Espaces vectoriels

TABLE DES MATIÈRES

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

I Structure d'espace vectoriel

1 Définition

Définition : $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Soit E un ensemble et $\mathbb{K}$ un corps. On appelle **loi de composition externe** sur E toute application $\cdot : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda\cdot x \end{array}\right.$

On appelle **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** ou **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** tout triplet $(E,+,\cdot)$ tel que

- E est un ensemble, $+$ est une loi de composition interne sur E et $\cdot$ est une loi de composition externe sur E.
- $(E,+)$ est un groupe abélien d'élément neutre noté $\vec{0}$ ou 0_E.
- *Pseudo-distributivité à droite* :
$$\forall\, \lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \ \forall\, \vec{x}\in E,\ \ (\lambda+\mu)\cdot\vec{x} = \lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x}.$$
- *Pseudo-distributivité à gauche* :
$$\forall\, \lambda\in\mathbb{K},\ \ \forall\, \vec{x},\vec{y}\in E,\ \ \lambda\cdot\left(\vec{x}+\vec{y}\right) = \lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}.$$
- *Pseudo-associativité* :
$$\forall\, \lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \ \forall\, \vec{x}\in E,\ \ (\lambda\times\mu)\cdot\vec{x} = \lambda\cdot\left(\mu\cdot\vec{x}\right).$$
- *Pseudo-élément neutre* : $\forall\, \vec{x}\in E,\ \ 1_{\mathbb{K}}\cdot\vec{x}=\vec{x}$.

Remarques

R 1 – Les éléments de E s'appellent **vecteurs** (et ne se notent pas nécessairement avec des flèches) et les éléments de $\mathbb{K}$ sont les **scalaires**.

R 2 – Un espace vectoriel n'est jamais vide $\vec{0}\in E$. Si $\mathbb{K}$ est infini et si $E\neq\left\{\vec{0}\right\}$, alors E est infini.

Définition : Famille presque nulle, combinaison linéaire

On appelle **famille presque nulle** de scalaire tout famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $\lambda_i\neq 0$ pour un nombre fini de vecteurs seulement. On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles de scalaires presque nulles.

Si $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$ sont des vecteurs de E, on appelle **combinaison linéaire** de $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$, tout vecteur de la forme $\lambda_1\vec{x}_1+\cdots+\lambda_n\vec{x}_n$ où $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$.

La définition s'étend aux familles infinies de vecteurs en n'ayant qu'un nombre fini de scalaires non nuls : toute combinaison linéaire est nécessairement finie (d'où l'intérêt des familles presque nulles de scalaires).

Si $\mathscr{F}=(\vec{x}_i)_{i\in I}$, les combinaisons linéaires d'éléments de $\mathscr{F}$ sont les $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i\vec{x}_i$ où $(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^{(I)}$.

Propriété : Produit cartésien de $\mathbb{K}$-ev

Si $\left(E, \underset{E}{+}, \underset{E}{\cdot}\right)$ et $\left(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{\cdot}\right)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors $(E \times F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec les lois coordonnée à coordonnée : si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(\vec{x}, \vec{y}), (\vec{x}', \vec{y}') \in E \times F$,

$$(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}', \vec{y}') = \left(\vec{x} \underset{E}{+} \vec{x}', \vec{y} \underset{F}{+} \vec{y}'\right)$$

$$\lambda \cdot (\vec{x}, \vec{y}) = \left(\lambda \underset{E}{\cdot} \vec{x}, \lambda \underset{F}{\cdot} \vec{y}\right)$$

Remarque

Se généralise, par récurrence, au produit de n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Propriété : Fonctions à valeurs dans un $\mathbb{K}$-ev

Si X est un ensemble non vide et $\left(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{\cdot}\right)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $\left(F^X, +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec les lois habituelles sur les fonctions : si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in F^X$, alors

$$f + g : x \mapsto f(x) \underset{F}{+} g(x)$$

$$\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda \underset{F}{\cdot} f(x)$$

Propriété : Espaces vectoriels classiques

Sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

- $(\mathbb{K}, +, \times)$,
- $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
- $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot\right)$,
- $\left(\mathbb{K}^X, +, \cdot\right)$ *pour tout ensemble* X,
- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$,
- $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$.

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et, plus généralement, si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$, alors $(\mathbb{L}, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2 Sous-espace vectoriel

Définition : Sous-espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E.
On dit que $(F, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de E lorsque $\left(F, +_{|F^2}, \cdot_{|\mathbb{K} \times F}\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété : Caractérisation des sous-espaces vectoriels

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff \begin{cases} F \neq \varnothing \ (0_E \in F) \\ \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in F,\ \ \vec{x}+\vec{y} \in F \\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \ \forall\, \vec{x} \in F,\ \ \lambda\vec{x} \in F \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F \neq \varnothing \ (0_E \in F) \\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \ \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in F,\ \ \vec{x}+\lambda\vec{y} \in F \\ (F \text{ stable par combin. linéaires}) \end{cases}$$

Exemples

E 1 – $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E appelés **sous-espaces triviaux** de E.

