Polynômes

$\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

En fait tout corps convient, mais pour certaines propriétés, on a besoin qu'il soit de caractéristique nulle, c'est-à-dire tel que $n_{\mathbb{K}} = n \cdot 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} + \cdots + 1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

I L'ALGÈBRE DES POLYNÔMES

1 Polynômes formels à une indéterminée

Se donner un polynôme à cœfficents dans $\mathbb{K}$, c'est se donner la suite $(a_0, a_1, \dots, a_d, 0, 0, \dots)$ de ses cœfficients ayant un nombre fini de termes non nuls (nulle à partir d'un certain rang). On parle alors de suite **presque nulle**.

On note alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, X^k la suite presque nulle $(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k^e}, 0, 0, \dots)$.

Cela permet de transformer la notation $(a_0, a_1, \dots, a_d, 0, 0, \dots)$ en

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d + 0 + 0 + \cdots = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k}_{\text{somme finie}} = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k.$$

On note parfois $P(X)$ pour P.

X est appelée **indéterminée**. L'ensemble des polynômes à une indéterminée à cœfficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Remarques

R1 – L'indéterminée n'est pas un nombre ! Elle n'a pas de valeur. Elle représente la suite presque nulle $(0, 1, 0, 0, \dots)$.

R2 – Par définition, $P = \sum a_k X^k = Q = \sum b_k X^k \iff \forall\, k, \quad a_k = b_k$ (égalité de deux suites). Les cœfficients d'un polynôme formel sont uniques.

- Le **polynôme nul** est le polynôme dont tous les cœfficients sont nuls, noté $0_{\mathbb{K}[X]}$ ou plus simplement 0.
- On appelle monôme tout polynôme de la forme aX^k avec $k \in \mathbb{N}$ et $a \neq 0$.
- On appelle **polynôme constant** tout polynôme $P = a$ où $a \in \mathbb{K}$.
- Si $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, on appelle **degré de P**, noté $\deg P$, le plus grand $k \in \mathbb{N}$ tel que $a_k \neq 0$ (qui existe bien).

$$\deg P = \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$$

  $a_{\deg P}$ est appelé **cœfficient dominant** de P, noté $\operatorname{cd} P$.
  Si $\operatorname{cd} P = 1$, P est dit **unitaire** ou **normalisé**.
  On pose $\deg 0 = -\infty$.
- On note $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leqslant n\}$ l'ensemble des polynômes de degré **au plus** n.

$$\mathbb{K}_n[X] = \left\{a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n,\ (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}\right\}.$$

2 Opérations sur les polynômes

Pour $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$, $Q = \sum_{k \geqslant 0} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit les lois $+$, $\times$, $\cdot$, $\circ$ par

- $P + Q = \sum_{k \geqslant 0} (a_k + b_k) X^k$
- $\lambda P = \sum_{k \geqslant 0} (\lambda a_k) X^k$
- $P \times Q = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k \times \sum_{\ell \geqslant 0} b_\ell X^\ell = \sum_{\substack{m \geqslant 0 \\ (m = k + \ell)}} c_m X^m$

  en faisant une sommation par diagonales, c'est-à-dire avec

$$c_m = \sum_{m = k + \ell} a_k b_\ell = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} = \sum_{\ell=0}^{m} a_{m-\ell} b_\ell.$$

- $P \circ Q = P(Q) = \sum_{k \geqslant 0} a_k Q^k$.

Remarques

R 1 – Ne pas dire « On pose $X = Q$ », cela n'a aucun sens !

R 2 – Cela correspond à la notion de composée de fonction habituelle.

R 3 – Le loi $\circ$ sur $\mathbb{K}[X]$ n'est pas commutative. Par exemple,

$$X^2 \circ (X+1) = (X+1)^2 \neq X^2 + 1 = (X+1) \circ (X^2).$$

R 4 – Elle admet un élément neutre : $P = X$ (qui correspond à l'identité).

R 5 – Elle est distributive sur $+$ à droite mais pas à gauche : $(P+Q) \circ R = P \circ R + Q \circ R$ mais $X^2 \circ (1+1) = 4 \neq 1 = X^2 \circ 1 + X^2 \circ 1$.

