(i) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est inversible*

(ii) Son application linéaire canoniquement associée u *est un automorphisme*

(iii) $\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(iv) $\operatorname{rg} A = n$

3 Changement de base

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E.

On appelle **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$** notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ dont les colonnes sont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\mathcal{B}'$. Autrement dit :

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\operatorname{id}_E)$$

Propriétés

Toute matrice de passage est inversible et $\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Remarques

R1 – La réciproque est vraie : toute matrice inversible est une matrice de passage.

R2 – On en déduit une nouvelle méthode d'inversion de matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\mathscr{B}' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3') = u(\mathscr{B})$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \vec{e}_1' & = & \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2' & = & 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3' & = & 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \end{array}\right. \iff \cdots \iff \left\{\begin{array}{lcl} \vec{e}_1 & = & -\vec{e}_1' + 2\vec{e}_2' - \vec{e}_3' \\ \vec{e}_2 & = & 2\vec{e}_1' - 2\vec{e}_2' + \vec{e}_3' \\ \vec{e}_3 & = & -\vec{e}_2' + \vec{e}_3' \end{array}\right.$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété : Changement de base d'un vecteur

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E, $\vec{x} \in E$.
Si $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{x})$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\vec{x})$, alors

$$\underset{\mathscr{B}}{X} = \underset{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}{P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}} \times \underset{\mathscr{B}'}{X'}$$

Propriété : Changement de base pour une application linéaire

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E, $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ deux bases de F, $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
Soient $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$. Alors

$$\underset{\mathscr{C}', \mathscr{B}'}{A'} = \underset{\mathscr{C}' \to \mathscr{C}}{P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}}} \times \underset{\mathscr{C}, \mathscr{B}}{A} \times \underset{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}{P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}}$$

c'est-à-dire, si $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$,

$$A' = Q^{-1}AP \quad ie \quad A = QA'P^{-1}$$

Corollaire : Changement de base pour un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ deux bases de E, $u\in\mathscr{L}(E)$.
Soient $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $A'=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$. Alors

$$\underset{\mathscr{B}'}{A'} = \underset{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}{P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}} \times \underset{\mathscr{B}}{A} \times \underset{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}{P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}}$$

c'est-à-dire, si $P=P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$

$$A'=P^{-1}AP \quad ie \quad A=PA'P^{-1}$$

4 Matrices équivalentes

Définition : Matrices équivalentes

Une matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite **équivalente** à une autre matrice B de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si on peut trouver $U\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et $V\in\mathscr{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A=UBV$.

Cela définit une relation d'équivalence.

Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles représentent une même application linéaire.

Propriété

A et B sont équivalentes si et seulement si $A^\intercal$ et $B^\intercal$ le sont.

Comme en multipliant à gauche ou à droite par une matrice inversible on ne change pas le rang (d'après un résultat connu sur les applications linéaires), on a que deux matrices équivalentes ont même rang.

En particulier, les opérations élémentaires qui se traduisent par des multiplications à gauche ou à droite par des matrices inversibles ne changent pas le rang.

Théorème

Une matrice $A\in\mathscr{M}_{n,p}(K)$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à $J_{n,p,r}=\begin{pmatrix} I_r & (0)\\ (0) & 0_{n-r,p-r}\end{pmatrix}$.

Remarque

Par opération élémentaires, on peut passer de A à $J_{n,p,r}$.

Les opérations sur les lignes se traduisent par la multiplication à gauche par des matrices inversibles, les opérations sur les colonnes se traduisent par la multiplication à droite par des matrices inversibles. On obtient alors explicitement U et V inversibles telles que $UAV=J_{n,p,r}$.

Corollaire

(i) *Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

(ii) *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^\top)$.

(iii) *Le rang d'une matrice est celui de la famille de ses vecteurs lignes.*

5 Matrices semblables

Définition : Matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite semblable à B lorsqu'on l'on a $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$A = PBP^{-1}$$

C'est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences s'appellent les classes de similitude.

Remarque

Des matrices semblables sont équivalentes, mais la réciproque est fausse.
En particulier, des matrices semblables ont même rang.

Propriété

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme.*

Méthode : pour montrer que deux matrices sont semblables, on peut introduire l'endomorphisme canoniquement associé à l'une et chercher une base dans laquelle on obtient l'autre.

Propriété

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *telles que* $A = PBP^{-1}$.

(i) $\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A^k = PB^kP^{-1}$

(ii) *A inversible ssi B l'est, et si c'est le cas, la formule précédente est valable dans $\mathbb{Z}$.*

Propriété

Si A et B sont semblables alors $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$. *La réciproque est fausse.*

d'où la définition :

Définition

Soit E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle trace de u, notée $\operatorname{tr} u$, la trace de n'importe quelle matrice le représentant.

Propriété

tr *est une forme linéaire sur* $\mathcal{L}(E)$ *et si* $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.

Propriété

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

Exercice

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $p_1, \dots, p_m$ des projecteurs de E dont la somme vaut id_E. On note $F_1, \dots, F_m$ les images de $p_1, \dots, p_m$. Montrer que $E = \overset{m}{\underset{k=1}{\oplus}} F_k$.

6 Rang et matrices extraites

Définition : Matrice extraite

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **matrice extraite** ou **sous-matrice** de A toute matrice dont les cœfficients sont les $a_{i,j}$ pour $(i, j) \in I \times J$ avec $I \subset [\![1, n]\!]$ et $J \subset [\![1, p]\!]$.

On notera $A|_{I\times J}$ cette matrice, obtenue en supprimant des lignes et des colonnes de A.

Propriété

Le rang d'une matrice est l'ordre maximum de ses matrices extraites (carrées) inversibles.