E 2 – $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Remarque

Représentation des sous-espaces vectoriels : On représente les sous-espaces en petite dimension par des points, plans ou droites. Ils contiennent les extrémités des vecteurs dont l'origine est toujours prise au même point (représentant $\vec{0}$). Le seul point est $\vec{0}$.

3 Intersection de sous-espace vectoriel

Propriété : Intersection de sous-espaces vectoriels

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque

$\boxed{F \cup G \text{ est un sous-espace de } E \text{ si et seulement si } F \subset G \text{ ou } G \subset F.}$

Si $F\cup G$ est un sous-espace de E et si $F \not\subset G$, alors on a $\vec{x} \in F$ tel que $\vec{x} \notin G$ et si $\vec{y} \in G$, $\vec{x}+\vec{y} \in F\cup G$ car sous-espace et comme $\vec{x} = (\vec{x}+\vec{y}) - \vec{y} \notin G$, $\vec{x}+\vec{y} \notin G$ donc $\vec{x}+\vec{y} \in F$ et $\vec{y} = (\vec{x}+\vec{y}) - \vec{x} \in F$ donc $G \subset F$.

4 Sous-espaces vectoriel engendré par une partie

Définition : Sous-espaces vectoriel engendré par une partie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $A \subset E$.
On appelle **sous-espace vectoriel engendré** par A le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.
On le note $\operatorname{Vect} A$ ou $\operatorname{Vect}_{\mathbb{K}} A$.
Si $F = \operatorname{Vect} A$, on dit que A **engendre** F ou que F est une **partie génératrice** de F.

Remarques

R 1 – On définit aussi, pour une famille $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ de vecteurs, $\operatorname{Vect}(\vec{x}_i)_{i\in I} = \operatorname{Vect}\{\vec{x}_i \ ;\ i \in I\}$.

R 2 – $\operatorname{Vect}\varnothing = \{\vec{0}_E\}$.

Propriété : Caractérisation d'un Vect

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $A \subset E$.

(i) $\operatorname{Vect} A = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subset F}} F$.

(ii) $\operatorname{Vect} A$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :*

$$\operatorname{Vect} A = \left\{\lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n \; ; \; n \in \mathbb{N}^*, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in A, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\right\}.$$

Remarques

R 1 – Si A est finie, $A = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$, alors

$$\operatorname{Vect} A = \operatorname{Vect}\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\right) = \left\{\sum_{i=0}^{p} \lambda_i \vec{x}_i \; ; \; (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\right\} = \mathbb{K}\vec{x}_1 + \cdots + \mathbb{K}\vec{x}_p.$$

R 2 – Il faut savoir passer de famille génératrice à équation du sev, et d'équation à famille génératrice.

R 3 – $\operatorname{Vect} A \subset F \iff A \subset F \iff \forall \vec{x} \in A, \quad \vec{x} \in F$.

R 4 – Si $A \subset B$, alors $\operatorname{Vect} A \subset \operatorname{Vect} B$.

R 5 – $\operatorname{Vect} A = \operatorname{Vect} B \iff A \subset \operatorname{Vect} B$ et $B \subset \operatorname{Vect} A$

5 Familles de vecteurs

Définition : Familles liées, libres, génératrices, bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{F} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \in E^n$.

- La famille $\mathscr{F}$ est dite **liée** (ses vecteurs sont dit **linéairement dépendants**) lorsqu'il existe une combinaison linéaire non triviale de ses vecteurs égale au vecteur nul :

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0}$$

- La famille $\mathscr{F}$ est dite **libre** (ses vecteurs sont dit **linéairement indépendants**) lorsqu'elle n'est pas liée, c'est-à-dire que toute combinaison linéaire de ses vecteurs égale au vecteur nul est triviale :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0} \Longrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i = 0.$$

- La famille $\mathscr{F}$ est dite **génératrice** de E (ou **engendre** E) lorsque tout vecteur de E est combinaison linéaire de ces vecteurs :

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i$$

  c'est-à-dire $E = \operatorname{Vect} \mathscr{F}$.
- La famille $\mathscr{F}$ est une **base** de E lorsqu'elle est libre et génératrice dans E.

Toutes ces définitions s'étendent aux familles infinies, les combinaisons linéaires restant toujours finies (les suites de cœfficients $(\lambda_i)_i$ sont presque nulles).

Remarques

R 1 – Les couples de vecteurs liés sont les couples de vecteurs colinéaires, les triplets de vecteurs liés sont les triplets de vecteurs coplanaires.

⚠ Non colinéaires deux à deux ne suffit pas !

Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\vec{x} = (1, 0, 0)$, $\vec{y} = (0, 1, 0)$ et $\vec{z} = (1, 1, 0)$ sont non colinéaires deux à deux et pourtant, ils sont coplanaires donc linéairement dépendant.