Propriété : Opérations algébriques et degré

Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $P+Q$, $P \times Q$ et λP sont des polynômes et

- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$ *avec égalité si et seulement si* $\deg P \neq \deg Q$ *ou* ($\deg P = \deg Q$ *et* $\operatorname{cd} P + \operatorname{cd} Q \neq 0$)
- $\deg(\lambda P) = \deg P$ *et* $\operatorname{cd}(\lambda P) = \lambda \operatorname{cd} P$ ***si*** $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$, *sinon* $\lambda P = 0$.
- $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$ *et* $\operatorname{cd}(PQ) = \operatorname{cd} P \operatorname{cd} Q$.
- *Si* Q ***non constant***, *alors* $\deg(P \circ Q) = \deg P \deg Q$ *et* $\operatorname{cd}(P \circ Q)) = \operatorname{cd} P \times (\operatorname{cd} Q)^{\deg P}$.

Remarques

R 1 – En général, on a $\deg(\alpha P + \beta Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$.

R 2 – Si Q est constant, $P \circ Q$ l'est aussi.

Propriété : Structure d'anneau commutatif intègre

$(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ *est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative intègre d'élément unité le polynôme constant 1 et dont le groupe des inversible est $\mathbb{K}_0[X] \setminus \{0\}$ (polynômes constants non nuls.)*

Remarque

L'isomorphisme d'algèbres trivial $\mathbb{K} \to \mathbb{K}_0[X]$ permet de confondre $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}_0[X]$, c'est-à-dire les constantes λ et les polynômes constants $P = \lambda$.

3 Dérivation formelle

Définition : Polynôme dérivé

Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on appelle **polynôme dérivé de** P, noté P', le polynôme défini par

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k = a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1}.$$

et $0' = 0$.

Plus généralement, on note $P^{(0)} = P$, $P^{(1)} = P'$, $P^{(2)} = P'' = \left(P'\right)'$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)} = \left(P^{(k-1)}\right)'$.

Remarque

Il n'est pas question ici de dérivabilité : la dérivation est une simple opération algébrique sur les polynômes.

Propriétés

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(i) $\deg P' = \deg P - 1$ *si P non constant, $-\infty$ sinon.*
Plus généralement, $\deg P^{(n)} = \deg P - n$ *si* $\deg P \geqslant n$, *$-\infty$ sinon.*
En général, $\deg P^{(n)} \leqslant \deg P - n$.

(ii) ***Linéarité*** : $(\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q'$.

(iii) ***Formule de Leibniz***

$(PQ)' = P'Q + PQ'$ *et plus généralement,* $(PQ)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$.

(iv) $(P \circ Q)' = Q' \times P' \circ Q$.

Remarques

R 1 – $P^{(n)} = 0$ si $n \geqslant \deg P + 1$ et si $d = \deg P$, $P^{(d)} = d!\,\mathrm{cd}\,P$.

R 2 – $\deg P = \min\{n \in \mathbb{N} \mid P^{(n)} = 0\} - 1$ si $P \neq 0$.

R 3 – Si $n \in \mathbb{N}$,

$$\left((X-a)^k\right)^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geqslant k+1 \\ k! & \text{si } n = k \\ k(k-1)\cdots(k-n+1)(X-a)^{k-n} = \dfrac{k!}{(k-n)!}(X-a)^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

R 4 – Si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P^{(n)} \begin{cases} 0 & \text{si } n \geqslant d+1 \\ d!a_d & \text{si } n = d \\ \sum_{k=n}^{d} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k X^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

II FONCTIONS POLYNOMIALES, RACINES

1 Fonctions polynomiales

Définition : Fonction polynôme associée

Si $P = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on note $\tilde{P} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \tilde{P}(x) = \sum_{k\geqslant 0} a_k x^k \end{array}\right.$ appelée **fonction polynomiale associée à** P.

Remarques

R 1 – Mathématiquement, P et $\tilde{P}$ sont des objets fondamentalement différents. Cependant, sous certaines conditions, on peut les identifier (cf plus loin). Ainsi, on fait souvent l'abus de notation $P(x)$ pour $\tilde{P}(x)$.

