Théorème du rang

Théorème : du rang

$u \in \mathcal{L}(E,F)$ induit un isomorphisme de tout supplémentaire H de $\operatorname{Ker} u$ sur $\operatorname{Im} u$.
Si, de plus, E est de dimension finie, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u$.

Démonstration

- Soit H supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E : $H \oplus \operatorname{Ker} u = E$, et soit $\tilde{u} : \left| \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$ application linéaire induite par u sur H à valeur dans $\operatorname{Im} u$, qui est bien définie (à préciser car on restreint à l'arrivée.)
  On a déjà $\tilde{u}$ linéaire car u l'est. Reste à voir qu'elle est bien bijective.
  Injectivité : Si $x \in \operatorname{Ker} \tilde{u}$, $x \in H$ et $\tilde{u}(x) = u(x) = 0_E$ donc $x \in H \cap \operatorname{Ker} u = \{0_E\}$ car H est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$.
  Surjectivité : Si $y \in \operatorname{Im} u$, on a $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Mais on peut décomposer $x = x_H + x_K$ avec $x_H \in H$ et $x_K \in \operatorname{Ker} u$ et alors $y = u(x_H) + u(x_K) = u(x_H) = \tilde{u}(x_H)$.
- En dimension finie, on en déduit que $\dim H = \dim \operatorname{Im} u = \operatorname{rg} u$ avec $\dim H = \dim E - \dim \operatorname{Ker} u$ on obtient la formule voulue. □

Matrices de rang r et matrice J_r

Théorème

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Démonstration

- Si A est de rang r, soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ canoniquement associée. On cherche des bases dans lesquelles u est représentée par $J_{n,p,r}$.
  La forme de la matrice recherchée incite à commencer par déterminer les derniers vecteurs de $\mathcal{B}$ puis les premiers vecteurs de $\mathcal{C}$.
  Comme $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} A = r$ alors, d'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker} u) = p - r$. Soit $(e_{r+1}, \ldots, e_p)$ une base de $\operatorname{Ker} u$ que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E.
  Soient pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $f_i = u(e_i)$. Comme $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base d'un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E et comme u induit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ sur $\operatorname{Im} u$ (théorème du rang), $(f_1, \ldots, f_r)$ est une famille libre de F que l'on peut compléter en une base $\mathcal{C}$.
  On a alors bien $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = J_{n,p,r}$.
- Si A est équivalente à J_n, p, r, alors elles ont même rang. Mais le rang $J_{n,p,r}$ est le rang de la famille de ses colonnes est égal à r : hors colonnes nulles, on a r colonnes de la base canonique, donc libres. □