R 2 – ⚠ Dire que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaire, c'est dire qu'il existe $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ tel que $\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}=\vec{0}$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $\vec{y}=\lambda\vec{x}$ **OU** que $\vec{x}=\vec{0}$.

R 3 – Une famille contenant $\vec{0}$ est toujours liée.

Méthode : Montrer qu'une famille est liée

- Pour montrer qu'une famille est liée, on cherche une combinaison linéaire nulle non triviale de ses vecteurs.
- Cela peut parfois se faire par exemple en résolvant un système linéaire.
- On raisonne fréquemment par l'absurde et/ou par récurrence.
- On peut aussi utiliser un argument de dimension (s'il y a plus de vecteurs que la dimension, la famille est liée).

Méthode : Montrer qu'une famille est libre

- Pour montrer qu'une famille est libre, on prend une combinaison linéaire nulle des vecteurs, et on montre qu'elle est triviale : tous les scalaires sont nuls.
- Il suffit aussi de concaténer des familles libres de vecteurs pris dans des sous-espaces en somme directe.
- On peut aussi, en dimension finie, utiliser un déterminant.
- Dans un espace préhilbertien, une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- On verra dans le cours de réduction qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est automatiquement libre.

Exemples

E 1 – La famille $(1,\cos,\sin,\cos(2\cdot),\sin(2\cdot))$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

E 2 – La famille $(x\mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Propriété : Famille de polynômes à degrés étagés

*Toute famille de polynômes **non nuls** et à **degrés étagés** (c'est-à-dire deux à deux distincts) est libre.*

Exemple

$(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et plus généralement $\left((X-a)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont libres et même des bases de $\mathbb{K}[X]$ d'après la formule de Taylor.

Définition - Propriété : Coordonnées dans une base

$\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ est une base de E si et seulement si

$$\forall\,\vec{x}\in E,\quad \exists!\,(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n \mid \vec{x}=x_1\vec{e}_1+\cdots+x_n\vec{e}_n.$$

Le triplet $(x_1,\dots,x_n)$ est appelé n-uplet des **coordonnées** de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{B}$.
Cette définition s'étend au cas où $\mathscr{B}$ est infinie, les famille des coordonnées étant presque nulles.

Remarque

Unicité = libre, existence = génératrice

Définition - Propriété : Bases canonique de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$

On a appelle **bases canoniques** de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ les familles $\big((0,\dots,0,\underset{k^e}{\underset{\uparrow}{1}},0,\dots,0)\big)_{1\leqslant k\leqslant n}$, $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(1,X,X^2,\dots,X^n\right)$, $\left(E_{i,j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$.

Remarque

L'existence et l'unicité de la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles fournissent des bases de $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$.

Propriété : Sur-famille d'une famille liée, génératrice

Toute sur-famille d'une famille liée ou génératrice l'est encore.

Propriété : Sous-famille d'une libre

Toute sous-famille d'une famille libre l'est encore.

Propriété : Complétion d'une famille libre

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n\in\mathbb{N}^*$, $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n,\vec{y}\in E$.

$$\left(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n,\vec{y}\right) \text{ libre} \iff \begin{cases} \left(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\right) \text{ libre} \\ y\notin \operatorname{Vect}\left(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\right) \end{cases}$$

Propriété : Caractérisation des familles liées

Soit $\left(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\right)\in E^n$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Alors $\left(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\right)$ liée si et seulement s'il existe $i_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $\vec{x}_{i_0}\in\operatorname{Vect}\left((\vec{x}_i)_{i\neq i_0}\right)$.
Lorsque c'est le cas, on a alors $\operatorname{Vect}\left(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\right)=\operatorname{Vect}\left(\vec{x}_i\right)_{i\neq i_0}$.

6 Sommes de sous-espaces vectoriels

Définition : Sommes de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

On note $F_1+\ldots+F_n=\displaystyle\sum_{i=1}^n F_i=\left\{\vec{x}_1+\cdots+\vec{x}_n \mid \forall i,\ \ \vec{x}_i\in F_i\right\}$.

Ainsi, $\vec{x}\in\displaystyle\sum_{i=1}^n F_i \iff \exists\left(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\right)\in F_1\times\cdots\times F_n,\ \ \vec{x}=\vec{x}_1+\cdots+\vec{x}_n$.

Remarques

R 1 – ⚠ $\mathbb{K}\,\vec{x}+\mathbb{K}\,\vec{y}\neq\mathbb{K}\left(\vec{x}+\vec{y}\right)$, en général.

R 2 – ⚠ $F+F=F$, $F-F=F$, si G est un sous-espace de F, $F+G=F$.

R 3 – si $\lambda\neq 0$, $\lambda F=F$.

R 4 – ⚠ En général, $(F+G)\cap H\neq F\cap H+G\cap H$. Exemple : trois droites coplanaires.