R 2 – On peut en fait définir un polynôme pour autre chose qu'un élément de $\mathbb{K}$: il suffit de pouvoir élever à une puissance k et faire des combinaisons linéaires (matrices, fonctions, polynômes, etc.) : la structure de $\mathbb{K}$-algèbre est adaptée.

R 3 – Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P \circ Q = \tilde{P}(Q)$ (on applique la fonction polynomiale à un polynôme au lieu d'un élément de $\mathbb{K}$.)

Propriétés : Fonction polynôme et opérations

Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

(i) $\widetilde{P+Q} = \tilde{P} + \tilde{Q}$.

(ii) $\widetilde{P \times Q} = \tilde{P} \times \tilde{Q}$.

(iii) $\widetilde{\lambda P} = \lambda \tilde{P}$.

(iv) $\widetilde{P \circ Q} = \tilde{P} \circ \tilde{Q}$.

(v) *Sur $\mathbb{R}$, $\tilde{P}$ est dérivable et* $\tilde{P}' = \widetilde{P'}$.

Remarque

L'application $P \mapsto \tilde{P}$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de $\mathbb{K}[X]$ vers l'algèbre des fonctions de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ (voir la propriété suivante, avec $\tilde{1} \equiv 1$.)

2 Formule de Taylor

Théorème : Formule de Taylor

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. $P(X) = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{\tilde{P}^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$ c'est-à-dire

$$P(X+a) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\tilde{P}^{(n)}(a)}{n!} X^n.$$

Corollaire : Formule de Mac Laurin

$P=\sum_{n\geqslant 0}\frac{\tilde{P}^{(n)}(0)}{n!}X^n$ c'est-à-dire les cœfficients de P sont les $a_n=\frac{\tilde{P}^{(n)}(0)}{n!}$.

3 Racines

a Définition

Définition : Racine

$a\in\mathbb{K}$ est un **zéro** ou une **racine** de $\mathbb{P}\in\mathbb{K}[X]$ lorsque $\tilde{P}(a)=0$.

Remarques

R1 – Cela dépend du corps $\mathbb{K}$.

R2 – Un polynôme réel de degré impair a toujours une racine réelle (conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.)

b Propriétés

Propriétés : Racine et division

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$.

(i) a est racine de P si et seulement si $(X-a)|P$.

(ii) $x_1,\dots,x_n$ sont racines deux à deux distinctes de P si et seulement si $(X-x_1)\cdots(X-x_n)|P$.

Remarque

Si $P|Q$, toute racine de P est racine de Q. La réciproque est fausse en général.

Corollaire : Nombre de racines

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$.

(i) Si $P\neq 0$, P admet au plus $\deg P$ racines.

(ii) Si P admet strictement plus de $\deg P$ racines, $P=0$.

(iii) Si P admet une infinité de racines, $P=0$.

Corollaire : Identification polynôme et fonction polynôme

Si $\mathbb{K}$ est infini et $\tilde{P}=\tilde{Q}$, alors $P=Q$. On peut alors confondre P et $\tilde{P}$.

Démonstration

Si $\tilde{P}=\tilde{Q}$ et $\mathbb{K}$ infini, alors $P-Q$ a une infinité de racines, donc est nul. □

Remarque

Si $\mathbb{K}=\{x_1,\dots,x_n\}$ fini (par exemple $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier), $P=\prod_{k=1}^{n}(X-x_k)\neq 0$ (il est unitaire) et pourtant $\tilde{P}\equiv 0$ (pas plus de racines que le degré !).

c Multiplicité

Définition : Multiplicité

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0$, $a \in \mathbb{K}$.

On appelle **ordre de multiplicité** de a en tant que racine de P l'entier

$$m = \max\left\{k \in \mathbb{N} \; ; \; (X-a)^k \middle| P\right\}$$

Ainsi, a est racine d'ordre m si et seulement si $(X-a)^m \mid P$ et $(X-a)^{m+1} \nmid P$ si et seulement si on a $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-a)^m Q$ et $Q(a) \neq 0$.