Propriétés

(i) *Une somme de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

(ii) *Si A, B sont des parties de E, alors* $\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}\, A + \mathrm{Vect}\, B$.

7 Somme directe

Définition : Somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe lorsque pour tout $\vec{x} \in F_1 + \cdots + F_n$, l'écriture $\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n$ où $\forall\, i,\ \ \vec{x}_i \in F_i$ est unique.

On note alors $F_1 + \cdots + F_n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Remarque

Comme pour des ensembles disjoints, il n'y a pas de notation pour dire que des sous-espaces sont en somme directe. La notation désigne la somme des sous-espaces, en rappelant que celle-ci est directe.

Propriété : Caractérisation par l'unique écriture de $\vec{0}$

$F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe si et seulement si
$\forall\, (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\ \ \left(\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0} \Longrightarrow \vec{x}_1 = \cdots = \vec{x}_n = \vec{0}.\right)$

Propriété : Cas de deux sous-espaces

Deux sous-espaces F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}\}$.
⚠ *Le résultat est faux pour plus de deux sous-espaces.*

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}(1,0)$, $G = \mathbb{R}(0,1)$ et $H = \mathbb{R}(1,1)$ sont tels que $(1,0) + (0,1) - (1,1) = (0,0)$. La somme n'est pas directe et pourtant $F \cap G = G \cap H = H \cap F = F \cap G \cap H = \{0\}$.

8 Sous-espaces supplémentaires

Définition

Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
F et G sont dits **supplémentaires** dans E si et seulement si $E = F \oplus G$ c'est-à-dire $\forall\, \vec{x} \in E,\ \ \exists!\, (\vec{x}_F, \vec{x}_G) \in F \times G \mid \vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$.

Remarque

⚠ Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire ! Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'en est **jamais** un ! (Pourquoi ?)

Propriété

(i) *F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si* $F+G=E$ *et* $F\cap G=\{\vec{0}\}$.

(ii) *Il n'y a pas unicité du supplémentaire en général.*

Méthode : Montrer que des sous-espaces sont supplémentaires

- Raisonner par analyse-synthèse : si on a une décomposition $x=a+b$, alors... $a=...$ et $b=...$ (unicité sous réserve d'existence), et réciproquement de tels a et b conviennent (d'où l'existence).
- Montrer que $F\cap G=\{0_E\}$ (en général plus facile) et $F+G=E$ (en général moins facile).
- En dimension finie, utiliser des bases (une concaténation de bases de chaque sev donne une base de l'espace entier, dite adaptée à la décomposition $E=F\oplus G$) ou un argument de dimension $\dim F+\dim G=\dim E$ et, au choix, soit $F\cap G=\{0_E\}$, soit $F+G=E$: voir plus loin.
- Reconnaître les sous-espaces caractéristiques d'une symétrie ou d'une projection.
- Plus généralement, reconnaître les sous-espaces propres d'un endomorphisme diagonalisable (voir cours de réduction).
- Reconnaître, si F est de dimension finie dans un espace préhilbertien, une décomposition $F\oplus F^{\perp}=E$.

Exemples

E 1 – Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ les sous-espaces des fonctions paires et impaires sont supplémentaires.

E 2 – $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}^{-}(X)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}(X)$.

E 3 – Les sous-espaces $B\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_{\deg B-1}[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition

Soient $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que $F_1,\dots,F_n$ sont supplémentaires dans E lorsque $F_1\oplus\cdots\oplus F_n=E$ c'est-à-dire

$$\forall\,\vec{x}\in E,\quad \exists!\,(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\in F_1\times\cdots\times F_n \mid \vec{x}=\vec{x}_1+\cdots+\vec{x}_n.$$

II DIMENSION FINIE

1 Espace de dimension finie

Définition : Espace de dimension finie

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est dit de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.
Dans le cas contraire, il est dit de **dimension infinie**.

Exemples

E 1 – $\{\vec{0}\}$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimension finie.

E 2 – $\mathbb{K}[X]$ ne l'est pas car si on avait une famille génératrice finie, tout polynôme aurait un degré au plus égal au plus grand des degrés de ces polynômes.

2 Dimension, bases extraites et incomplètes

Théorème : de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{\vec{0}\}$.
De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{\vec{0}\}$.
- *E possède des bases.*
- *Toutes les bases de E ont même nombre d'éléments.*

Définition : Dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Si $E = \{\vec{0}\}$, on pose $\dim E = 0$.
Sinon, on note $\dim E$ (ou $\dim_{\mathbb{K}} E$) le nombre de vecteurs de toute base de E.

Exemples

E 1 – $\dim \mathbb{K}^n = n$, $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$.

E 2 – $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ et $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

E 3 – $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_n[X] = 2(n+1)$: $(1, \mathrm{i}, X, \mathrm{i}X, \dots, X^n, \mathrm{i}X^n)$ en est une base.
On peut démontrer que si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ et que $\mathbb{L}$ est de dimension finie en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors tout espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{L}$ est un espace de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \times \dim_{\mathbb{L}} E$.

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs, toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.

Corollaire

Toute famille d'au moins $n+1$ vecteurs en dimension n est liée.

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $\mathscr{B}$ une famille finie de vecteurs de E.
*$\mathscr{B}$ est une base de E si et seulement si elle contient $n = \dim E$ vecteur et elle est libre **ou** génératrice.*

Remarque

Dans la pratique, on montre que le famille est libre et possède le bon nombre de vecteurs.

Théorème : de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. On peut compléter toute famille libre de vecteurs de E en une base de E.
De plus, les vecteurs pour compléter peuvent être choisis dans n'importe quelle famille génératrice de E.

Corollaire

Si E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E et $\mathscr{L}$ une sous-famille libre de $\mathscr{G}$. Alors on peut trouver une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathscr{L}$ soit une sous-famille de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$ soit une sous-famille $\mathscr{G}$.

3 Dimension d'un produit d'espaces vectoriels

Propriété

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de bases $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ et $\mathscr{B}' = \left(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\right)$.
Alors $\mathscr{C} = \left((\vec{e}_1, 0_F), \dots, (\vec{e}_p, 0_F), \left(0_E, \vec{f}_1\right), \dots, \left(0_E, \vec{f}_n\right)\right)$ est une base de $E \times F$.
En particulier, $E \times F$ est de dimension finie et $\dim E \times F = \dim E + \dim F$.
Plus généralement, si $E_1, \dots, E_n$ sont des espaces de dimension finie, $E_1 \times \dots \times E_n$ l'est encore et $\dim E_1 \times \dots \times E_n = \dim E_1 + \dots + \dim E_n$.
Si E est de dimension finie, E^n l'est encore et $\dim E^n = n \dim E$.

4 Dimension des sous-espaces

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace de E.
Alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$ avec égalité si et seulement si $F = E$.
*L'entier $\dim E - \dim F$ est appelé **codimension** de F dans E.*

Définition : Droites, plans, hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Un sous-espace de dimension 1 est une **droite vectorielle** de E, un sous-espace de dimension 2 est un **plan vectoriel** de E, un sous-espace de codimension 1, donc de dimension $n-1$ est un **hyperplan** de E.

5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition : Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ une famille d'éléments de E.
On appelle **rang** de $\mathscr{F}$ l'entier $\operatorname{rg} \mathscr{F} = \dim(\operatorname{Vect} \mathscr{F})$.

Remarque

Si E est de dimension finie n, alors $\operatorname{rg} \mathscr{F} \leqslant n$.

Propriétés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ une famille d'éléments de E.

(i) Si $\mathscr{F}'$ est une sous-famille de $\mathscr{F}$, $\operatorname{rg} \mathscr{F} \leqslant \operatorname{rg} \mathscr{F}$.

(ii) Si $\mathscr{F}$ est finie, $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si elle contient $\operatorname{rg} \mathscr{F}$ vecteurs.

Remarque

En dimension finie, la méthode du pivot de Gauß permet de déterminer le rang d'une famille de vecteurs.

6 Somme directe et supplémentaire

Propriété : Caractérisation de la supplémentarité avec des bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces de dimension finie, $\mathscr{B}_{F_i}$ une base de F_i, $\mathscr{C}$ la famille obtenue en mettant bout à bout les $\mathscr{B}_{F_i}$ (concaténation).

On a toujours que $\mathscr{C}$ engendre $H = F_1 + \cdots + F_n$, et

Les F_i sont en somme directe si et seulement si $\mathscr{C}$ est libre donc une base de H.

On dit alors que la base $\mathscr{C}$ de H est adaptée à la décomposition $H = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$.

On a alors $\dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

Corollaire

Soient $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie, alors $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est de dimension finie et $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Corollaire : Sous-espaces supplémentaires en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces de E.

$F_1,\dots,F_n$ sont supplémentaires dans E (ie $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$) si et seulement si deux des trois propriétés suivantes sont vraies :

1. $E = F_1 + \cdots + F_n$.
2. *La somme est directe.*
3. $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

Remarque

En particulier, pour deux sous-espaces, F et G sont supplémentaires dans E (ie $E = F \oplus G$) si et seulement si deux des trois propriétés suivantes sont vraies :

1. $E = F + G$.
2. $F \cap G = \{\vec{0}\}$
3. $\dim E = \dim F + \dim G$.

Corollaire

Tout sous-espaces vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E admet un supplémentaire dans E.

De plus, si $p = \dim F$ et $n = \dim E$, tout supplémentaire de F est de codimension p, c'est-à-dire de dimension $n - p$.

7 Formule de Grassmann

Propriété : Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G des sous-espaces de dimension finie.