- Si $m = 0$, a n'est pas racine de P.
- Si $m \geqslant 1$, a est racine de P.
- Si $m = 1$, a est racine simple de P.
- Si $m = 2$, a est racine double de P.
- Si $m = 3$, a est racine triple de P.
- Si $m \geqslant 2$, a est racine multiple de P.

Remarques

R1 – Si $(X-a)^n \mid P$ alors a est racine de P d'ordre **au moins** n.

R2 – L'ordre est toujours au plus égal au degré du polynôme.

Propriété

$x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts sont racines d'ordre au moins $m_1, \dots, m_n$ respectivement si et seulement si $(X-x_1)^{m_1} \cdots (X-x_n)^{m_n} \mid P$.

Propriété : Caractérisation de l'ordre

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$.

a est racine d'ordre m de P si et seulement si $\forall k \in [\![0, m-1]\!]$, $\tilde{P}^{(k)}(a) = 0$ et $\tilde{P}^{(m)}(a) \neq 0$.

Corollaire

Si a est racine d'ordre $m \geqslant 2$ de P, a racine d'ordre $m-1$ de P'. La réciproque est fausse si on ne suppose pas a racine de P.

Exemple

$P = X(X-2)$ et $P' = 2X-2$: 1 est racine simple de P', mais n'est pas racine double de P.

Exercice

Montrer que $(X-1)^3 \mid nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.

4 Polynômes scindés

Définition : Polynôme scindé

$P \in \mathbb{K}[X]$ est dit **scindé** sur $\mathbb{K}$ s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$, c'est-à-dire si on a $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$P = \lambda(X-y_1)\cdots(X-y_n),$$

c'est-à-dire si on a $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$P = \lambda(X-x_1)^{m_1}\cdots(X-x_p)^{m_p}.$$

Alors $\deg P \geqslant 1$, $\lambda = \operatorname{cd} P$, $x_1, \dots, x_p$ sont les racines de P deux à deux distinctes de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$.

Remarque

⚠ Scindé sur $\mathbb{C} \not\Longleftrightarrow$ scindé sur $\mathbb{R}$.
$P = X^2 - 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.
$P = X^2 - 2$ est scindé sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{Q}$.

Propriété : Caractérisation avec les racines

Soit P un polynôme non constant admettant exactement p racines d'ordres respectifs $m_1, \dots, m_p$ dans $\mathbb{K}$.
P est scindé si et seulement si $m_1 + \cdots + m_p = \deg P$.

Théorème : Théorème de d'Alembert-Gauß (Thm. fondam. de l'alg.)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine.
On dit que le corps $\mathbb{C}$ est ***algébriquement clos****.*

Corollaire

Tout polynôme à cœfficients complexes non constant est scindé.

Corollaire

Si P est scindé, alors $P|Q$ si et seulement si toutes les racines de P sont racines de Q avec des multiplicités au moins égales à celles pour P.

Remarque

C'est donc toujours vrai dans $\mathbb{C}$.

5 Relations cœfficients-racines

Définition : Fonctions symétriques élémentaires

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$.
On appelle **fonctions symétriques élémentaires** de $x_1, \dots, x_n$ les nombres

- $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. ($n$ termes)
- $\sigma_2 = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + \cdots + x_{n-1}x_n$. ($\frac{n(n-1)}{2}$ termes)
- $\vdots$
- $\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$. ($\binom{n}{k}$ termes)
- $\vdots$
- $\sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n$. (1 terme)

Exemple

Si $n = 3$, les fonctions symétriques élémentaires en x, y, z sont $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + yz + xz$ et $\sigma_3 = xyz$.

Remarque

On peut montrer que toute fonction polynomiale en $x_1, \dots, x_n$ symétrique en $x_1, \dots, x_n$ s'exprime comme un polynôme en $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

Exemple

$S_1 = x_1 + \cdots + x_n = \sigma_1$ et $S_2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$.