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

III APPLICATIONS LINÉAIRES

1 Généralités

a Définition

Définition : Application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \to F$.
On dit que u est une **application linéaire** lorsque

$$\begin{cases} \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad u\left(\vec{x}+\vec{y}\right) = u(\vec{x}) + u(\vec{v}) \\ \forall\, \vec{x} \in E, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(\lambda\vec{x}) = \lambda u(\vec{x}) \end{cases}$$

ce qui s'écrit aussi $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad u\left(\vec{x}+\lambda\vec{y}\right) = u(\vec{x}) + \lambda u(\vec{v})$.

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

- Si f est bijective, on parle d'**isomorphisme** (d'espaces vectoriels).
- Si $E = F$, on parle d'**endomorphisme** et on note $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,F)$.
- Si $E = F$ et f est bijective, on parle d'**automorphisme**.
- Si $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, on dit que f est une **forme linéaire**.
- On note $\mathscr{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$ appelé **dual** de E l'ensemble des formes linéaires sur E.

Remarques

R 1 – Ne pas confondre E^* et $E \setminus \{0_E\}$.

R 2 – Une application linéaire est en particulier un morphisme de groupe de $(E,+)$ sur $(F,+)$.

Exemples

E 1 – Dérivation, intégration.

E 2 – **Homothéties vectorielles** : pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $h_\alpha = \alpha\,\mathrm{id}_E \in \mathscr{L}(E)$.

E 3 – Si $X \neq \varnothing$, F $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $a \in X$, alors $u_a : \left|\begin{array}{ccc} F^X & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array}\right.$ est linéaire (morphisme d'évaluation).

E 4 – $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[x] \\ P & \longmapsto & \tilde{P} \end{array}\right.$ où $\mathbb{K}[x]$ est l'ensemble des fonctions polynomiales est linéaire. Si $\mathbb{K}$ est infini, c'est un isomorphisme.

E 5 – La trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

E 6 – La transposition est linéaire sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ vers $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Définition : Morphisme d'algèbre

Soit $(\mathscr{A},+,\times,\cdot)$, $(\mathscr{B},+,\times,\cdot)$ et $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$.
On dit que f est un **morphisme d'algèbres** lorsque

- f est linéaire,
- $\forall\, x, y \in \mathscr{A}, \quad f(x \times y) = f(x) \times f(y)$
- $f(1_{\mathscr{A}}) = 1_{\mathscr{B}}$.

b Propriétés

Propriétés

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

(i) $u\left(\vec{0}_E\right) = \vec{0}_F$

(ii) $\forall\, \vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n \in E,\ \ \forall\, \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K},\ \ u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\vec{x}_i)$

(iii) *Si A est une partie de E,* $u(\operatorname{Vect} A) = \operatorname{Vect}(u(A))$.

(iv) *Si E' est un sous-espace vectoriel de E,* $u_{|E'} \in \mathscr{L}(E',F)$ *(u induit une application linéaire sur E').*

(v) *Si u est bijective (isomorphisme) alors* $u^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$.

(vi) $(\mathscr{L}(E,F),+,\cdot)$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

(vii) *Si* $u \in \mathscr{L}(E,F)$ *et* $v \in \mathscr{L}(F,G)$, $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.

(viii) *Si E' est un sous-espace vectoriel de E et F' est un sous-espace vectoriel de F, $u(E')$ est un sous-espace vectoriel de F et $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.*

c Noyau et image

Définition : Noyau et image

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

- Le **noyau** de u est $\operatorname{Ker} u = u^{-1}\left(\{\vec{0}_F\}\right) = \left\{\vec{x} \in E \mid u(\vec{x}) = \vec{0}_F\right\} \in \mathscr{P}(E)$.
- L'**image** de u est $\operatorname{Im} u = u(E) = \left\{u(\vec{x})\ ;\ \vec{x} \in E\right\} \in \mathscr{P}(F)$.

Remarque

L'image de u est en fait l'image de u vu comme simple fonction et le noyau de u est le noyau de u vu comme un morphisme de groupes additifs.

Propriétés

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

(i) $\operatorname{Im} u$ *et* $\operatorname{Ker} u$ *sont des sous-espaces vectoriels de F et E respectivement.*

(ii) *u est injective si et seulement si* $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}_E\}$.

(iii) *u est surjective si et seulement si* $\operatorname{Im} u = F$.

(iv) *Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors* $\operatorname{Ker} u_{|E'} = E' \cap \operatorname{Ker} u$ *et* $\operatorname{Im} u_{|E'} = u(E')$.

d Rang

Propriété

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E ou F de dimension finie.
Alors $\operatorname{Im} u$ *est de dimension finie au plus* $\min(\dim E, \dim F)$.

Définition : Rang

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, E ou F de dimension finie.
On appelle **rang** de u l'entier $\operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} u)$.
Si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}\big(u(\mathscr{B})\big)$.

Remarque

On a toujours $\operatorname{rg} u \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.