Propriété : Relations cœfficients-racines

*Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ tel que $a_n \neq 0$, $P = a_0 + \cdots + a_n X^n$, **scindé** sur $\mathbb{K}$, $x_1, \ldots, x_n$ ses racines **comptées avec leur multiplicité**, donc $P = a_n(X - x_1) \cdots (X - x_n)$. En notant σ_k les fonctions symétriques élémentaires en $x_1, \ldots, x_n$,*

- $\sigma_1 = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$. *(somme)*
- $\vdots$
- $\sigma_k = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n}$.
- $\vdots$
- $\sigma_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$. *(produit)*

Ainsi, $P = a_n\big(X^n - \underbrace{\sigma_1}_{\text{somme}} X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} + \cdots + (-1)^n \underbrace{\sigma_n}_{\text{produit}}\big)$.

Remarques

R 1 – En particulier, si P est unitaire, $P = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} + \cdots + (-1)^n \sigma_n$.

R 2 – Si $n = 2$, on retrouve que les racines complexes de $aX^2 + bX + c$ ont une somme égale à $-b/a$ et un produit égal à c/a.

III INTERPOLATION DE LAGRANGE

- **Problématique** : Étant donné $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ scalaires $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, et $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ fixés (par exemple pour tout k, $y_k = f(x_k)$ où f est une fonction connue ou non).

  On cherche des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $P(x_k) = y_k$.

  C'est un problème d'**interpolation**.

- **Principe** : C'est un problème linéaire.

  L'application $u : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_k))_{k \in [\![0,n]\!]} \end{array}\right.$ est une application linéaire injective entre deux espaces de dimension $n+1$.

  En effet, son noyau est réduit aux polynômes de degré au plus n admettent les $n+1$ racines distinctes $x_0, \ldots, x_n$, c'est-à-dire au polynôme nul.

  Il s'agit donc d'un isomorphisme.

  On peut aussi remarquer que sa matrice dans les bases canoniques est la matrice de Vandermonde associée à $x_0, \ldots, x_n$.

  L'unique solution au problème est donc, par linéarité,

$$u^{-1}(y_0, \ldots, y_n) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot u^{-1}\Big(0, \ldots, \underbrace{1}_{i^{\text{e}}}, \ldots, 0\Big).$$

  On cherche donc le polynôme $L_i = u^{-1}\Big(0, \ldots, \underbrace{1}_{i^{\text{e}}}, \ldots, 0\Big)$ tel que $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$, c'est-à-dire $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$.

  Alors les x_j pour $j \neq i$ sont racines de L_i. Donc $L_i = \prod_{j \neq i} (X - x_j) Q$.

  Comme $\deg L_i = 1$, alors Q est constant : $Q = \lambda$ et $L_i(x_i) = 1 = \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)$.

Définition : Polynômes de Lagrange

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \ldots, x_n$ deux à deux distincts, on appelle i^{e} polynôme de Lagrange associé à $(x_0, \ldots, x_n)$ le polynôme

$$L_i = \frac{\prod_{j \neq i} (X - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

Propriété : Polynôme d'interpolation de Lagrange

Étant donné $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$, il existe un unique polynôme P de degré au plus n tel que $\forall\, i,\ \ P(x_i) = y_i$.

Il s'agit de $P = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot Li$.

Comme le problème est linéaire (en fait affine), on peut le résoudre sur $\mathbb{K}[X]$ en passant par solution particulière et solution du problème homogène associé.

Propriété

Les polynômes d'interpolation associés aux points $((x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n))$ sont les polynômes $P + \left(\prod_{i=0}^{n} (X - x_i)\right) Q$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $P = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i$.

Démonstration

Ils conviennent et si A convient, $x_0, \dots, x_n$ sont racines de $A - P$ qui s'écrit donc $\left(\prod_{i=0}^{n} (X - x_i)\right) Q$. □

Remarque : Phénomène de Runge

C'est séduisant pour approcher une fonction, mais peu utilisable en pratique si n devient trop grand. Les termes en X^n induisent de grandes variations qui vont perturber le comportement entre deux points d'interpolation (phénomène de Runge).

On peut montrer que pour atténuer ce phénomène, un moyen est choisir convenablement les points d'interpolation, le choix optimal étant les racines des polynômes de Tchebychev $\cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ sur $[-1, 1]$, transposable à tout $[a, b]$ par transformation affine.