Propriété : Effet sur le rang de la composition par un isomorphisme

On ne change pas le rang en composant à gauche ou à droite par un isomorphisme.

2 Endomorphismes

a Structure d'algèbre

Propriété

$(\mathscr{L}(E),+,\circ,\cdot)$ *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre non commutative et non intègre si* $\dim E \geqslant 2$.

Notation

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$, on note $uv = u \circ v$, $u^n = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u^0 = \mathrm{id}_E$.

Définition : Polynôme en un endomorphisme

Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on peut définir $P(u) = a_0 \,\mathrm{id}_E + a_1 u + \cdots + a_n u^n$.
Lorsque $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on dit que P est un **polynôme annulateur** de u.

Propriété

Si $u \in \mathscr{L}(E)$*, l'application* $\left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{K}[X],+,\times,\cdot) & \longrightarrow & (\mathscr{L}(E),+,\circ,\cdot) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array} \right.$ *est un morphisme de* $\mathbb{K}$*-algèbres.*

⚠ *En particulier,* $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

Remarque

Deux polynômes en u commutent.

Propriété : Binôme

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}.$$

b Groupe linéaire

Définition : Groupe linéaire

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathscr{GL}(E)$ appelé **groupe linéaire de** E.

Propriété

$(\mathscr{GL}(E), \circ)$ est un groupe.

c Projecteurs

Définition : Projection

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.
Tout vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.
On appelle **projection** (ou **projecteur**) **sur** F **parallèlement à** G l'application

$$p : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x}_F \end{array} \right.$$

On définit de même la projection q sur G parallèlement à F.
On dit que les projections p et q sont **associées.**

Propriétés

Avec les notations ci-dessus :

(i) $p, q \in \mathscr{L}(E)$ *et* $p + q = \mathrm{id}_E$.

(ii) $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Propriété : Caractérisation des projections

p est une projection (vectorielle) sur E si et seulement si $p \in (E)$ et $p^2 = p \circ p = p$.

Dans ce cas,

(i) $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p = E$

(ii) *p est la projection sur $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $G = \operatorname{Ker} p$*

Remarques

R1 – A savoir retrouver sur un dessin.

R2 – On retiendra que $\vec{x} \in F = \operatorname{Im} p \iff \vec{x} \in \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \iff p(\vec{x}) = \vec{x}$.

Exemples

E1 – Projection sur $\mathscr{P}$ (fonctions paires) parallèlement à $\mathscr{I}$ (fonctions impaires) ?

Méthode : Étude d'une projection

Reconnaître et étudier une projection, c'est

1. vérifier que $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p \circ p = p$ pour un endomorphisme, ou $P^2 = P$ pour une matrice.
2. Chercher $F = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker} p$.

d Symétries

Définition : Symétrie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.
Tout vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.

On appelle **symétrie sur** F **parallèlement à** G l'application $s : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x}_F - \vec{x}_G \end{array}\right.$ ie $s = p - q$ avec les notations précédentes.

Propriétés

(i) $s \in \mathscr{L}(E)$

(ii) *Si p projection sur F parallèlement à G,* $s = 2p - \mathrm{id}_E$.

Propriété : Caractérisation des symétries

s est une symétrie (vectorielle) sur E si et seulement si $s \in (E)$ et $s^2 = s \circ s = \mathrm{id}_E$.

Dans ce cas,

(i) $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = E$

(ii) *s est la projection sur* $F = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ *parallèlement à* $G = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$

Remarque

Si $F = \{\vec{0}_E\}$, alors $G = E$ et $s = -\mathrm{id}_E$: symétrie centrale.

Méthode : Étude d'une symétrie

Reconnaître et étudier une symétrie, c'est

1. vérifier que $s \in \mathscr{L}(E)$ et $s \circ s = \mathrm{id}_E$ pour un endomorphisme, ou $S^2 = I_n$ pour une matrice.
2. Chercher $F = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker}(p + \mathrm{id}_E)$.

e Affinités

Définition : Affinité

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.
Tout vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.

On appelle **affinité de base** F **de direction** G **et de rapport** $k \in \mathbb{K}$ l'application $f_k : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x}_F + k\vec{x}_G \end{array} \right.$ ie $f_k = p + kq$ avec les notations précédentes.

Remarque

On retrouve homothéties, projections, symétries.

Propriété : Caractérisation des affinités

f est une affinité si et seulement si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $f = \mathrm{id}_E$ ou bien on a $k \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - k\,\mathrm{id}_E) = E$.
Il s'agit alors de l'affinité de base $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, de direction $\mathrm{Ker}(f - k\,\mathrm{id}_E)$ et de rapport k.

3 Détermination d'une application linéaire

a Image d'une base

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une base de E. Pour $\vec{x} \in E$, on note $(x_i)_{i \in I}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.

Alors pour tout $i \in I$, l'application $\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \vec{x} & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$ est une forme linéaire (i^e coordonnée).

Propriété

Soient E, F deux espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une base de E et $\mathcal{F} = \left(\vec{f}_i\right)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F.
Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall\, i \in I, \quad u(\vec{e}_i) = f_i$.

Corollaire

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors $u = v$ si et seulement si $u(\mathcal{B}) = v(\mathcal{B})$.

Propriété

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

- *u est injective si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est libre.*
- *u est surjective si et seulement si $u(\mathscr{B})$ engendre F.*
- *u est un isomorphisme si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est une base de F.*

Remarque

$u \in \mathscr{L}(E,F)$ est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base de F.

b Applications linéaires et dimensions

Propriété

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\dim E = \dim F \iff E$ et F sont isomorphes.

Remarque

L'étude de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^p$ se reporte sur tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p.

Propriété

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

Alors u est injective $\iff$ u est surjective $\iff$ u est bijective.

Remarque

C'est en particulier le cas pour tout endomorphisme en dimension finie.

Exemple

$u : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array}\right.$ où $x_0, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts est facilement injectif (noyau réduit à $0_{\mathbb{K}[X]}$) et $\dim \mathbb{K}_n[X] = \dim \mathbb{K}^{n+1}$ donc c'est un isomorphisme, ce qui redonne le résultat de l'interpolation de Lagrange.

Propriété

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F = n$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Les propriétés suivantes sont équivalents :

(i) u isomorphisme

(ii) u est inversible à gauche

(iii) u est inversible à droite

(iv) $\operatorname{rg} u = n$

c Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$

Propriété

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.

Remarque

⚠ $\mathscr{L}(E)$ est de dimension $(\dim E)^2$.

d Décomposition d'applications linéaires

Théorème

Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et pour tout i, $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que pour tout i, $u_{|E_i} = u_i$.

4 Théorème du rang

Théorème : du rang

$u \in \mathscr{L}(E,F)$ induit un isomorphisme de tout supplémentaire H de $\operatorname{Ker} u$ sur $\operatorname{Im} u$.
Si, de plus, E est de dimension finie, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u$.

Remarque

⚠ En général, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ ne sont pas supplémentaires.

Exemple

$u : (x,y) \mapsto (y,0)$

Corollaire

Si E est de dimension finie, u est injective si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim E$.
Si F est de dimension finie, u est surjective si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim F$.

5 Formes linéaires et hyperplans

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Définition

On rappelle que les formes linéaires sont les $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ et que $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est appelé espace dual de E.

Remarque

$\dim E^* = \dim E$.

Théorème : Caractérisation des hyperplans

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *H est un hyperplan.*

(ii) *H est un supplémentaire de toute droite $D \not\subset H$.*

(iii) *H est un supplémentaire d'une droite $D \not\subset H$.*

(iv) *H est le noyau d'une forme linéaire non nulle : $\exists \varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}, \quad H = \operatorname{Ker} \varphi$.*

Corollaire

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$.

$$\operatorname{Ker} \varphi_1 = \operatorname{Ker} \varphi_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad \varphi_1 = \lambda \varphi_2.$$

Remarque : Équation d'un hyperplan

Si $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E et $H = \operatorname{Ker} \varphi$ un hyperplan.
Pour tout $\vec{x} \in E$, $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \cdots + x_n \vec{e}_n$ donc $\varphi(\vec{x}) = x_1 \varphi(\vec{e}_1) + \cdots + x_n \varphi(\vec{e}_n)$.

Si on note $a_i = \varphi(\vec{e}_i)$, on obtient $\vec{x} \in H \iff a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$.
Réciproquement, toute équation de H donne une telle forme linéaire φ.

La propriété précédente nous dit que toutes les équations de H sont colinéaires.

Propriété : Système d'équations d'un sous-espace

Si F est un sous-espace vectoriel de E avec $\dim E = n$ et $\dim F = p$ tels que $p < n$, alors F est l'intersection de $n - p$ hyperplans distincts.

Remarque

Cela traduit le fait que le sous-espace puisse être décrit par un système de $n - p$ équations indépendantes.

IV Solutions des problèmes linéaires

Définition : Problème linéaire

Un **problème linéaire** est un problème conduisant à une équation du type $u(x) = b$ où $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $b \in F$ un vecteur fixé, l'inconnue x étant un vecteur de E.

Propriété

L'ensemble des solution de cette équation est

- *soit vide (si $b \notin \operatorname{Im} u$)*
- *soit un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker} u$, donc de la forme*

$$x_0 + \operatorname{Ker} u$$

où x_0 est une solution particulière et $\operatorname{Ker} u$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $u(x) = 0_F$.

Exemples

E 1 – Équations différentielles linéaires

E 2 – Suites arithmético-géométriques.

E 3 – Systèmes linéaires.

E 4 – Interpolation de Lagrange $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{array} \right.$

Connaissant une solution P_0, l'ensemble des solutions est $P_0 + \operatorname{Ker} u$.